

Optika nabitých částic

Michal Lenc

Poznámky k přednášce v akademickém roce 2004/2005

1.	Index lomu.....	3
2.	Variační úloha.....	5
3.	Störmerův problém.....	6
4.	Optická soustava s přímou osou.....	8
4.1	Multipólová pole.....	8
4.2	Rovnice trajektorie.....	11
4.3	Paraxiální rovnice.....	12
4.4	Paraxiální rovnice pro rotačně souměrná pole.....	13
5.	Elektronově optické vady.....	14
5.1	Geometrické vady 3. řádu.....	14
5.2	Chromatické vady.....	15
6.	Kvantově mechanický popis.....	16
7.	Kružnice jako centrální trajektorie.....	21
7.1	Obecná rovnice trajektorie.....	21
7.2	Rovnice paraxiální trajektorie.....	23

7.3	Zobrazení sektorovým polem.....	25
7.4	Disperze a chromatická vada.....	26
8.	Pohybová rovnice částice v magnetickém poli ve válcových souřadnicích.....	28
9.	Hamiltonián pro malé příčné oscilace.....	29
10.	Vychylovací magnety.....	32
11.	Silná fokusace.....	34
12.	Fázová stabilita.....	35
12.1	Synchrotronové oscilace.....	35
12.2	Diferenciální rovnice.....	37
12.3	Adiabatický útlum.....	38
13.	Vlnově optický popis.....	40
13.1	Difrakční integrál.....	40
13.2	Huygensův princip.....	41
13.3	Výpočet Fresnelova integrálu.....	43
13.4	Změna fáze při doteku kaustiky (Guyův fázový posuv).....	43
13.5	Přenos optickou soustavou.....	45
13.6	Započtení osových vad.....	47
14.	Metody numerického výpočtu polí pro částicovou optiku.....	48
14.1	Metoda konečných diferencí.....	48
14.2	Metoda konečných prvků.....	49
14.3	Metoda okrajového integrálu.....	51
15.	Bodové rozlišení mikroskopu.....	52
15.1	Mezní rozlišení.....	52
15.2	Závislost proudu ve stopě na velikosti stopy.....	53
16.	Zdroje elektronů a iontů pro mikroskopy a mikrosondy.....	54
16.1	Zdroje elektronů.....	54
16.2	Iontové zdroje.....	56

1. Index lomu.

Podobnost optiky nabitých částic a světelné optiky nejlépe vyjádříme nalezením "indexu lomu". Pohybové rovnice částice o hmotnosti m a s nábojem q ve statickém elektrickém a magnetickém poli, popsanými skalárním potenciálem $\Phi(\vec{r})$ a vektorovým potenciálem $\vec{A}(\vec{r})$ najdeme z Maupertoisova principu. Pole je spojeno s potenciály vztahy

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \Phi(\vec{r}) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad . \quad (1.1)$$

Lagrangeova funkce má tedy tvar

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - q\Phi(\vec{r}) \quad (1.2)$$

a protože nezávisí explicitně na čase, zachovává se energie částice

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L \quad , \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + q\vec{A}(\vec{r}) \quad , \quad (1.3)$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \left((\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}))^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} + q\Phi(\vec{r}) = mc^2 \quad .$$

Zde i v následujících vztazích je \vec{p} zobecněný impuls. Volba konstanty u zachovávající se energie je typická pro optiku nabitých částic: předpokládáme, že elektrostatický potenciál je nulový tam, kde je nulová rychlost částice. Vztah (1.3) je možno zapsat také jako

$$\gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = mc^2 - q\Phi(\vec{r}) \quad . \quad (1.4)$$

Musí tedy být znaménko potenciálu voleno tak, aby byl v pro částici dovolené oblasti kladný pro záporně nabitě částice a záporný pro kladně nabitě částice. Podle Maupertoisova principu

se pohyb děje po trajektorii, na které $\delta \int \vec{p} \cdot d\vec{r} = 0$, tedy

$$\delta \int_{\tau_a}^{\tau_b} n(\vec{r}, \vec{t}) d\tau = 0 \quad , \quad \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad , \quad (1.5)$$

kde trajektorii parametrizujeme pomocí parametru τ , \vec{t} je tečný vektor a veličinu

$$n(\vec{r}, \vec{t}) = \left(\frac{\Phi^*(\vec{r})}{\Phi^*(\vec{r}_0)} \right)^{1/2} |\vec{t}| - \eta \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{t} \quad , \quad \Phi^*(\vec{r}) = \Phi(\vec{r})(1 + \varepsilon \Phi(\vec{r})) \quad , \quad (1.6)$$

$$\varepsilon = \frac{-q}{2mc^2} \quad , \quad \eta = \left(\frac{-q}{2m\Phi^*(\vec{r}_0)} \right)^{1/2} \quad , \quad \gamma = (1 + 2\varepsilon \Phi(\vec{r})) \quad .$$

můžeme interpretovat jako index lomu (anizotropního) prostředí. Nerelativistická aproximace se dostane jednoduše dosazením $\varepsilon = 0$. Normování skalárního potenciálu a kalibraci vektorového potenciálu se snažíme obvykle volit tak, aby byl index lomu roven jedná v oblasti, kde částici považujeme za volnou.

Pro počítání z Fermatova principu připomeneme dále ještě některé vztahy. Je-li v ortogonálních souřadnicích tečný vektor vyjádřen jako

$$\vec{t} = h_1(q_1, q_2, q_3) \frac{dq_1}{d\tau} \vec{e}_1 + h_2(q_1, q_2, q_3) \frac{dq_2}{d\tau} \vec{e}_2 + h_3(q_1, q_2, q_3) \frac{dq_3}{d\tau} \vec{e}_3 \quad , \quad (1.7)$$

máme pro základní operátory vektorové analýzy vyjádření

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (f_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (f_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (f_3 h_1 h_2) \right] \quad , \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (f_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (f_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \vec{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (f_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \vec{e}_2 +$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (f_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \vec{e}_3 \quad .$$

Fermatův princip dává rovnici trajektorie ve tvaru

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\Phi^{*1/2}}{\Phi_0^{*1/2}} \frac{h_\mu^2 \frac{dq_\mu}{d\tau}}{|\vec{t}|} \right] = \frac{\Phi^{*1/2}}{\Phi_0^{*1/2}} \frac{\partial |\vec{t}|}{\partial q_\mu} - \frac{1}{2} h_\mu |\vec{t}| \gamma E_\mu \frac{1}{\Phi^{*1/2} \Phi_0^{*1/2}} - \eta h_\mu (\vec{t} \times \vec{B})_\mu . \quad (1.9)$$

2. Variační úloha

Typický problém nalezení geodetické čáry je popsán variační úlohou

$$\delta S(x^i) = 0 \quad , \quad S = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ -mc \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}} - q g_{ij} A^i \frac{dx^j}{d\tau} \right\} d\tau . \quad (2.1)$$

Tato formulace ale nepracuje pro $m = 0$. Zvolíme-li ale

$$S(p_i, x^i) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ -p_i \frac{dx^i}{d\tau} + \frac{1}{2} \lambda(\tau) \left[g^{ij} (p_i - q A_i)(p_j - q A_j) - m^2 c^2 \right] \right\} d\tau , \quad (2.2)$$

kde $\lambda(\tau)$ je Lagrangeův multiplikátor, dostáváme po malé úpravě (variace vzhledem k p_i)

$$S(x^i) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda(\tau)} g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} + \lambda(\tau) m^2 c^2 \right] - q A_i \frac{dx^i}{d\tau} \right\} d\tau . \quad (2.3)$$

Připomeňme, že máme

$$x_i = (ct, -\vec{r}) \quad , \quad A_i = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A} \right) \quad , \quad p_i = (p_0, -\vec{p}) \quad (2.4)$$

a

$$mc^2 = c p_0 = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + q\Phi \quad , \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + q\vec{A} . \quad (2.5)$$

Variací (2.3) dostáváme

$$\delta S = - \left[\frac{1}{\lambda} \frac{d x_i}{d \tau} + q A_i \right] \delta x^i \Big|_{\tau_a}^{\tau_b} + \frac{1}{2} \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[\frac{1}{\lambda^2} g_{ij} \frac{d x^i}{d \tau} \frac{d x^j}{d \tau} - m^2 c^2 \right] \delta \lambda d \tau + \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[\frac{d}{d \tau} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d x_i}{d \tau} \right) - q \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) \frac{d x^j}{d \tau} \right] \delta x^i d \tau . \quad (2.6)$$

Odsud máme vyjádření impulsu

$$p_i = - \frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{1}{\lambda} \frac{d x_i}{d \tau} + q A_i , \quad (2.7)$$

vazebné podmínky

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m c}{\left(\frac{d x^i}{d \tau} \frac{d x_i}{d \tau} \right)^{1/2}} \quad (2.8)$$

a pohybové rovnice

$$\frac{d}{d \tau} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d x_i}{d \tau} \right) = q F_{ij} \frac{d x^j}{d \tau} , \quad F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} . \quad (2.9)$$

Jako malý příklad uveďme situaci, kdy je intenzita elektrického pole rovna nule, tj. platí

$F_{0\mu} = -F_{\mu 0} = 0$. Zvolíme-li jako parametr čas $\tau = x^0/c = t$, dostáváme z (2.9) a (2.8) $v = const$.

3. Störmerův problém.

Rozptyl nabité částice v poli magnetického dipólu

$$\vec{A} = \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} . \quad (3.1)$$

Zvolíme orientaci dipólového momentu podél osy z . Budeme používat válcovou soustavu souřadnic. Připomeňme si, že v této soustavě jsou jednotkové vektory dány pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy jako

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y , \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y , \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (3.2)$$

a máme tedy

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad , \quad \vec{t} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z \quad , \quad \vec{A} = \frac{M \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad . \quad (3.3)$$

Značíme jako obvykle

$$\frac{d f}{d \tau} \equiv \dot{f} \quad , \quad \frac{d f}{d z} \equiv f' \quad . \quad (3.4)$$

Index lomu takového prostředí je

$$n = (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} - \eta M \frac{\rho^2 \dot{\phi}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad . \quad (3.5)$$

Obvyklý postup v optice nabitých částic je takový: souřadnice ϕ je cyklická, po jejím vyloučení dostaneme pro nový "index lomu"

$$n(\rho, z) = n(\rho, z, \phi) - p_\phi \dot{\phi} \quad (3.6)$$

výraz

$$n(\rho, z) = [(\dot{\rho})^2 + (\dot{z})^2]^{1/2} \left[1 - \left(\frac{p_\phi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right]^{1/2} \quad , \quad (3.7)$$

kde p_ϕ je zachovávaná se úhlová složka momentu impulsu

$$p_\phi = \frac{\rho^2 \dot{\phi}}{((\dot{\rho})^2 + (\rho \dot{\phi})^2 + (\dot{z})^2)^{1/2}} - \eta M \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad . \quad (3.8)$$

Jako parametr τ zvolíme souřadnici z . Lagrangeova rovnice

$$\frac{d}{d z} \left(\frac{\partial n}{\partial \rho'} \right) - \frac{\partial n}{\partial \rho} = 0 \quad (3.9)$$

pak dává "rovnici trajektorie v rotující souřadné soustavě"

$$\rho'' + \frac{\rho'(1 + \rho'^2)}{1 - \left(\frac{p_\varphi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2} \frac{3\eta M \rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 + \rho'^2}{1 - \left(\frac{p_\varphi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2} \left(\frac{p_\varphi}{\rho^2} + \frac{3\eta M \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Rotace je pak počítána z rovnice

$$\varphi' = \pm \left[\frac{1 + \rho'^2}{1 - \left(\frac{p_\varphi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2} \right]^{1/2} \left(\frac{p_\varphi}{\rho^2} + \eta M \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right). \quad (3.11)$$

Rovnice nám umožní najít exaktní řešení, ale nejsou příliš průhledné. Všimněme si, že ve výrazu pro index lomu (3.5) vystupují souřadnice z a její derivace ve druhé mocnině, je tedy pohyb v rovině $z=0$ řešením. V takovém případě máme podstatně jednodušší úlohu, charakterizovanou

$$n(\rho, \varphi) = (\rho^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)^{1/2} - \frac{\eta M}{\rho} \dot{\varphi}. \quad (3.12)$$

4. Optická soustava s přímou osou.

4.1 Multipólová pole

Pro výpočet optických vlastností jednotlivých prvků potřebujeme znát rozložení elektrických a magnetických polí na ose, v jejíž blízkosti se svazek nabitých částic pohybuje. Protože v blízkosti optické osy nejsou ani budící cívky, ani elektrody, můžeme pole působící na nabitou částici charakterizovat pomocí skalárního magnetického potenciálu a elektrostatického potenciálu. Ze známého rozložení potenciálu nebo pole na ose můžeme vyjádřit elektrostatický nebo magnetický potenciál v blízkosti osy pomocí Fourierova rozvoje

v souřadnicích r , nebo Taylorova rozvoje v souřadnicích x , y . Taylorův rozvoj má tu nevýhodu, že nerozlišuje mezi potenciály různé symetrie. Základním polem je pole rotačně souměrné (fokusační), a dále pole dipólové (vychylovací). Další pole používaná v částicové optice jsou pole kvadrupólové (jak pro fokusaci jako kvadrupólové čočky, tak pro korekci astigmatismu), a hexapólové nebo oktapólové pole, používané pro korekci vad zobrazení. Teoreticky nejlepší způsob, jak vytvořit tato Multipólová pole, je sestavení $2n$ stejných hyperbolických elektrod o stejné absolutní hodnotě potenciálu se střídavou polaritou. Jednotlivé potenciály pro nejnižší multipóly jsou

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \phi_{1c} x + \phi_{1s} y = r(\phi_{1c} \cos \varphi + \phi_{1s} \sin \varphi) \\
 \Phi_2 &= \phi_{2c} (y^2 - x^2) + 2\phi_{2s} x y = r^2(\phi_{2c} \cos 2\varphi + \phi_{2s} \sin 2\varphi) \\
 \Phi_3 &= \phi_{3c} x(x^2 - 3y^2) + \phi_{3s} y(3x^2 - y^2) = r^3(\phi_{3c} \cos 3\varphi + \phi_{3s} \sin 3\varphi) \\
 \Phi_4 &= \phi_{4c} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) + \phi_{4s} x y(x^2 - y^2) = r^4(\phi_{4c} \cos 4\varphi + \phi_{4s} \sin 4\varphi)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde ϕ_{nc} je potenciál $2n$ -pólu s osou x v rovině symetrie a ϕ_{ns} je potenciál $2n$ -pólu s osou x v rovině antisymetrie.

Uvažujme nyní i možnou závislost koeficientů rozvoje polí na souřadnici z . Zavedeme ještě komplexní souřadnici w pomocí vztahu $w = x + iy$, $\bar{w} = x - iy$. Skalární potenciál je vyjádřen pomocí vztahu

$$\begin{aligned}
 \Phi(w, \bar{w}, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(w, \bar{w}, z) \quad , \\
 \Phi_n(w, \bar{w}, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!(n+k)!} \left(\frac{w\bar{w}}{4}\right)^k \operatorname{Re} \left\{ \bar{w}^n \frac{\partial^{2k} \phi_n(z)}{\partial z^{2k}} \right\} .
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ze známého skalárního potenciálu spočteme intenzitu elektrického pole jako

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi \quad , \\
 E_w = E_x + i E_y &= -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}} \quad , \quad E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} .
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

První členy rozvoje potenciálů rotačně souměrného pole, dipólového, kvadrupólového, hexapólového a oktapólového pole jsou pro elektrostatický potenciál

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= \phi(z) - \frac{1}{4}\phi''(z)(x^2 + y^2) + \frac{1}{64}\phi^{IV}(z)(x^2 + y^2)^2 - \dots \\
\Phi_1 &= -F_{1x}x - F_{1y}y + \frac{1}{8}(F_{1x}''x + F_{1y}''y)(x^2 + y^2) - \dots \\
\Phi_2 &= F_{2c}(y^2 - x^2) - 2F_{2s}xy - \frac{1}{12}(F_{2c}''(y^2 - x^2) - 2F_{2s}''xy)(x^2 + y^2) + \dots \quad (4.4) \\
\Phi_3 &= -F_{3c}x(x^2 - 3y^2) + F_{3s}y(y^2 - 3x^2) + \dots \\
\Phi_4 &= -F_{4c}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - 4F_{4s}xy(x^2 - y^2) + \dots
\end{aligned}$$

Zde $\phi(z)$ představuje závislost osového rotačně souměrného potenciálu na souřadnici z , $F_{1x}(z)$ a $F_{1y}(z)$ představují průběh závislosti x a y složky dipólového vychylovacího pole na ose (totéž jako $F_{1c}(z)$ a $F_{1s}(z)$). Funkce s vyššími indexy $F_{nc}(z)$ a $F_{ns}(z)$ udávají (ve V/m^n) průběh osové závislosti pole multipólu.

Pro magnetický skalární potenciál platí stejný rozvoj jako pro elektrostatický

$$\begin{aligned}
\Psi(w, \bar{w}, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(w, \bar{w}, z) \quad , \\
\Psi_n(w, \bar{w}, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!(n+k)!} \left(\frac{w\bar{w}}{4}\right)^k \operatorname{Re} \left\{ i^n \bar{w}^n \frac{\partial^{2k} \phi_n(z)}{\partial z^{2k}} \right\} \quad . \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Magnetický skalární potenciál bývá nejčastěji udáván v ampérech, v optice částic se však používá potenciál jako μ_0 -násobek obvyklého potenciálu (μ_0 je permeabilita vakua). Složky indukce magnetického pole jsou

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= -\vec{\nabla} \Psi \quad , \\
B_w &= B_x + iB_y = -2 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{w}} \quad , \quad B_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad . \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Rozvoj potenciálu v souřadnicích x, y dává

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= -\int^z B(z) dz + \frac{1}{4} B'(z)(x^2 + y^2) - \frac{1}{64} B'''(z)(x^2 + y^2)^2 + \dots \\
\Psi_1 &= D_{1y} x - D_{1x} y - \frac{1}{8} (D_{1y}'' x - D_{1x}'' y)(x^2 + y^2) - \dots \\
\Psi_2 &= 2 D_{2s} x y - D_{2c} (y^2 - x^2) - \frac{1}{12} (D_{2s} x y - D_{2c} (y^2 - x^2))(x^2 + y^2) + \dots \quad (4.7) \\
\Psi_3 &= -D_{3s} x (x^2 - 3y^2) - D_{3c} y (y^2 - 3x^2) + \dots \\
\Psi_4 &= -D_{4c} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) - 4 D_{4s} x y (x^2 - y^2) + \dots
\end{aligned}$$

$B(z)$, $D_{1x}(z)$ a $D_{1y}(z)$ (v jednotkách T - Tesla) je průběh indukce fokusačního a dipólového pole na ose, $D_{nc}(z)$ a $D_{ns}(z)$ (v T/m^{n-1}) je multipólové osové pole - podobně jako u elektrostatických multipólů.

4.2 Rovnice trajektorie.

Ve vztahu (1.9) zvolíme

$$\tau = z \quad , \quad \vec{t} = (x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + \vec{e}_z) \quad . \quad (4.8)$$

S použitím značení s komplexními čísly má získaná rovnice trajektorie tvar

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left[\frac{\Phi^{*1/2}}{\Phi_0^{*1/2}} \frac{w'}{(1+w'\bar{w}')^{1/2}} \right] = \\
-\frac{1}{2} (1+w'\bar{w}')^{1/2} (1+2\varepsilon\Phi) E_w \frac{1}{\Phi^{*1/2} \Phi_0^{*1/2}} - i\eta (B_w - w' B_z) \quad . \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Třetí rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left[\frac{\Phi^{*1/2}}{\Phi_0^{*1/2}} \frac{1}{(1+w'\bar{w}')^{1/2}} \right] = \\
-\frac{1}{2} (1+w'\bar{w}')^{1/2} (1+2\varepsilon\Phi) E_z \frac{1}{\Phi^{*1/2} \Phi_0^{*1/2}} + i\frac{\eta}{2} (B_w \bar{w}' - B_{\bar{w}} w') \quad , \quad (4.10)
\end{aligned}$$

je nadbytečná, ale můžeme ji s výhodou využít k vhodným úpravám (4.9). Tak můžeme například psát

$$w'' = -\frac{1}{2}(1 + w'\bar{w}') (E_w - w'E_z) \frac{(1 + 2\varepsilon\Phi)}{\Phi^*} - i \left(\frac{-q}{2m\Phi^*} \right)^{1/2} (1 + w'\bar{w}')^{1/2} \left(B_w + \frac{1}{2}(B_w \bar{w}' - B_{\bar{w}} w') w' - w' B_z \right) \quad (4.11)$$

nebo s využitím

$$B_w + \frac{1}{2}(B_w \bar{w}' - B_{\bar{w}} w') w' - w' B_z = |\vec{t}|^2 B_w - (\vec{B} \cdot \vec{t}) w' \quad (4.12)$$

jako

$$w'' = -\frac{1}{2} |\vec{t}|^2 (E_w - w'E_z) \frac{(1 + 2\varepsilon\Phi)}{\Phi^*} - i \left(\frac{-q}{2m\Phi^*} \right)^{1/2} |\vec{t}| \left(|\vec{t}|^2 B_w - w' (\vec{B} \cdot \vec{t}) \right) . \quad (4.13)$$

4.3 Paraxiální rovnice.

V paraxiální aproximaci pokládáme

$$\begin{aligned} |\vec{t}| &\approx 1 \quad , \quad E_z \approx -\phi'(z) \quad , \quad B_z \approx B(z) \quad , \\ E_w &\approx \frac{1}{2} \phi''(z) w(z) + F_1(z) + 2F_2(z) \bar{w}(z) \quad , \\ B_w &\approx -\frac{1}{2} B'(z) w(z) + iD_1(z) - 2D_2(z) \bar{w}(z) \quad , \end{aligned} \quad (4.14)$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} F_1(z) &= F_{1x}(z) + iF_{1y}(z) \quad , \quad F_2(z) = F_{2c}(z) + iF_{2s}(z) \quad , \\ D_1(z) &= D_{1x}(z) + iD_{1y}(z) \quad , \quad D_2(z) = D_{2c}(z) + iD_{2s}(z) \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dále pokládáme buď $\Phi \approx \phi(z)$ nebo

$$\Phi \approx \phi(z) - (F_{1x}(z)x + F_{1y}(z)y) = \phi(z) - \frac{1}{2}(F_1(z)\bar{w} + \bar{F}_1(z)w) \quad . \quad (4.16)$$

Rovnice (4.13) přejde tak na paraxiální rovnici trajektorie

$$\begin{aligned}
& w'' + \left[\frac{\gamma \phi'}{2\phi^*} - ikB \right] w' + \\
& \left[\frac{\gamma \phi''}{4\phi^*} - \frac{1}{2} ikB' + \frac{(1+\gamma^2)F_1\bar{F}_1}{8\phi^{*2}} - kD_1 \frac{\gamma\bar{F}_1}{4\phi^*} \right] w + \\
& \left[\frac{\gamma F_2}{\phi^*} - 2ikD_2 + \frac{(1+\gamma^2)F_1^2}{8\phi^{*2}} - kD_1 \frac{\gamma F_1}{4\phi^*} \right] \bar{w} = kD_1 - \frac{\gamma F_1}{2\phi^*} .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Zavedli jsme označení

$$\phi^* = \phi(z)[1 + \varepsilon\phi(z)] \quad , \quad \gamma = 1 + 2\varepsilon\phi(z) \quad , \quad k = \eta \left(\frac{\phi_0^*}{\phi^*} \right)^{1/2} = \left(\frac{-q}{2m\phi^*} \right)^{1/2} . \tag{4.18}$$

Pravá strana rovnice (4.17) musí být také řádu srovnatelného s w resp. \bar{w} . Buď jsou tedy dipólová pole slabá, jak se předpokládá v teorii vychylovacích systémů, nebo je pro jistou kinetickou energii $\phi - \Delta\phi$ splněna Wienova podmínka, tedy

$$\left(\frac{-q}{2m(\phi^* - \Delta\phi^*)} \right)^{1/2} D_1 = \frac{\gamma F_1}{2(\phi^* - \Delta\phi^*)} . \tag{4.19}$$

V paraxiální aproximaci potom

$$kD_1 \approx \frac{\gamma F_1}{2\phi^*} \tag{4.20}$$

a rovnice (4.17) přejde na

$$\begin{aligned}
& w'' + \left[\frac{\gamma \phi'}{2\phi^*} - ikB \right] w' + \left[\frac{\gamma \phi''}{4\phi^*} - \frac{1}{2} ikB' + \frac{F_1\bar{F}_1}{8\phi^{*2}} \right] w + \\
& \left[\frac{\gamma F_2}{\phi^*} - 2ikD_2 + \frac{F_1^2}{8\phi^{*2}} \right] \bar{w} = -\frac{\gamma F_1 \Delta\phi}{4\phi^* \phi^*}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.4 Paraxiální rovnice pro rotačně souměrná pole.

V tomto případě položíme v rovnici (4.21) $F_1 = F_2 = D_2 = 0$ a po transformaci

$$w = W \left(\frac{\phi_0^*}{\phi^*} \right)^{1/4} e^{i\Theta}, \quad \Theta = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z k(\zeta) B(\zeta) d\zeta \quad (4.22)$$

máme rovnici

$$W'' + \omega^2(z)W = 0, \quad \omega^2(z) = \left(\frac{kB}{2} \right)^2 + \frac{2 + \gamma^2}{16} \left(\frac{\phi'}{\phi^*} \right)^2. \quad (4.23)$$

5. Elektronově optické vady.

5.1 Geometrické vady 3. řádu.

Při odvozování paraxiální rovnice byly zanedbány všechny členy, které obsahují vyšší mocniny w, \bar{w}, w', \bar{w}' a členy se (slabými) vychylovacími poli. To se projeví tak, že k rovnici s paraxiálními členy přibude na pravé straně člen $P_3(z)$, který můžeme psát jako

$$\begin{aligned} P_3(z) = & \frac{1}{\phi^{*1/2}} \frac{d}{dz} \left[\phi^{*1/2} w' \left(\frac{\gamma \phi''}{8\phi^*} w \bar{w} + \frac{\gamma F_1}{4\phi^*} U_1 \bar{w} + \frac{\gamma \bar{F}_1}{4\phi^*} \bar{U}_1 w + \frac{1}{2} w' \bar{w}' \right) \right] - \\ & - \gamma \left(\frac{\phi''}{4\phi^*} w + \frac{F_1}{2\phi^*} U_1 \right) \left(\frac{\gamma \phi''}{8\phi^*} w \bar{w} + \frac{\gamma F_1}{4\phi^*} U_1 \bar{w} + \frac{\gamma \bar{F}_1}{4\phi^*} \bar{U}_1 w + \frac{1}{2} w' \bar{w}' \right) + \\ & + \frac{\gamma \phi'^V}{32\phi^*} w^2 \bar{w} + \frac{\gamma F_1''}{8\phi^*} U_1 w \bar{w} + \frac{\gamma \bar{F}_1''}{16\phi^*} \bar{U}_1 w^2 - \frac{3\gamma F_3}{2\phi^*} U_3 \bar{w}^2 - \\ & - ik \left(\frac{B''}{4} w w' \bar{w} + \frac{B'''}{16} w^2 \bar{w} \right) - \\ & - ik \left(\frac{D_1'}{2} I_1 w' \bar{w} - \frac{\bar{D}_1'}{2} \bar{I}_1 w w' + \frac{D_1''}{4} I_1 w \bar{w} - \frac{\bar{D}_1''}{8} \bar{I}_1 w^2 + 3D_3 I_3 \bar{w}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Podobně jako u rovnice paraxiální rovnice s deflektory řešíme metodou variace parametrů, přitom pro nalezení vady v obrazové rovině, kde $w(z_i) = 0$, stačí počítat pouze jeden z integrálů. Dosadíme-li za $w = \alpha w_a + \beta w_b + \gamma w_m + \delta w_e$, můžeme rozdělit získaný výraz na jednotlivé vady.

Jednotlivé aberace jsou rozděleny na vady rotačně souměrných čoček a rotačně souměrné vady vychylovacích polí. Geometrické vady čoček k_s (otvorová), k_L (koma), k_F

(zklenutí pole), k_A (astigmatismus) a k_D (zkreslení) jsou definovány následujícím vztahem (viz obrázek dole):

$$\Delta w = k_s \alpha^2 \bar{\alpha} + k_L \alpha \bar{\alpha} \beta + \frac{\bar{k}_L}{2} \alpha^2 \bar{\beta} + k_F \alpha \beta \bar{\beta} + k_A \bar{\alpha} \beta^2 + k_D \beta^2 \bar{\beta} \quad . \quad (5.2)$$

Zobrazení vady elektrostatické elektronové čočky pro $x = y = 0,1 \text{ mm}$; vliv jednotlivých vad je zobrazen odděleně pro každou vadu a v součtu s jinými vadami pro 10 hodnot úhlu α , které rostou s konstantním krokem.

Pro rotačně invariantní vychylovací pole, tj. pro soustavu kde dipólové vychylovací pole ve směru y je totéž jako ve směru x , a kde vychylovací pole neobsahuje hexapólovou složku, je struktura aberačních koeficientů obdobná struktuře koeficientů mimoosových vad čočky

$$\begin{aligned} \Delta w = & K_L^m \alpha \bar{\alpha} \gamma + \frac{\bar{K}_L^m}{2} \alpha^2 \bar{\gamma} + K_F^m \alpha \gamma \bar{\gamma} + K_A^m \bar{\alpha} \gamma^2 + K_D^m \gamma^2 \bar{\gamma} + \\ & + K_L^e \alpha \bar{\alpha} \delta + \frac{\bar{K}_L^e}{2} \alpha^2 \bar{\delta} + K_F^e \alpha \delta \bar{\delta} + K_A^e \bar{\alpha} \delta^2 + K_D^e \delta^2 \bar{\delta} + \\ & + S_F \alpha \bar{\gamma} \delta + \bar{S}_F \alpha \gamma \bar{\delta} + S_A \bar{\alpha} \gamma \delta + \\ & + S_{D1} \bar{\gamma} \delta^2 + S_{D2} \gamma \delta \bar{\delta} + S_{D3} \gamma \bar{\gamma} \delta + S_{D4} \gamma^2 \bar{\delta} \quad , \end{aligned} \quad (5.3)$$

kde koeficienty K^m jsou vady magnetického vychýlení, K^e vady elektrostatického vychýlení a S jsou vady kombinace magnetického a elektrostatického vychýlení. Také zde je K_L koma, K_F, S_F, \bar{S}_F je zklenutí pole, K_A, S_A astigmatismus a K_D, S_{Dn} zkreslení.

5.2 Chromatické vady.

Uvažujeme-li trajektorie částice s odchylkou $e \Delta \phi$ od nominální energie, přibude k rovnici s paraxiálními členy na pravé straně člen $P_c(z)$, který můžeme psát jako

$$P_c(z) = \frac{\Delta\phi}{\phi^*(z_i)} \left[\frac{\gamma\phi'}{2\phi^*} w' + \frac{\gamma\phi''}{4\phi^*} w + \frac{\gamma F_1}{2\phi^*} U_1 \right] - \frac{\Delta\phi}{\phi^*(z_i)} \left[ik \left(B w' + \frac{1}{2} B' w \right) + \frac{1}{2} k D_1 I_1 \right] . \quad (5.4)$$

Chromatické vady prvního řádu dané relativní energií šířkou $\Delta\phi/\phi^*$ jsou definovány jako

$$\Delta w = (k_x \alpha + k_T \beta + K_T^m \gamma + K_T^e \delta) \frac{\Delta\phi}{\phi^*} , \quad (5.5)$$

kde k_x je osová chromatická vada rotačně souměrné čočky, k_T je mimoosová vada čočky a K_T je chromatická vada vychýlení.

6. Kvantově mechanický popis.

S lagrangianem (1.2) máme pro zobecněný impuls a hamiltonián výrazy (1.3). Odstraněním odmocniny v hamiltoniánu a užitím relativisticky korigovaného potenciálu Φ^* z (1.6) dostáváme pro hamiltonián výraz

$$\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 = -q\Phi^* . \quad (6.1)$$

Potom obvyklá substituce

$$\vec{p} \rightarrow \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (6.2)$$

vede na Schrödingerovu rovnici

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi = -q\Phi^* \psi . \quad (6.3)$$

Velmi podstatným zjednodušením je skutečnost, že kvasiklasická aproximace je použitelná s velmi dobrou přesností pro celou optiku nabitých částic. Podle standardního postupu píšeme

$$\psi = F \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) \quad (6.4)$$

a pro F a S dostáváme rovnice

$$\frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S - q \vec{A})^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta F}{F} = -q \Phi^* \quad (6.5)$$

a

$$\vec{\nabla} \cdot \left[F^2 (\vec{\nabla} S - q \vec{A}) \right] = 0 \quad . \quad (6.6)$$

Použitelnost kvasiklasické aproximace závisí na tom, aby druhý člen na levé straně rovnice (6.5) byl malý, tuto podmínku můžeme zapsat jako

$$\left| \frac{\Delta F}{F} \right| \ll \frac{2m - q \Phi^*}{\hbar^2} \quad . \quad (6.7)$$

Platí-li tedy (6.7), redukuje se rovnice (6.5) na Hamiltonovu-Jacobiho rovnici

$$\frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S - q \vec{A})^2 = -q \Phi^* \quad (6.8)$$

a rovnice (6.6) je rovnicí kontinuity. Amplituda vlnové funkce F může být spočítána jako časově nezávislá analogie k Van Vleckovu determinantu. Pro optiku nabitých částic je vhodnou formou amplitudy řešení rovnice (6.6) tvaru

$$F(x, y, z, c_1, c_2) = \frac{f\left(\frac{\partial S}{\partial c_1}, \frac{\partial S}{\partial c_2}\right)}{p_z^{1/2}} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial c_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial c_2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial c_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial c_2} \end{array} \right|^{1/2}, \quad (6.9)$$

kde p_z je

$$p_z = \left[-2mq\Phi^* - \left(\frac{\partial S}{\partial x} - qA_x \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qA_y \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.10)$$

a c_1 a c_2 jsou libovolné dvě ze tří nezávislých konstant v řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice (6.8), f je libovolná reálná funkce dvou proměnných. Důkaz není obtížný, po dosazení (6.9) do (6.6) využijeme dvou identit, které dostaneme derivováním (6.8) podle c_1 a c_2 a zjistíme, že f je řešením takto vzniklé rovnice.

Při volbě $c_1 = x_0$ a $c_2 = y_0$ a vhodného tvaru funkce f máme

$$F(\vec{r}, \vec{r}_0) = -i \frac{(-2mq\Phi_0^*)^{1/2}}{2\pi\hbar(p_z p_{z_0})^{1/2}} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0} & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x_0} & \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial y_0} \end{array} \right|^{1/2} . \quad (6.11)$$

kde

$$p_{z_0} = \left[-2mq\Phi_0^* - \left(-\frac{\partial S}{\partial x_0} - qA_{x_0} \right)^2 - \left(-\frac{\partial S}{\partial y_0} - qA_{y_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.12)$$

a platí

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} F(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{(-2mq\Phi_0^*)^{1/2}}{2\pi\hbar} \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} . \quad (6.13)$$

Je tedy vlnová funkce (6.4) s amplitudou (6.11) dobrou aproximací Greenovy funkce rovnice (6.3).

Podmínku (6.7) můžeme v paraxiální aproximaci pro rotačně souměrné elektrické pole (dané rozložením potenciálu na ose $\Phi(z)$) a rotačně souměrné magnetické pole (dané rozložením indukce na ose $B(z)$) zapsat jako

$$\frac{\eta^2 B^2}{4\Phi^*} + \frac{\gamma^2 + 2\Phi'^2}{16\Phi^{*2}} \ll -\frac{2mq\Phi^*}{\hbar^2} , \quad (6.14)$$

což je v optice nabitých částic vždy splněno, neboť na levé straně máme veličiny vyjadřující hustotu optické mohutnosti čočky, na pravé straně čtverec vlnového čísla.

V paraxiální aproximaci (pro rotačně souměrné elektrické a magnetické pole) je amplituda vlnové funkce (6.11) dána vztahem

$$F(\vec{r}, \vec{r}_0) = -i \frac{(-2mq\phi^*(z_0))^{1/2}}{2\pi\hbar r_a(z)} \left(\frac{\phi^*(z_0)}{\phi^*(z)} \right)^{1/4} \quad (6.15)$$

a fáze vlnové funkce je

$$S(\vec{r}, \vec{r}_0) = \int_{z_0}^z \phi^{*1/2}(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \phi^{*1/2}(z) \frac{r_a'(z)}{r_a(z)} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \phi^{*1/2}(z_0) \frac{r_b(z)}{r_a(z)} (x_0^2 + y_0^2) - \phi^{*1/2}(z_0) \frac{1}{r_a(z)} [\cos\theta(z)(x x_0 + y y_0) + \sin\theta(z)(y x_0 - x y_0)] \quad (6.16)$$

kde $r_a(z)$ a $r_b(z)$ jsou dvě nezávislá řešení paraxiální rovnice trajektorie a $\theta(z)$ je úhel rotace paraxiální trajektorie. Poznamenejme ještě, že singularity determinantu ve (6.9) určují kaustické plochy.

Přidání spinové interakce pak vede k Pauliho rovnici

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi - \frac{q\hbar}{m} \vec{B} \cdot \hat{S} \psi = -q\Phi^* \psi \quad (6.17)$$

kde ψ je ovšem nyní dvoukomponentový spinor.

Označíme-li $\vec{p} = \vec{\nabla} S + |q|\vec{A}$, můžeme zbývající rovnice pro komponenty spinoru zapsat jako

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} f_1 - \frac{iq}{2} B_z f_1 - \frac{iq}{2} (B_x - iB_y) f_2 &= 0 \quad , \\ \vec{p} \cdot \vec{\nabla} f_1 + \frac{iq}{2} B_z f_1 - \frac{iq}{2} (B_x + iB_y) f_2 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Rovnice pro spinovou orientaci (6.18) můžeme řešit dvojím způsobem. Budeme psát

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{dt} \quad (6.19)$$

Potom substituce

$$f_1 = g_1 \exp\left(\frac{iq}{2m} \int B_z dt\right) , \quad f_2 = g_2 \exp\left(-\frac{iq}{2m} \int B_z dt\right) \quad (6.20)$$

vede na jednoduchou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d g_1}{d t} + i G^* g_2 = 0 , \quad \frac{d g_2}{d t} + i G g_1 = 0 , \\ G = -\frac{q}{2m} (B_x + i B_y) \exp\left(\frac{iq}{m} \int B_z dt\right) . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Jiný způsob spočívá v zavedení jednotkového vektoru spinové orientace

$$S_i = \begin{pmatrix} f_1^* & f_2^* \end{pmatrix} \hat{\sigma}_i \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} , \quad (6.22)$$

kde $\hat{\sigma}_i$ jsou Pauliho matice. Vhodnou kombinací rovnic (6.18) a rovnic komplexně sdružených dojdeme k tomu, že vektor spinové orientace se řídí rovnicí

$$\frac{d \vec{S}}{d t} = q \vec{v} \times \vec{B} . \quad (6.23)$$

Z rovnic (6.22) pak spočteme f_1 a f_2

$$\begin{aligned} 2|f_1||f_2| \cos(\arg f_2 - \arg f_1) = S_x , \\ 2|f_1||f_2| \sin(\arg f_2 - \arg f_1) = S_y , \\ |f_1|^2 - |f_2|^2 = S_z , \quad |f_1|^2 + |f_2|^2 = S = (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2)^{1/2} . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Literatura ke kapitole 5.

M. Born and E. Wolf, Principles of Optics. Pergamon Press, London 1975. Kap.3 a 4, 109-202.

P. W. Hawkes and E. Kasper, Principles of Electron Optics. Academic Press, London 1989. Vol. I, část I, 17-58.

L. D. Landau i E. M. Lifšic, Teorija polja. Nauka, Moskva 1973. Kap. III , 64-90.

L. D. Landau i E. M. Lifšic, Mechanika. Nauka, Moskva 1973. Kap. VII , 165-207.

M. Lenc, Immersion objective lenses in electron optics. PhD Thesis TU Delft, Delft 1992.

Kap.1 a 2, 1-21.

W. Pauli, Die allgemeine Prinzipien der Wellenmechanik, Handbuch der Physik V/1 (Her. S. Flügge). Spriger-Verlag, Berlin 1958. Kap.12, 87-98.

P. A. Sturrock, Static and Dynamic Electron Optics. Cambridge University Press, Cambridge 1955. Kap.1 a 2, 1-60.

7. Kružnice jako centrální trajektorie.

7.1 Obecná rovnice trajektorie.

Nejčastěji používaný hmotnostní analyzátor je založen na pohybu nabitě částice v homogenním magnetickém poli, případně sektoru tohoto pole, a poskytuje astigmatické zobrazení analyzovaného svazku ze vstupní na výstupní štěrbinu. Centrální trajektorie částice o hmotnosti m s nábojem q v homogenním magnetickém poli o indukci B je kružnice o cyklotronovém poloměru (v nerelativistickém přiblížení) $R = mv/|qB|$, kde v je velikost rychlosti částice v rovině kolmé k magnetickému poli. Kružnice je centrální trajektorie i v elektrostatickém válcovém nebo kulovém analyzátoru, kde platí, že odstředivá síla působící na částici je rovna dostředivé síle elektrostatického pole, tedy $mv^2/R = |qE|$. Pro svazek částic v blízkosti této centrální trajektorie dochází k fokusaci svazku.

Ve válcových souřadnicích ρ, φ, z bude mít kružnice centrální trajektorie rovnici $\rho = R, z = 0$. Pole s uvažovanou symetrií

$$\vec{E} = E_\rho(\rho, z)\vec{e}_\rho + E_z(\rho, z)\vec{e}_z, \quad \vec{B} = B_\rho(\rho, z)\vec{e}_\rho + B_z(\rho, z)\vec{e}_z \quad (7.1)$$

můžeme získat z potenciálů $\Phi(\rho, z)$ a $\Psi(\rho, z)$. Za předpokladu, že pohyb částice nemění orientaci, můžeme derivaci podle času v pohybových rovnicích nahradit derivací podle souřadnice na oblouku kružnice $s = R\varphi$ (tuto derivaci budeme značit čárkou). Ve vztahu (1.5) a (1.6) zvolíme tedy

$$\tau = s \equiv R\varphi \quad , \quad \vec{t} = \rho' \vec{e}_\rho + \frac{\rho}{R} \vec{e}_\varphi + z' \vec{e}_z \quad . \quad (7.2)$$

Po úpravách získáme z obecné rovnice (1.9) rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\rho'}{\left(\frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \right] &= \left(\frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\rho}{R^2 \left(\frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \\ &- \frac{1 + 2\varepsilon\Phi(\rho, z)}{2(\Phi^*(\rho, z)\Phi_0^*)^{1/2}} \left(\frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2} E_\rho(\rho, z) - \eta \frac{\rho}{R} B_z(\rho, z) \quad , \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{z'}{\left(\frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \right] &= \\ &- \frac{1 + 2\varepsilon\Phi(\rho, z)}{2(\Phi^*(\rho, z)\Phi_0^*)^{1/2}} \left(\frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2} E_z(\rho, z) + \eta \frac{\rho}{R} B_\rho(\rho, z) \end{aligned} \quad (7.4)$$

a konečně

$$\frac{d}{ds} \left[\left(\frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\left(\frac{\rho}{R} \right)^2}{\left(\left(\frac{\rho}{R} \right)^2 + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \right] = \eta \frac{\rho}{R} (\rho' B_z(\rho, z) - z' B_\rho(\rho, z)) \quad . \quad (7.5)$$

Pomocí vektorového potenciálu

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial A_\varphi(\rho, z)}{\partial z} \quad , \quad B_z(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi(\rho, z))}{\partial \rho} \quad (7.6)$$

můžeme vztah (7.5) napsat jako

$$\frac{d}{ds} \left[\left(\frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\left(\frac{\rho}{R} \right)^2}{\left(\left(\frac{\rho}{R} \right)^2 + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} - \eta \frac{\rho}{R} A_\varphi(\rho, z) \right] = 0 \quad . \quad (7.7)$$

7.2 Rovnice paraxiální trajektorie

Podobně jako v případě systémů s přímou osou můžeme i zde v rovnicích (7.3) a (7.4) s využitím (7.5) oddělit paraxiální členy pro trajektorie, jejichž vzdálenosti od centrální trajektorie a úhly s touto trajektorií jsou malé. Při popisu trajektorií v urychlovačích je zvykem zavádět souřadnice $x \equiv \rho - R$, $s \equiv R\varphi$ a $y \equiv z$. Rozvoje potenciálů a polí v okolí centrální trajektorie jsou pak

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi - E x - \frac{1}{2} E_2 x^2 + \frac{1}{2} \left(E_2 + \frac{E}{R} \right) y^2 \quad , \quad \Psi = -B y - B_2 x y \\ E_y &= -\left(E_2 + \frac{E}{R} \right) y \quad , \quad E_x = E + E_2 x \quad , \quad B_y = B + B_2 x \quad , \quad B_x = B_2 y \quad , \end{aligned} \quad (7.8)$$

kde ϕ (určuje energii), E a E_2 určují intenzitu homogenní a kvadrupólové složky elektrického pole a B a B_2 indukci homogenní a kvadrupólové složky magnetického pole v blízkosti centrální trajektorie. V obecném případě, který zde neuvádíme, je pole také popsáno výrazy podobnými (7.8), ale místo konstant tam vystupují funkce parametru s .

Paraxiální rovnice získané ze vztahů (7.3) až (7.8) jsou

$$x'' + \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\gamma E}{2\phi^*} + \eta B \right) + \eta B_2 + \gamma \frac{R E_2 + E}{2R\phi^*} + \left(\frac{E}{2\phi^*} \right)^2 \right] x = \frac{1}{R} - \frac{\gamma E}{2\phi^*} - \eta B \quad , \quad (7.9)$$

$$y'' - \left(\eta B_2 + \gamma \frac{R E_2 + E}{2R\phi^*} \right) y = 0 \quad . \quad (7.10)$$

Připomeňme si zde značení

$$\phi^* = \phi(1 + \varepsilon\phi) \quad , \quad \gamma = 1 + 2\varepsilon\phi \quad , \quad \eta = \left(\frac{-q}{2m\phi^*} \right)^{1/2} \quad , \quad \varepsilon = \frac{-q}{2mc^2} \quad . \quad (7.11)$$

Podmínkou pro to, aby také centrální trajektorie (tj. kružnice o poloměru R daná jako $x(s) = y(s) = 0$) byla řešením paraxiální rovnice, je (srovnejme s (4.19) pro soustavu s příomou osou)

$$\frac{1}{R} - \frac{(1 + 2\varepsilon(\phi - \Delta\phi))E}{2(\phi^* - \Delta\phi^*)} - \left(\frac{-q}{2m(\phi^* - \Delta\phi^*)} \right)^{1/2} B = 0 \quad . \quad (7.12)$$

V paraxiální aproximaci je pak

$$\frac{1}{R} - \frac{\gamma E}{2\phi^*} - \eta B = 0 \quad . \quad (7.13)$$

Uvědomíme-li si, že energii $-q\phi$ máme podle (1.3) definovanu jako kinetickou energii částice, můžeme dále psát

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{(p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}}{m c^2} = \frac{p}{m v} \quad , \quad (7.14)$$

$$-q\phi^* = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad \eta = \frac{|q|}{p} \quad .$$

Podmínku (7.13) tak můžeme zapsat do tvaru, který známe z elementárních úvah o pohybu nabitě částice v homogenním magnetickém poli nebo v osově symetrickém elektrostatickém poli

$$\frac{p^v}{R} = |q|E + |q|vB \quad . \quad (7.15)$$

Paraxiální rovnici pak můžeme zjednodušit na tvar

$$x'' + \left[\frac{1}{R^2} + \eta B_2 + \gamma \frac{RE_2 + E}{2R\phi^*} + \left(\frac{E}{2\phi^*} \right)^2 \right] x = - \left[\frac{E}{4\phi^*} + \frac{\gamma}{2R} \right] \frac{\Delta\phi}{\phi^*} + \left[\frac{E}{4\phi^*} - \frac{1}{2R} \right] \frac{\phi}{\phi^*} \frac{\Delta m}{m} \quad (7.16)$$

a

$$y'' - \left(\eta B_2 + \gamma \frac{RE_2 + E}{2R\phi^*} \right) y = 0 \quad . \quad (7.17)$$

7.3 Zobrazení sektorovým polem.

Velmi často studovanými příklady jsou sektorová pole. Pro případ homogenního magnetického pole v sektoru je $B = const.$ a $B_2 = E = E_2 = 0$. Pro elektrostatický válcový analyzátor je $B = B_2 = 0$, $E = const.$ a $E_2 = -E/R$. V rovině y - z nedochází k fokusaci a v rovině x - z můžeme v nerelativistické aproximaci psát (obecná rovnice je (7.22)) pro magnetické sektorové pole

$$x'' + \frac{1}{R^2} x = -\frac{1}{2R} \left(\frac{\Delta\phi}{\phi} + \frac{\Delta m}{m} \right) \quad (7.18)$$

a

$$x'' + \frac{2}{R^2} x = -\frac{1}{R} \frac{\Delta\phi}{\phi} \quad (7.19)$$

pro elektrostatické pole. Neuvažujeme-li disperzi, můžeme pak snadno napsat přenosovou matici mezi vstupem ($\phi = 0$) a výstupem analyzátoru ($\beta^2 = 1$ pro magnetický analyzátor a $\beta^2 = 2$ pro elektrostatický analyzátor)

$$T(R\varphi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \beta \varphi & \frac{R}{\beta} \sin \beta \varphi \\ -\frac{\beta}{R} \sin \beta \varphi & \cos \beta \varphi \end{bmatrix} . \quad (7.20)$$

Platí-li pro úhel $\beta \varphi = \pi$, dostaneme zobrazení se zvětšením $M = -1$, tedy pro magnetické pole $\varphi = 180^\circ$, pro elektrostatický válcový analyzátor $\varphi = \pi / \sqrt{2} = 127,3^\circ$. Máme-li sektor s daným úhlem φ , pak z přenosové matice (7.20) dostaneme porovnáním s obecným vztahem polohy hlavních rovin, ohnisková délka sektoru je $f = R / (\beta \sin(\beta \varphi))$.

Často se uvádí příklad magnetické soustavy s kruhovou trajektorií a gradientním polem $B_y = B_0 (R / (R + x))^n$, které získáme náklonem pólových nástavců magnetu. V našem značení je pak $E = E_2 = 0$, $B = B_0$ a $B_2 = -n B_0 / R$. Rovnice trajektorie jsou

$$x'' + \frac{1-n}{R^2} x = 0 \quad , \quad y'' + \frac{n}{R^2} y = 0 \quad . \quad (7.21)$$

Pro $n=1/2$ jsou obě rovnice stejné a magnet přenáší svazek nabitých částic stigmaticky podobně jako rotačně souměrná čočka. Podobně lze ukázat, že v elektrostatice můžeme stigmatické zobrazení dosáhnout pro sférický elektrostatický analyzátor, kde $B = B_2 = 0$ a $E = 2\phi^* / R$, $E_2 = -4\phi^* / R^2$.

7.4 Disperze a chromatická vada

Ne všechny částice mají stejnou energii a hmotnost. Uvažujme, jak se liší rovnice paraxiální trajektorie částice s nominální energií a hmotností a částice, jejíž energie se liší o malou (konstantní) hodnotu $\Delta \phi$ a hmotnost o malou hodnotu Δm . Pro větší přehlednost uvažujme případ, kdy je potenciál na centrální trajektorii konstantní, $E + R E_2 = B_2 = 0$ a pohyb

se děje pouze v rovině $y=0$. Pro odchylku skutečné paraxiální trajektorie od trajektorie s nominálními hodnotami dostáváme $\Delta x \equiv x(\phi, m) - x(\phi - \Delta\phi, m - \Delta m)$ rovnicí

$$\Delta x'' + \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\gamma R_E)^2} \right) \Delta x = - \left(\frac{1}{\gamma R_E} + \frac{\gamma}{R} \right) \frac{\Delta\phi}{2\phi^*} + \left(\frac{1}{\gamma R_E} - \frac{1}{R} \right) \frac{\phi}{2\phi^*} \frac{\Delta m}{m} - \left[\frac{\gamma}{2R^2} + \frac{1}{2\gamma R_E R} + \frac{2}{\gamma R_E^2} \right] \frac{\Delta\phi}{\phi^*} x . \quad (7.22)$$

Označili jsme

$$\frac{1}{R_E} = \frac{\gamma E}{2\phi^*} = \frac{|q|E}{p v} , \quad \frac{1}{R_B} = \eta B = \frac{|q|B}{p} . \quad (7.23)$$

Veličiny R_E a R_B mohou nabývat i záporných hodnot, vždy však musí pro skutečný poloměr R platit $1/R_E + 1/R_B > 0$. První dva členy na pravé straně rovnice (47) popisují energiovou a hmotnostní disperzi, poslední člen pak chromatickou vadu. V dalším budeme uvažovat pouze disperzi hmotového spektrometru. Uveďme dva zajímavé případy:

(a) Čistě magnetický nebo čistě elektrostatický spektrometr. Řešeními homogenní rovnice jsou v prvním případě

$$x_a = R_B \sin\left(\frac{s}{R_B}\right) , \quad x_b = \cos\left(\frac{s}{R_B}\right) \quad (7.24)$$

a s jejich pomocí najdeme partikulární řešení rovnice s disperzními členy

$$\Delta x_B = -\frac{R_B}{2} \left(\frac{\gamma \Delta\phi}{\phi^*} + \frac{\phi}{\phi^*} \frac{\Delta m}{m} \right) \left(1 - \cos\left(\frac{s}{R_B}\right) \right) . \quad (7.25)$$

Stejná relativní disperze energií a hmotností se projevuje v nerelativistickém případě stejnou velikostí odchylky trajektorie. U elektrostatického spektrometru je

$$x_a = \frac{\gamma R_E}{(1 + \gamma^2)^{1/2}} \sin\left(\frac{(1 + \gamma^2)^{1/2} s}{\gamma R_E}\right) , \quad x_b = \cos\left(\frac{(1 + \gamma^2)^{1/2} s}{\gamma R_E}\right) \quad (7.26)$$

a pro Δx_E dostaneme výraz

$$\Delta x_E = -\frac{R_E}{2} \left(\frac{\gamma \Delta \phi}{\phi^*} + \frac{\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma^2} \frac{\phi}{\phi^*} \frac{\Delta m}{m} \right) \left(1 - \cos \left(\frac{(1+\gamma^2)^{1/2} s}{\gamma R_E} \right) \right). \quad (7.27)$$

Energiová disperze je tedy v nerelativistickém případě stejná jako u magnetického spektrometru, ale hmotnostní disperze je nulová.

(b) Kombinované magnetické a elektrostatické pole ($\gamma^2 R_E = -(1+\gamma^2) R_B$). Řešení homogenní rovnice jsou

$$x_a = \frac{R}{(1+\gamma^2)^{1/2}} \sin \left(\frac{(1+\gamma^2)^{1/2} s}{R} \right), \quad x_b = \cos \left(\frac{(1+\gamma^2)^{1/2} s}{R} \right) \quad (7.28)$$

Disperzní člen pro energii vymizel a partikulární řešení rovnice je nyní

$$\Delta x = -\frac{R}{1+\gamma^2} \frac{\Delta m}{m} \left(1 - \cos \left(\frac{(1+\gamma^2)^{1/2} s}{R} \right) \right). \quad (7.29)$$

To je tedy podstatný rozdíl proti spektrometru tvořenému jen jedním typem pole. V praxi není velmi výhodné umístit elektrostatický válcový analyzátor do úzké mezery magnetického spektrometru, stejné závěry ale platí i pro případ, když obě pole zařadíme za sebou nezávisle na pořadí obou polí.

8. Pohybová rovnice částice v magnetickém poli ve válcových souřadnicích

Pohybová rovnice je jako obvykle

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.1)$$

Pro Lorentzovu sílu máme

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{s} \\ v_x & v_y & v_s \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = -v_s B_y \hat{x} + v_s B_x \hat{y} + (v_x B_y - v_y B_x) \hat{s} \quad . \quad (8.2)$$

V pohybu v čistě magnetickém poli se velikost rychlosti nemění, a můžeme tedy psát

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad . \quad (8.3)$$

Máme

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{x} + (R+x)\dot{\hat{x}} + \dot{y}\hat{y} = \dot{x}\hat{x} + (R+x)\dot{\theta}\hat{s} + \dot{y}\hat{y} \quad , \quad (8.4)$$

kde jsme užili vztahu

$$\dot{\hat{x}} = \dot{\theta}\hat{s} \quad , \quad \dot{\theta} = v_s(R+x) \quad . \quad (8.5)$$

Dalším derivováním dojdeme k výrazu pro zrychlení

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x} + (2\dot{x}\dot{\theta} + (R+x)\ddot{\theta})\hat{s} + (R+x)\dot{\theta}\dot{\hat{s}} + \ddot{y}\hat{y} \quad (8.6)$$

a s využitím vztahu

$$\dot{\hat{s}} = -\dot{\theta}\hat{x} \quad (8.7)$$

pak konečně

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{x} - (R+x)\dot{\theta}^2)\hat{x} + (2\dot{x}\dot{\theta} + (R+x)\ddot{\theta})\hat{s} + \ddot{y}\hat{y} \quad . \quad (8.8)$$

9. Hamiltonián pro malé příčné oscilace.

Hamiltonián je

$$H = c \sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 + m^2 c^2} + q\Phi \quad , \quad (9.1)$$

kde \vec{p} je kanonický impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m \vec{v} + q \vec{A} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \quad (9.2)$$

Elektrické a magnetické pole je dáno zobecněním vztahů (1.1)

$$\vec{E} = -\left(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \quad (9.3)$$

„S kanónem na vrabce“ provedeme záměnu souřadnic

$$\vec{r} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k} \quad , \quad \vec{\mathfrak{R}} = (R+x)\hat{x} + y \hat{y} \quad . \quad (9.4)$$

Platí

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial s} = \frac{1}{R} \hat{s} \quad , \quad \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} = -\frac{1}{R} \hat{x} \quad , \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial s} = 0 \quad , \quad (9.5)$$

neboť

$$\hat{x} = \cos \frac{s}{R} \vec{i} + \sin \frac{s}{R} \vec{j} \quad , \quad \hat{s} = -\sin \frac{s}{R} \vec{i} + \cos \frac{s}{R} \vec{j} \quad , \quad \hat{y} = \vec{k} \quad . \quad (9.6)$$

Kanonická transformace

$$\vec{p} \frac{d}{dt} \vec{r} - H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{\mathfrak{P}} \frac{d}{dt} \vec{\mathfrak{R}} - K(\vec{\mathfrak{R}}, \vec{\mathfrak{P}}) + \frac{d}{dt} (F_3(\vec{p}, \vec{\mathfrak{R}}) + \vec{p} \vec{r}) \quad (9.7)$$

vede ke vztahům

$$\vec{r} = -\frac{\partial F_3}{\partial \vec{p}} \quad , \quad \vec{\mathfrak{P}} = -\frac{\partial F_3}{\partial \vec{\mathfrak{R}}} \quad , \quad K = H \quad . \quad (9.8)$$

Nyní zvolíme jako vytvořující funkci $F_3 = -\vec{p} \vec{\mathfrak{R}}$ a máme tak

$$\mathfrak{P}_x = -\frac{\partial F_3}{\partial x} = \vec{p} \hat{x} \quad , \quad \mathfrak{P}_y = -\frac{\partial F_3}{\partial y} = \vec{p} \hat{y} \quad , \quad \mathfrak{P}_s = -\frac{\partial F_3}{\partial s} = \vec{p} \hat{s} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \quad . \quad (9.9)$$

Nový hamiltonián bude (píšeme H místo K)

$$H = c \left[(\mathfrak{P}_x - q A_x)^2 + (\mathfrak{P}_y - q A_y)^2 + \left(\frac{\mathfrak{P}_s}{1+x/R} - q A_s \right)^2 + m^2 c^2 \right]^{1/2} + q \Phi \quad . \quad (9.10)$$

Transformací $x(t), y(t), s(t) \rightarrow x(s), y(s), t(s)$

$$\left[\frac{dx}{dt} \mathfrak{P}_x + \frac{dy}{dt} \mathfrak{P}_y + \frac{ds}{dt} \mathfrak{P}_s - H \right] dt = \left[\frac{dx}{ds} \mathfrak{P}_x + \frac{dy}{ds} \mathfrak{P}_y - \frac{dt}{ds} H - (-\mathfrak{P}_s) \right] ds \quad (9.11)$$

přejdeme k novým Hamiltonovým rovnicím (opět zachováme značení H i pro nový hamiltonián, který je v původním značení roven $-\mathfrak{P}_s$)

$$H = -\left(1 + \frac{x}{R}\right) \left[\left[\left(\frac{K - q\Phi}{c} \right)^2 - m^2 c^2 - (\mathfrak{P}_x - qA_x)^2 - (\mathfrak{P}_y - qA_y)^2 \right]^{1/2} + qA_s \right], \quad (9.12)$$

zatímco původní hamiltonián jsme označili K

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{P}_x}, & \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{P}_y}, & \frac{dt}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial K}, \\ \frac{d\mathfrak{P}_x}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\mathfrak{P}_y}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{dK}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Nyní si ukážeme jednoduchý příklad. Předpokládáme

$$K - q\Phi = (p^2 + m^2 c^2)^{1/2} c = \text{const}, \quad \vec{B} = B_x(x, y) \hat{x} + B_y(x, y) \hat{y}. \quad (9.14)$$

Potom je magnetické pole popsáno jedinou složkou vektorového potenciálu A_s . Máme tedy

$$H = -\left(1 + \frac{x}{R}\right) \left[[p^2 - \mathfrak{P}_x^2 - \mathfrak{P}_y^2]^{1/2} + qA_s \right]. \quad (9.15)$$

Laméovy koeficienty získáme z vyjádření tečného vektoru

$$\frac{d\vec{\mathfrak{R}}}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} \hat{x} - \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{ds}{d\tau} \hat{s} + \frac{dy}{d\tau} \hat{y}. \quad (9.16)$$

Z Maxwellových rovnic máme pro A_s jedinou rovnici

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1+x/R} \frac{\partial [(1+x/R)A_s(x, y)]}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 A_s(x, y)}{\partial y^2} \right] \hat{s} = 0. \quad (9.17)$$

Je pak možné vyjádřit pole kolem centrální trajektorie pomocí Taylorova rozvoje

v proměnných x a y . Vhodné exaktní řešení rovnice (9.17) je

$$A_s(x, y) = \frac{R}{8}(4B_0 - RB_2) + \frac{x}{8}(4B_0 + RB_2) + \frac{3x^2 - y^2}{8}B_2 + \frac{x^3 - 4xy^2}{8R}B_2, \quad (9.18)$$

$$B_x = B_2 y + \frac{B_2}{R}xy, \quad B_y = B_0 + B_2 x + \frac{B_2}{2R}(x^2 - y^2).$$

V paraxiální aproximaci bude

$$H = \frac{1}{2p}(\mathfrak{P}_x^2 + \mathfrak{P}_y^2) + \frac{p}{2R^2}x^2 - \frac{qB_2}{2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}. \quad (9.19)$$

Položili jsme přirozeně $B_0 = p/qR$. Rovnice paraxiální trajektorie pak jsou

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{1}{R^2} - \frac{qB_2}{p} \right) x = \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}, \quad (9.20)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{qB_2}{p} y = 0.$$

10. Vychylovací magnety.

Pohybové rovnice ve válcových souřadnicích odvodíme z variačního principu

$$n(\vec{r}, \vec{t}) = (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} - \eta A(\rho, z) \cdot \rho \dot{\theta}, \quad \eta = \left(\frac{-q}{2m\Phi_0^*} \right)^{1/2}, \quad (10.1)$$

tedy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}} \right) = \frac{\rho \dot{\theta}^2}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}} - \eta \dot{\theta} \frac{\partial \rho A}{\partial \rho},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}} - \eta \rho A \right) = 0, \quad (10.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{z}}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}} \right) = -\eta \rho \dot{\theta} \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Podle (1.4) je $v = (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} = \text{const}$. Se značením $\eta v = |q|/(\gamma m)$ přepíšeme (10.2) na

$$\begin{aligned}
\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 &= -\frac{|q|}{m} \frac{1}{\gamma} \dot{\theta} \frac{\partial \rho A}{\partial \rho} , \\
\frac{d}{dt} \left(\rho^2 \dot{\theta} - \frac{|q|}{m} \frac{1}{\gamma} \rho A \right) &= 0 , \\
\ddot{z} &= -\frac{|q|}{m} \frac{1}{\gamma} \rho \dot{\theta} \frac{\partial A}{\partial z} .
\end{aligned} \tag{10.3}$$

Rovnice pole

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial \rho} , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho B_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{10.4}$$

dávají pro vektorový potenciál

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A}{\partial \rho} , \quad B_\rho = -\frac{\partial A}{\partial z} \tag{10.5}$$

rovnici

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{\rho^2} = 0 . \tag{10.6}$$

Při řešení (10.6) vycházíme z rozvoje potenciálu kolem roviny symetrie magnetického pole

$$\begin{aligned}
A(\rho, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\rho) z^{2m} , \\
f_m'' + \frac{1}{\rho} f_m' - \frac{1}{\rho^2} f_m + 2(m+1)(2m+1) f_{m+1} &= 0 .
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Často uvažované řešení začíná jako

$$f_0 = \frac{1}{2-n} \frac{B_0 R^n}{\rho^{n-1}} , \quad f_1 = \frac{n B_0 R^n}{2} \frac{1}{\rho^{n+1}} , \quad \dots \tag{10.8}$$

Exaktní polynomiální řešení rovnice (10.6) se zrcadlovou symetrií v rovině $y=0$ jsou podle rovnice (10.7)

$$A_1 = \rho , \quad A_3 = \rho^3 - 4 \rho z^2 , \quad A_5 = \rho^5 - 12 \rho^3 z^2 + 8 \rho z^4 , \quad \dots \tag{10.9}$$

Prostřední rovnice (10.3) se dá integrovat jako

$$\rho^2 \dot{\theta} - \frac{|q|}{m} \rho A(\rho, z) = const . \tag{10.10}$$

Na centrální trajektorii dané vztahy $\rho = R, z = 0$ je

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \omega = \frac{|q|B_0}{m\gamma}, \quad R = \frac{p}{|q|B_0}. \quad (10.11)$$

11. Silná fokusace

Střídání kvadrupólů orientovaných jako spojky nebo rozptylky. Budeme používat maticového zápisu, tedy např. pro směr x máme

$$\begin{pmatrix} x/R \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/R \\ x' \end{pmatrix}_{in}. \quad (11.1)$$

Pohyb po oblouku kružnice délky L je vyjádřen maticí

$$T(L) = \begin{pmatrix} 1 & L/R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11.2)$$

působení kvadrupólu jako tenké spojky resp. tenké rozptylky maticí

$$T_+(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{R}{f} & 1 \end{pmatrix}, \quad T_-(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

Jeden periodicky se opakující element bude tak vyjádřen maticí

$$M = T_+(f)T(L)T_-(f)T(L) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{L}{f} & \frac{L(L+2f)}{fR} \\ -\frac{RL}{f^2} & 1 - \frac{L(L+f)}{f^2} \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

Vlastní hodnoty matice

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \\
\lambda^2 - 2 \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} M \right\} + \det \{ M \} &= 0 \Rightarrow \\
\lambda_1 &= \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} M \right\} + \left[\left(\operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} M \right\} \right)^2 - \det \{ M \} \right]^{1/2}, \\
\lambda_2 &= \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} M \right\} - \left[\left(\operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} M \right\} \right)^2 - \det \{ M \} \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{11.5}
\end{aligned}$$

V našem případě

$$\operatorname{Tr} \{ M \} = 2 - \left(\frac{L}{f} \right)^2, \quad \det \{ M \} = 1. \tag{11.6}$$

Důležité jsou vlastnosti kořenů

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Tr} \{ M \}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det \{ M \}. \tag{11.7}$$

Označme

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} M \right\} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{f} \right)^2 = \cos \mu, \\
\lambda_1 &= \exp \{ i \mu \}, \quad \lambda_2 = \exp \{ -i \mu \}.
\end{aligned} \tag{11.8}$$

12. Fázová stabilita

12.1 Synchrontronové oscilace

Ať τ je čas mezi průchodem dvěma následujícími stupni pro ideální částici. Je-li vzdálenost stupňů L a rychlost částice je v , máme $\tau = L/v$. Při odchylkách od ideální situace máme

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}. \tag{12.1}$$

Vyjádřeno pomocí impulsu

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad (12.2)$$

Je užitečné psát také relativní změnu délky úměrnou relativnímu rozdílu impulzů

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\gamma_t^2} \frac{\Delta p}{p} \quad . \quad (12.3)$$

Pro pohyb po přímce a pro pohyb v homogenním magnetickém poli ($L \sim p$)

$$\frac{1}{\gamma_t^2} \rightarrow 0 \quad , \quad \frac{1}{\gamma_t^2} = 1 \quad . \quad (12.4)$$

Zavedeme faktor sklouznutí

$$\eta = \frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \quad , \quad \frac{\Delta \tau}{\tau} = \eta \frac{\Delta p}{p} \quad . \quad (12.5)$$

Na vstupu $n+1$ stupně bude fáze rovna

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \omega(\tau + \Delta \tau)_{n+1} \quad , \quad (12.6)$$

nebo lépe, označíme-li čas vstupu do n -tého stupně jako T_n a definujeme $\phi_n = \psi_n - \omega T_n$

máme

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \omega \tau_{n+1} \left(\frac{\Delta \tau}{\tau} \right)_{n+1} \quad , \quad (12.7)$$

kde jsme využili vztahu $T_n + \tau_{n+1} = T_{n+1}$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že $\omega \tau_n$

nezávisí na n . Budeme tedy mít vztah

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta \omega \tau \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{n+1} \quad . \quad (12.8)$$

Energie ideální (synchronní částice) a energie obecné částice jsou

$$(E_s)_{n+1} = (E_s)_n + eV \sin \phi_s \quad , \quad E_{n+1} = E_n + eV \sin \phi_n \quad . \quad (12.9)$$

Pro odchylku energie tedy máme rovnici

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + eV (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad . \quad (12.10)$$

S využitím vztahu

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{c^2}{v^2} \frac{\Delta E}{E} \quad (12.11)$$

dostáváme konečně

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= \phi_n + \frac{\omega \tau \eta c^2}{v^2 E_s} \Delta E_{n+1} \quad , \\ \Delta E_{n+1} &= \Delta E_n + eV (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \quad . \end{aligned} \quad (12.12)$$

12.2 Diferenciální rovnice

Předchozí diferenční rovnice aproximujeme rovnicemi diferenciálními

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dn} &= \frac{\eta \omega \tau c^2}{v^2 E_s} \Delta E \quad , \\ \frac{d\Delta E}{dn} &= eV (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad . \end{aligned} \quad (12.13)$$

Derivováním přejdeme snadno k jediné diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{d^2 \phi}{dn^2} = \frac{\eta \omega \tau eV c^2}{v^2 E_s} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad . \quad (12.14)$$

První integrál rovnice dostaneme opět snadno jako

$$\int \frac{d^2 \phi}{dn^2} \frac{d\phi}{dn} dn = \frac{\eta \omega \tau eV c^2}{v^2 E_s} \int (\sin \phi - \sin \phi_s) \frac{d\phi}{dn} dn \quad , \quad (12.15)$$

odkud

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dn} \right)^2 + \frac{\eta \omega \tau eV c^2}{v^2 E_s} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = \text{const.} \quad (12.16)$$

Dosazením máme pro trajektorii ve fázovém prostoru

$$(\Delta E)^2 + \frac{2E_s eV v^2}{\eta \omega \tau c^2} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = \text{const.} \quad (12.17)$$

Pro malé odchylky fáze můžeme psát

$$\phi = \phi_s + \Delta \phi \quad , \quad \sin \phi - \sin \phi_s \approx \cos \phi_s \Delta \phi \quad (12.18)$$

a rovnice (12.14) přejde na

$$\frac{d^2 \Delta \phi}{d n^2} + (\tau \Omega_s)^2 \Delta \phi = 0 \quad , \quad (12.19)$$

kde jsme označili

$$\Omega_s = \left[-\frac{\eta \cos \phi_s eV \omega c^2}{\tau E_s v^2} \right]^{1/2} . \quad (12.20)$$

12.3 Adiabatický útlum

Pokud jsme mohli považovat synchronní energii a další veličiny za konstantní parametry, bylo to v pořádku. Teď si všimneme chování v delším časovém intervalu. Od rovnic

$$\frac{d E}{d n} = eV \sin \phi \quad , \quad \frac{d E_s}{d n} = eV \sin \phi_s \quad (12.21)$$

přejdeme pomocí vztahu

$$\frac{d}{d n} = \frac{d t}{d n} \frac{d}{d t} = \tau(E) \frac{d}{d t} \quad (12.22)$$

k rovnicím

$$\tau(E) \frac{d E}{d n} = eV \sin \phi \quad , \quad \tau(E_s) \frac{d E_s}{d n} = eV \sin \phi_s \quad (12.23)$$

Odečtení rovnic a Taylorův rozvoj

$$\tau(E) = \tau(E_s) + \left. \frac{d \tau}{d E} \right|_{E_s} (E - E_s) + \dots \doteq \tau(E_s) + \left. \frac{d \tau}{d E} \right|_{E_s} \Delta E \quad (12.24)$$

vedou k

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\phi}{dt} &= \lambda\Delta E \quad , \quad \frac{d(\tau\Delta E)}{dt} = \tau\mu\Delta\phi \quad , \\ \lambda &= \frac{\eta\omega c^2}{v^2 E_s} \quad , \quad \mu = \frac{eV \cos\phi_s}{\tau} \quad .\end{aligned}\tag{12.25}$$

Ekvivalentní rovnice druhého řádu jsou

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} - \frac{\tau}{\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{\tau} \right) \frac{d\Delta\phi}{dt} + \Omega_s^2 \Delta\phi &= 0 \quad , \\ \frac{d^2(\tau\Delta E)}{dt^2} - \frac{1}{\tau\mu} \frac{d}{dt} (\tau\mu) \frac{d(\tau\Delta E)}{dt} + \Omega_s^2 \tau\Delta E &= 0 \quad .\end{aligned}\tag{12.26}$$

V novém značení $\Omega_s^2 = -\lambda\mu$, je tedy buď $\lambda > 0, \mu < 0$ nebo $\lambda < 0, \mu > 0$. Hledejme

řešení (12.26) ve tvaru

$$\Delta\phi = A(t) \cos\left(\int \Omega_s dt\right) \quad , \quad \tau\Delta E = B(t) \cos\left(\int \Omega_s dt\right) \quad .\tag{12.27}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2 A}{dt^2} - \frac{\tau}{\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{\tau} \right) \frac{dA}{dt} \right] \cos\left(\int \Omega_s dt\right) - \\ \left[2\Omega_s \frac{dA}{dt} + A \frac{d\Omega_s}{dt} - \Omega_s \frac{\tau}{\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{\tau} \right) A \right] \sin\left(\int \Omega_s dt\right) &= 0 \quad , \\ \left[\frac{d^2 B}{dt^2} - \frac{1}{\tau\mu} \frac{d(\tau\mu)}{dt} \frac{dB}{dt} \right] \cos\left(\int \Omega_s dt\right) - \\ \left[2\Omega_s \frac{dB}{dt} + B \frac{d\Omega_s}{dt} - \Omega_s \frac{1}{\tau\mu} \frac{d(\tau\mu)}{dt} B \right] \sin\left(\int \Omega_s dt\right) &= 0 \quad .\end{aligned}\tag{12.28}$$

Přibližné řešení spočívá v zanedbání členů u kosinu, takže máme

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= a \left(\frac{|\lambda|}{\tau\Omega_s} \right)^{1/2} \cos\left(\int \Omega_s dt\right) \quad , \\ \Delta E &= b \left(\frac{|\mu|}{\tau\Omega_s} \right)^{1/2} \cos\left(\int \Omega_s dt\right) \quad .\end{aligned}\tag{12.29}$$

Vraťme se teď k rovnicím (12.25) a předpokládejme pro určitost, že $\lambda > 0$. S označením

$$\Delta\phi = q \quad , \quad \tau\Delta E = p \quad , \quad \frac{\tau}{\lambda} = m \quad , \quad -\mu\tau = m\omega^2\tag{12.30}$$

mají tyto rovnice tvar

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q, \quad (12.31)$$

tedy jsou to Hamiltonovy rovnice oscilátoru s Hamiltoniánem

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2. \quad (12.32)$$

13. Vlnově optický popis

13.1 Difrakční integrál.

Hledáme řešení Helmholtzovy rovnice

$$\Delta\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0 \quad (13.1)$$

se zadanou hodnotou v rovině $z = z_0$ pro poloprostor $z \geq z_0$. Greenova funkce je

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (13.2)$$

neboť pro $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ je (13.2) řešením (13.1) a při integraci po kouli se středem v \vec{r}

dostáváme

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} (-\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r \left(\frac{ik}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \exp\{ik\rho\} \rho^2 d\Omega = 4\pi, \quad (13.3)$$

takže můžeme psát Greenovu větu ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{z \geq z_0} (G\Delta\psi - \psi\Delta G) dx_0 dy_0 dz_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{z_0} \left(\psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dx_0 dy_0, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z_0}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Ve vztahu (13.4) jsme užili nikoliv vnější normálu (míří proti směru osy z), ale “normálu k vlnoploše” (ve směru osy z). Sommerfeld využil volnosti ve volbě Greenovy funkce:

$$G = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \left[\frac{\exp\{ik r_1\}}{r_1} - \frac{\exp\{ik r_2\}}{r_2} \right] ,$$

$$r_1 = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-\zeta)^2 \right]^{1/2} ,$$

$$r_2 = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+\zeta-2z_0)^2 \right]^{1/2} .$$
(13.5)

Máme tak

$$G(|\vec{r}-\vec{r}_0|) = 0 ,$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \left[\frac{\partial r_1}{\partial \zeta} \frac{d}{d r_1} \left(\frac{\exp\{ik r_1\}}{r_1} \right) - \frac{\partial r_2}{\partial \zeta} \frac{d}{d r_2} \left(\frac{\exp\{ik r_2\}}{r_2} \right) \right] ,$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow z_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \zeta} \right) =$$

$$-\lim_{\zeta \rightarrow z_0} \left(\frac{\partial r_2}{\partial \zeta} \right) = \frac{z_0 - z}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{1/2}} = -\cos(\vec{n}, \vec{r}-\vec{r}_0) ,$$
(13.6)

Výsledek je tedy

$$\psi(\vec{r}) = \frac{k}{2\pi i} \int_{z_0} \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \frac{\exp\{ikR\}}{R} \psi(\vec{r}_0) \cos(\vec{n}, \vec{R}) d x_0 d y_0 ,$$
(13.7)

kde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Toto je exaktní výsledek. Druhý člen v první závorce integrandu je vždy zanedbáván. V dalším si ukážeme odvození difrakčního integrálu z Huygensova principu (podle Landau a Lifšice).

13.2 Huygensův princip.

Mějme element vlnoplochy df . Příspěvek tohoto elementu k poli v nějakém bodě P bude úměrný

- amplitudě pole u na uvažovaném elementu elementu
- průmětu plochy elementu do normály ve směru paprsku, vedoucího k bodu P (paprsky, které budou přispívat nezávisí na tvaru plochy)
- přírůstku fáze a poklesu intensity

Celkem tedy máme

$$u(P) = a \int u \frac{\exp\{ikR\}}{R} d f_n \quad . \quad (13.8)$$

Konstantu a určíme například pro rovinnou vlnu postupující podél osy z . Potom pro bod $P(x,y,z)$ dostatečně vzdálený od roviny $(\xi,\eta,0)$ máme

$$u \approx a \frac{\exp\{ikz\}}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{k(x-\xi)^2}{2z}\right\} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{k(y-\eta)^2}{2z}\right\} d\eta = \quad (13.9)$$

$$\frac{2\pi i}{k} a \exp\{ikz\} \Rightarrow a = \frac{k}{2\pi i} \quad .$$

Máme tak výsledek v souladu s (13.7)

$$u(P) = \frac{k}{2\pi i} \int u(Q) \frac{\exp\{ikR\}}{R} \cos(\vec{n}_Q, \vec{R}) d f_Q \quad . \quad (13.10)$$

Pro zajímavost se podívejme, jak vypadá výpočet pro rovinnou vlnu podle (13.7). Pro bod na ose $P(0,0,z)$ máme

$$u(P) = \frac{k}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(1 - \frac{1}{ik(\rho^2 + z^2)^{1/2}}\right) \frac{\exp\{ik(\rho^2 + z^2)^{1/2}\}}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \rho d\rho = \quad (13.11)$$

$$-z \int_0^R \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\exp\{ik(\rho^2 + z^2)^{1/2}\}}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right) d\rho = \exp\{ikz\} - \frac{z \exp\{ik(R^2 + z^2)^{1/2}\}}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \quad .$$

Pro $R \rightarrow \infty$ máme opět rovinnou vlnu. Pozoruhodné chování, které bylo historicky velmi důležité pro uznání vlnové povahy světla vykazuje nenulová intenzita za neprostupným terčíkem, kterou z (13.11) dostaneme jako

$$\int_R^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^R = \frac{z \exp\{ik(R^2 + z^2)^{1/2}\}}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \quad . \quad (13.12)$$

13.3 Výpočet Fresnelova integrálu.

Potřebujeme vypočítat integrál

$$F = \int_0^{\infty} \exp\{i x^2\} d x \quad . \quad (13.13)$$

Cauchyova věta pro vhodnou křivku v komplexní rovině dává

$$\int_0^R \exp\{i \rho^2\} d \rho + \int_0^{\pi/4} \exp\{R^2 (i \cos 2\theta - \sin 2\theta)\} d \theta + \exp\left\{i \frac{\pi}{4}\right\} \int_R^0 \exp\{-\rho^2\} d \rho = 0 \quad . \quad (13.14)$$

V limitě $R \rightarrow \infty$ je

$$\int_0^{\infty} \exp\{i \rho^2\} d \rho = \exp\left\{i \frac{\pi}{4}\right\} \int_0^{\infty} \exp\{-\rho^2\} d \rho \quad (13.15)$$

Poissonův integrál se počítá například jako

$$\int_0^{\infty} \exp\{-x^2\} d x = \left[\int_0^{\infty} \exp\{-x^2\} d x \int_0^{\infty} \exp\{-y^2\} d y \right]^{1/2} = \left[\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r \exp\{-r^2\} d r \right]^{1/2} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \quad . \quad (13.16)$$

Konečný výsledek je

$$F = \int_0^{\infty} \exp\{i x^2\} d x = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} (1+i) \quad . \quad (13.17)$$

Komplexně sdružený výraz k (13.17) je

$$F^* = \int_0^{\infty} \exp\{-i x^2\} d x = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} (1-i) \quad . \quad (13.18)$$

13.4 Změna fáze při doteku kaustiky (Guyův fázový posuv).

Uvažujme body Q vlnoplochy z (13.10)

$$\zeta = \frac{\xi^2}{2R_1} + \frac{\eta^2}{2R_2} \quad (13.19)$$

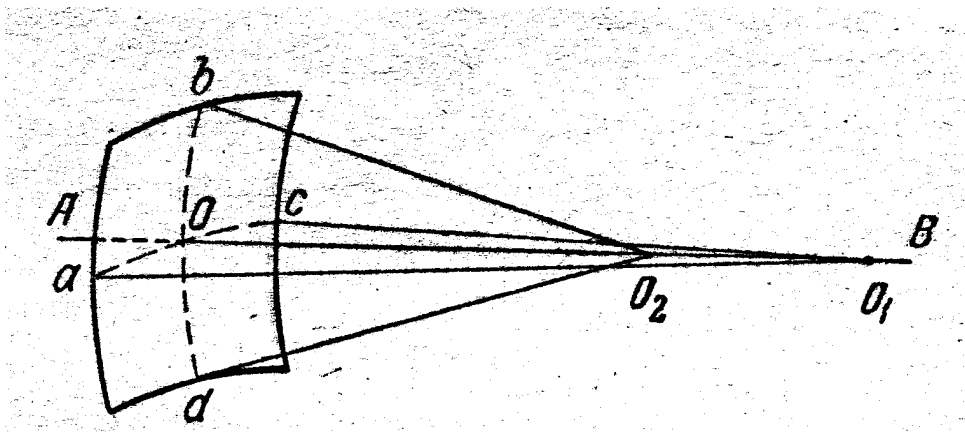
a bod $P(0,0,z)$ na ose. Máme tak

$$R = \left[\xi^2 + \eta^2 + \left(z - \frac{\xi^2}{2R_1} - \frac{\eta^2}{2R_2} \right)^2 \right]^{1/2} \approx z + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{\xi^2}{2} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\eta^2}{2} . \quad (13.20)$$

Po dosazení do (13.10)

$$u(P) \approx \frac{ku(O)}{2\pi iz} \exp\{ikz\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_1}\right)\xi^2\right\} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_2}\right)\eta^2\right\} d\eta . \quad (13.21)$$

Podle obrázku dostáváme



Vlnplocha s kružnicemi hlavních křivostí a paprsky.

$$\begin{aligned} 0 < z < R_2 &\Rightarrow \frac{1}{2i}(1+i)(1+i) = 1 \Rightarrow u(P) \approx u(0) , \\ R_2 < z < R_1 &\Rightarrow \frac{1}{2i}(1+i)(1-i) = \frac{1}{i} \Rightarrow u(P) \approx u(0) \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\right\} , \\ R_1 < z < \infty &\Rightarrow \frac{1}{2i}(1-i)(1-i) = -1 \Rightarrow u(P) \approx u(0) \exp\{-i\pi\} . \end{aligned} \quad (13.22)$$

13.5 Přenos optickou soustavou.

Vyjdeme opět z (13.10) a budeme sledovat šíření vlny podél osy z v paraxiálním přiblížení.

Máme tedy

$$\psi(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp\{ik(z-z_0)\}}{z-z_0} \iint \psi(x_0, y_0, z_0) \exp\left\{i \frac{k(x-x_0)^2}{2(z-z_0)}\right\} \exp\left\{i \frac{k(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}\right\} dx_0 dy_0 \quad (13.23)$$

Opakujeme-li tento postup ještě jednou, musíme pak počítat integrály typu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{k}{2} \left[\frac{(X-x)^2}{(Z-z)} + \frac{(x-x_0)^2}{(z-z_0)} \right]\right\} dx \quad (13.24)$$

Jednoduché úpravy vedou na

$$I = \exp\left\{i \frac{k}{2} \frac{(X-x_0)^2}{(Z-z_0)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{k(Z-z_0)}{2(Z-z)(z-z_0)} \left[x - \frac{X(z-z_0) + x_0(Z-z)}{(Z-z_0)} \right]^2\right\} dx = \left(\frac{2\pi i (Z-z)(z-z_0)}{k (Z-z_0)} \right)^{1/2} \exp\left\{i \frac{k}{2} \frac{(X-x_0)^2}{(Z-z_0)}\right\} \quad (13.25)$$

Je tak dokázáno potřebné chování přenosové funkce ve volném prostoru

$$T(z_0 \rightarrow z) = \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp\{ik(z-z_0)\}}{z-z_0} \exp\left\{ \frac{ik}{2(z-z_0)} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \right\}, \quad (13.26)$$

$$\iint T(z_0 \rightarrow z) T(z \rightarrow Z) dx dy = T(z_0 \rightarrow Z) \quad .$$

Působení tenké čočky v rovině z bude popsáno vztahem

$$L(z) = \exp\left\{ -\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right\} \quad (13.27)$$

Máme totiž (s označením $z-z_0=a$, $Z-z=b$)

$$\begin{aligned}
O(z_0 \rightarrow Z) &= \iint T(z_0 \rightarrow z) L(z) T(z \rightarrow Z) dx dy = \frac{\exp\{ik(a+b)\}}{ab} \\
&\frac{k}{2\pi i} \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{x_0^2}{a} + \frac{X^2}{b}\right]\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}\right]x^2 - ik\left[\frac{x_0}{a} + \frac{X}{b}\right]x\right\} dx \\
&\frac{k}{2\pi i} \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{y_0^2}{a} + \frac{Y^2}{b}\right]\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f}\right]y^2 - ik\left[\frac{y_0}{a} + \frac{Y}{b}\right]y\right\} dy .
\end{aligned} \quad (13.28)$$

S čočkovou rovnicí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (13.29)$$

a označením příčného zvětšení $M = -b/a$ pak dostaneme

$$\begin{aligned}
O(z_0 \rightarrow Z) &= \\
&\frac{1}{M} \delta\left(x_0 - \frac{X}{M}\right) \delta\left(y_0 - \frac{Y}{M}\right) \exp\{ik(a+b)\} \exp\left\{-\frac{ik}{2Mf}(X^2 + Y^2)\right\} .
\end{aligned} \quad (13.30)$$

Abbeovu teorii si vytvoříme tak, že budeme skládat zobrazení od předmětu ($z = -a$) k čočce ($z = 0$), působení čočky, zobrazení od čočky do obrazové ohniskové roviny ($z = f$) a zobrazení od této roviny do roviny Gaussova obrazu ($z = b$). Budeme tak mít

$$\begin{aligned}
u(X, Y, b) &= \frac{\exp\{ik(a+b)\}}{af(b-f)} \left(\frac{k}{2\pi i}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0, -a) \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{(x_f-x)^2}{f} + \frac{(X-x_f)^2}{b-f} - \frac{x^2}{f}\right]\right\} \\
&\exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{(y-y_0)^2}{a} + \frac{(y_f-y)^2}{f} + \frac{(Y-y_f)^2}{b-f} - \frac{y^2}{f}\right]\right\} dx_0 dy_0 dx_f dy_f ,
\end{aligned} \quad (13.31)$$

odkud po integraci vzhledem k x a y dostaneme

$$u(X, Y, b) = -\frac{\exp\{ik(a+b)\}}{M f^2} \left(\frac{k}{2\pi i}\right)^2 \exp\left\{-\frac{ik(X^2+Y^2)}{2 M f}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0, -a) \exp\left\{-ik \frac{x_0 x_f + y_0 y_f}{f}\right\} d x_0 d y_0 \right] \exp\left\{ik \frac{X x_f + Y y_f}{M f}\right\} d x_f d y_f . \quad (13.32)$$

Vidíme, že (13.32) obsahuje Fourierovu a inverzní Fourierovu transformaci

$$U_F(\xi, \eta) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0, -a) \exp\{-ik(\xi x_0 + \eta y_0)\} d x_0 d y_0 , \quad (13.33)$$

$$U(X, Y) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_F(\xi, \eta) \exp\left\{ik \frac{\xi X + \eta Y}{M}\right\} d \xi d \eta ,$$

takže můžeme psát

$$u(X, Y, b) = \frac{\exp\{ik(a+b)\}}{M} \exp\left\{-\frac{ik(X^2+Y^2)}{2 M f}\right\} u\left(\frac{X}{M}, \frac{Y}{M}, -a\right) . \quad (13.34)$$

13.6 Započtení osových vad.

Započtení osových vad je jednoduše možné zavedením přenosové funkce jednotkové amplitudy a s fází závislou na souřadnicích v ohniskové rovině. Stejným způsobem lze popsat také to, že rovina pozorování je mírně odlišná od Gaussovy roviny. Také započteme omezení apertury svazku. Ve vztahu (13.33) budeme tedy psát

$$U(X, Y, b+\Delta) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_F(\xi, \eta) T(\xi, \eta) \exp\{ik\Phi(\xi, \eta)\} \exp\left\{ik \frac{\xi X + \eta Y}{M}\right\} d \xi d \eta , \quad (13.35)$$

$$\Phi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\Delta(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{4}C_s(\xi^2 + \eta^2)^2 + \frac{1}{2}C_A(\xi^2 - \eta^2) .$$

14. Metody numerického výpočtu polí pro částicovou optiku.

14.1 Metoda konečných diferencí.

Tyto metody dělíme na metodu okrajového integrálu a síťové metody (metoda konečných diferencí a metoda konečných prvků).

Metoda konečných diferencí je nejznámější, nejjednodušší a nejčastěji používanou metodou pro výpočet elektrostatických systémů ve dvou a třech rozměrech. V (pravidelné) pravoúhlé síti jsou první derivace potenciálu nahrazeny hodnotou difference, např.

$$\frac{\partial V\left(x + \frac{h_x}{2}\right)}{\partial x} = \frac{V(x+h_x) - V(x)}{h_x}, \quad \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial V\left(x + \frac{h_x}{2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial V\left(x - \frac{h_x}{2}\right)}{\partial x}}{h_x} \quad (14.1)$$

a stejně pro směr y a z ; jsou tak sestaveny diferenční rovnice pro potenciály v uzlech sítě. Pro body na elektrodách a na hranici se dosadí potenciály elektrod, a v bodech s neznámým potenciálem se diferenční rovnice řeší zpravidla pomocí iteračních metod. Alternativní odvození diferenčních rovnic je použitím Taylorova rozvoje potenciálu, který pro vnitřní body sítě splní příslušnou Laplaceovu rovnici. Typický počet bodů sítě kolem 10 tisíc pro dvou- rozměrné úlohy, 500 tisíc pro třírozměrné. Problémy: malá přesnost, aproximace geometrie problému pravidelnou sítí, délka výpočtu. Příklad programu: nejznámější je SIMION (ve dvou a třech dimenzích). používáný na ÚFI. Program SIM-3D Jakuba Zlámala (diplomová práce ÚFI FS VUT, 1996). V tomto programu se navíc umožňuje ještě i modelování prostorového náboje zejména u iontově optických systémů.

14.2 Metoda konečných prvků.

Metoda konečných prvků se používá zejména pro výpočty magnetických čoček, u kterých se sytí magnetický obvod čočky. Namísto řešení Poissonovy rovnice pro úhlovou složku vektorového potenciálu $\vec{A} = A(r, z)\vec{e}_\phi$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = J \quad (14.2)$$

hledáme minimum energiového funkcionálu, který je pro čočky s permeabilitou nezávislou na magnetické indukci

$$E = 2\pi \iint \left[\frac{1}{2\mu} \left(\left(-\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)^2 \right) - J A \right] r dr dz \quad . \quad (14.3)$$

Členy v kulaté závorce jsou čtverce složek indukce B_r^2 a B_z^2 . Pro sycené čočky se místo prvního členu v integrálu uvažuje $U = \int H dB$; závislost $B(H)$ se určuje z magnetizační křivky magnetického materiálu.

Energii můžeme vyjádřit v malém trojúhelníkovém konečném prvku pomocí jednoho výrazu jak pro nesyčené čočky tak pro Taylorův rozvoj energie pro sycené čočky za předpokladu, že permeabilita μ, μ_0 a proudová hustota J jsou konstantní v každém trojúhelníku. ΔA_i je oprava hodnoty potenciálu A_i ve vrcholech trojúhelníka, a potenciál A je vyjádřen jako lineární funkce v (r, z) . Hodnota E_Δ reprezentuje energii v trojúhelníku (pak $\Delta A_i = A_i$) nebo opravu k energii, jako

$$E_\Delta = \frac{\pi}{3\mu_0} \sum_{i=1}^3 \left(g_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 f_{ij} \Delta A_j \right) \Delta A_i \quad , \quad (14.4)$$

kde

$$g_i = r_s \left(\mu_0 J D p_i + \frac{H_i}{\mu_r} \right) , \quad f_{ij} = \frac{r_s}{D} \left[\frac{1}{\mu_r} q_{ij} + \left(\frac{1}{\mu_d} - \frac{1}{\mu_r} \right) \frac{H_i H_j}{\bar{B}^2} \right] . \quad (14.5)$$

Relativní permeabilita μ_r a diferenciální permeabilita μ_d v magnetických materiálech se určí z průměrné hodnoty čtverce velikosti indukce B^2 , a koeficienty p_i a q_{ij} jsou čistě geometrické členy, které za předpokladu, že se určí průměrná hodnota B_z jako $\bar{B}_z = \partial A / \partial r + \bar{A} / \bar{r}$, máme

$$p_i = \frac{r_s + r_i}{4 r_s} , \quad q_{ij} = b_i b_j + \left(c_i + \frac{D}{r_s} \right) \left(c_j + \frac{D}{r_s} \right) , \quad (14.6)$$

a kde platí

$$\begin{aligned} b_1 = r_2 - r_3 , \quad c_1 = z_3 - z_2 , \quad b_2, b_3, c_2, c_3 \text{ cyklicky} , \\ r_s = r_1 + r_2 + r_3 , \quad D = b_1 c_2 - b_2 c_1 , \\ \bar{B}^2 = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 q_{ij} A_i A_j = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 H_i A_i , \quad H_i = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^3 q_{ij} A_j , \end{aligned} \quad (14.7)$$

přítom D je dvojnásobek plochy trojúhelníka. (V praxi používáme vztahy nepatrně složitější.) Sečteme-li vyjádření energie pro všechny trojúhelníky, na které rozdělíme oblast uvnitř hranice, na které použijeme buď Dirichletovu okrajovou podmínku $A=0$ nebo homogenní Neumannovu podmínku $\partial(rA)/\partial \vec{n}=0$, kde \vec{n} je jednotkový vektor normály k hranici (tuto podmínku použijeme např. na rovině symetrie nebo na povrchu magnetických materiálů ležících vně hranice), dostaneme výraz pro energii jako kvadratickou formu vyjádřenou pomocí ΔA_i , a z podmínky minima energie $\partial E_{total} / \partial (\Delta A_i) = 0$ dostaneme soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme. Typický počet rovnic je kolem 5-10 tisíc. Pro sycené čočky tento postup opakujeme tak dlouho, dokud opravy ΔA_i nebudou zanedbatelně malé.

Metodu konečných prvků lze použít i pro řešení elektrostatických čoček. Zde ve válcovém souřadném systému hledáme místo řešení Laplaceovy ($\rho=0$) nebo Poissonovy ($\rho\neq 0$) rovnice

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (14.8)$$

minimum energiového funkcionálu

$$E = 2\pi \iiint \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right) - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Phi \right] r dr dz, \quad (14.9)$$

podobně jako pro vektorový potenciál. I v dalším postupujeme podobně jako u výpočtu vektorového potenciálu. Pro pravoúhlé sítě musíme dostat stejné řešení jako pro nejjednodušší metodu konečných diferencí. Stejně tak lze zformulovat řešení jednotlivých harmonických složek potenciálu pro vychylovací elektrostatické a magnetické systémy a pro kvadrupólové prvky se speciální geometrií, definovanou pro elektrostatické systémy rozdělením rotačně souměrných ploch na jednotlivé elektrody, pro magnetické systémy multipóly vytvářené sedlovými a toroidálními cívkami (a to i v přítomnosti rotačně souměrných magnetických materiálů).

14.3 Metoda okrajového integrálu.

Metoda okrajového integrálu se používá zejména pro řešení elektrostatických systémů: uvnitř elektrod je nulové pole, a na povrchu elektrody se vyskytuje povrchový náboj, jehož hustota σ a hodnota intenzity pole E , která je kolmá k povrchu elektrody, jsou určeny jako $E = -\sigma/\varepsilon_0$. Rozdělíme si povrch elektrod na N elementů, u nichž předpokládáme konstantní

hodnotu σ ; přitom potenciál elektrod známe. Potom můžeme obecný výraz pro potenciál (vlevo) psát pro body na elektrodách (resp. ve středu elementu o ploše Δ_j) jako

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow$$

$$V(\vec{r}_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \sigma_k \int_{\Delta_k} \frac{dS'}{|\vec{r}_j - \vec{r}'|}, \quad j=1, \dots, N. \quad (14.10)$$

Přitom jsme ‘ztratili’ jednu dimenzi! Integrál na pravé straně se dá vyčíslit i pro prvek $k=j$. Dostaneme tak soustavu lineárních rovnic pro σ : tato soustava rovnic je ale ‘hustá’. Můžeme ji řešit - doba výpočtu je úměrná N^3 (na 486/66 Mhz PC můžeme cca 900 rovnic vyřešit za hodinu). Když známe hodnoty σ , můžeme pak obecný výraz pro potenciál použít k určení hodnot potenciálu v kterémkoliv bodě prostoru, a to i pro jednotlivé derivace.

Programy využívající metodu hustoty prostorového náboje byly vypracovány i v ÚPT AV ČR (dr. J. Chmelík), a byly použity pro studium elektrostatických čoček a pro studium elektronových trysek s hrotovými katodami. Zde se dá výhodně využít to, že jednotlivé plošky, na které rozdělíme elektrody, mohou mít výrazně rozdílné velikosti. Kromě toho máme k dispozici i programy ve dvou a třech dimenzích CPO-2DS a CPO-3DS, které byly vytvořeny na University of Manchester. Tyto programy dovolují i výpočet elektrostatických systémů s prostorovým nábojem.

15. Bodové rozlišení mikroskopu.

15.1 Mezní rozlišení.

Předpokládáme, že v případě mezního rozlišení se neuplatňuje chromatická vada, a že rozlišení je určeno pouze kroužkem otvorové vady a difrakce: součet čtverců obou vad je možné psát jako

$$d^2 = d_s^2 + d_d^2 = (0.5 C_s \alpha^3)^2 + (1.22 \lambda / \alpha)^2, \quad (15.1)$$

tento výraz má minimum pro hodnotu $\alpha \approx 1.1(\lambda / C_s)^{1/4}$, pro které je pak velikost kroužku vady dána vztahem $d \approx 1.3(\lambda^3 C_s)^{1/4}$.

15.2 Závislost proudu ve stopě na velikosti stopy

Volba katody má závažné důsledky pro chování systému: průměr stopy je dán potřebným zmenšením elektronově optického systému z původní velikosti zdroje (křížště) $M d_k$, difrakcí, a také osovými vadami, které všechny závisí na úhlu svazku α na vzorku jako $d_d = 1.22 \lambda / \alpha$, $d_c = C_c \alpha \Delta V / V_r$, a $d_s = 0.5 C_s \alpha^3$. Druhé mocniny příspěvků těchto všech vlivů sečteme, abychom dostali výsledný kvadrát průměru stopy. Přitom musíme vzít do úvahy zákon zachování objemu fázového prostoru: proud ve stopě, velikost stopy a úhel svazku spolu souvisí jako $I = \beta \pi d^2 \pi \alpha^2$. Odtud potom dostaneme pro výslednou závislost $d = d(\alpha)$ výraz

$$d^2 = \frac{I}{\beta \pi^2 \alpha^2} + \left(\frac{1.22 \lambda}{\alpha} \right)^2 + (0.5 C_s \alpha^3)^2 + \left(C_c \alpha \frac{\Delta V}{V_r} \right)^2 \quad (15.2)$$

který má minimum. Odtud potom dostaneme závislost proudu ve stopě na průměru stopy jako

$$I_{\max} = \frac{3 \pi^2}{16} \beta \frac{d^{8/3}}{C_s^{2/3}}, \quad (15.3)$$

to v případě, když můžeme zanedbat vliv chromatické vady a také pokud je vliv difrakční vady zanedbatelný proti příspěvku danému velikostí stopy; pro velmi malé proudy ve stopě dává ale difrakční vada absolutní mez velikost stopy, která je prakticky stejná jako bodová rozlišovací schopnost diskutovaná dříve.

Pro iontové sondy není ani tak rozhodující příspěvek sférické vady, ale vliv chromatické vady. V tom případě potom se předchozí závislost (15.3) změní na

$$I_{\max} = \frac{\pi^2}{16} \beta \frac{d^4}{C_c^2} \left(\frac{V_r}{\Delta V} \right)^2 . \quad (15.4)$$

Jiný případ nastává, když je výchozí stopa prakticky bodová, jako je tomu pro autoemisní katody. Velikost zdroje je dána především chováním jednotlivých čoček v elektronově optickém systému. Pokud máme u katody ‘nekvalitní’ elektrostatickou čočku, je chování optického systému horší než v případě, kdy je u katody magnetická čočka. Protože je velikost stopy dána otvorovou vadou, je i velikost proudu ve stopě dána jen sférickou vadou, a proto závislost proudu na velikosti stopy je $I \approx (d/C_s)^{2/3}$.

16. Zdroje elektronů a iontů pro mikroskopy a mikrosondy.

16.1 Zdroje elektronů.

Proudovou hustotu termoemise udává Richardsonova závislost na teplotě T , pro emisi polem pak Fowlerova-Nordheimova závislost na poli E , jako

$$J_k = AT^2 \exp\left(-\frac{e\Phi}{kT}\right) , \quad J_k = \frac{k_1}{\Phi} E^2 \exp\left(-\frac{k_2 \Phi^{3/2}}{|E|}\right) , \quad (16.1)$$

kde k je Boltzmannova konstanta, Φ je výstupní práce materiálu; hodnoty konstant A, k_1, k_2 závisí na použitém materiálu. Např. pro oxidy barya je $e\Phi \approx 1.8 eV$, $A \approx 1.2 A cm^{-2} K^{-2}$, provozní teplota $T \sim 1000 K$ a proudová hustota emise $J_k \sim 1 A cm^{-2}$. Pro mikroskopy se používá zpravidla W nebo LaB₆ (viz tabulka). Životnost termoemisní katody je dána provozní teplotou: pro 2500 K 200 h, pro 2600 K 90 h, 2700 K 35 h a pro 2800 K jen 12 hodin.

Parametry termoemisních a autoemisních katod			
	Termoemise		Autoemise
	W	LaB ₆	W
Výstupní práce $e\Phi$ [eV]	4,5	2,7	4,5
Richards. konst. A [$A/cm^2/K^2$]	75-120	30	--
Emisní proud. hustota j_e [A/cm^2]	1-3	25	10^4 - 10^6
Celkový emisní proud I [μA]	10-100	10-100	1-10
Pracovní teplota [K]	2800	1400-2000	300(1000)
Jas katody β [$A/cm^2/sr$] pro 20 keV	10^5	5×10^5	5×10^7 - 5×10^8
Průměr křížště d_k [μm]	20-50 vlásenka 10-30 hrotová k.	10-20	0,005-0,01
Energiová šířka ΔV [eV]	1-2	0,5-2	0,2-0,4
Životnost [h]	25	200-2000	1000 a více
Vakuum [Pa]	10^{-2} - 10^{-3}	10^{-5} - 10^{-6}	10^{-7} - 10^{-8}

LaB₆ je za pokojové teploty nevodivá keramika - řešení nepřímého žhavení dává příloha 2.

16.2 Iontové zdroje.

Shrnutí vlastností plazmatu: vytváření plazmatu, Debyeova délka, magnetické pole.

Maximální hodnota proudové hustoty je dána prostorovým nábojem (Childův zákon); pro pole

V_a/d

$$j = \frac{4 \varepsilon_0}{9} \left(\frac{2e}{m_0} \right)^2 \frac{V_a^{3/2}}{d} . \quad (16.2)$$

Typy iontových zdrojů: výbojové (rf, mikrovlnný výboj), duoplazmatron, s ionizací polem, s kapalnými kovy.

Typické vlastnosti iontových zdrojů

	p [torr]	I [A]	j [A/cm ²]	ΔE [eV]
Duoplazmatron	10 ⁻¹ -10 ⁻²	10 ⁻¹ -10 ⁻³	10 ⁻² -1	10
Rf	10 ⁻³ -10 ⁻⁴	10 ⁻² -10 ⁻⁴	10 ⁻³ -10 ⁻¹	30-50
Penning	10 ⁻¹ -1	10 ⁻³ -10 ⁻⁵	10 ⁻⁴ -10 ⁻¹	50
Elektr. impaktní	10 ⁻³ -10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10-50
Ionizace polem ^{a)}	10 ⁻⁸	10 ⁻⁸ -10 ⁻⁹	10 ⁻³	2-5
LMIS ^{b)}	10 ⁻⁷	10 ⁻⁴ -10 ⁻⁸	10 ⁵	5

Směrové proudové hustoty [A/sr]/jas β [A/cm²/sr] ^{a)} 10⁻⁶/10⁵, ^{b)} 10⁻⁴/10⁷.

Pro duoplazmatron jas β [A/cm²/sr] <10³.