Poznámky k přednášce Kvantová elektrodynamika

PřF MU v Brně, říjen 1998 - leden 1999

Michal Lenc

1. Interakce elektromagnetického záření s atomy.

1.1. Fermiho zlaté pravidlo.

Vyjdeme od interakční reprezentace. Předpokládáme, že hamiltonián je složen ze dvou částí $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, $\hat{H}_0$ je na čase nezávislá základní část (neporušený hamiltonián), $\hat{V}$ je interakční část, která může explicitně záviset na čase (porucha). Platí

$$\hat{H}_{int} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\, t\right)\,\hat{V}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\, t\right) \quad , \quad |\Psi_{int}\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\, t\right)\,|\Psi\rangle \quad ,$$

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi_{int}\rangle = \hat{H}_{int}\,|\Psi_{int}\rangle \quad , \quad |\Psi_{int}(t)\rangle = \hat{S}(t,0)\,|\Psi_{int}(0)\rangle \quad ,$$

$$\hat{S}(t,0) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}_{int}(t_1)\,\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t \hat{H}_{int}(t_1)\int_0^{t_1}\hat{H}_{int}(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 + \ldots\ldots$$

Jako bázi zvolíme vlastní vektory hamiltoniánu $\hat{H}_0$

$$\hat{H}_0\,|\Phi_n\rangle = E_n\,|\Phi_n\rangle \quad , \quad |\Psi_{int}(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|\Phi_n\rangle \quad ,$$

$$|\Psi\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)\,|\Psi_{int}(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)\,|\Phi_n\rangle \quad ,$$

$$|\Psi\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)\,\hat{S}(t,0)\,|\Psi_{int}(0)\rangle =$$

$$\sum_n\sum_m c_m(0)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)\,|\Phi_n\rangle\langle\Phi_n|\,\hat{S}(t,0)\,|\Phi_m\rangle \quad .$$

Promítnutím do $|\Phi_k\rangle$ dostáváme pro $c_k(t)$

$$c_k(t) = \sum_n c_n(0)\,\langle\Phi_k|\,\hat{S}(t,0)\,|\Phi_n\rangle \quad , \quad V_{kn}(t) = \langle\Phi_k|\,\hat{V}(t)\,|\Phi_n\rangle \quad ,$$

$$c_k(t) = \sum_n c_n(0)\Bigg\{\delta_{kn} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t V_{kn}(t_1)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_k - E_n)t_1\right)\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{\hbar^2}\sum_m$$

$$\int_0^t V_{km}(t_1)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_k - E_m)t_1\right)\int_0^{t_1} V_{mn}(t_2)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t_2\right)\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 + \ldots\Bigg\} \quad .$$

Předpokládejme, že v čase $t = 0$ je soustava v určitém stavu (počátečním) $|\Phi_i\rangle$, takže pro koeficienty $c_k(0) = \delta_{ik}$. Počítejme pravděpodobnost přechodu do (konečného) stavu $|\Phi_f\rangle$ různého od $|\Phi_i\rangle$, tedy koeficient ${}_{fi}c\ (t)$. Přidaný index i zvýrazňuje, že počítáme přechod z tohoto počátečního stavu. Předpokládejme dále harmonický průběh časové závislosti $\mathbf{V}(t)$

$$\hat{V}(t) = \hat{F}\exp\left(-i\omega t\right) + \hat{F}^{+}\exp\left(i\omega t\right) \quad .$$

S označením $\hbar\omega_{fi} = E_f - E_i$ pak máme v prvním přiblížení

$$c_{fi}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t V_{fi}(t_1)e^{i\omega_{fi}t_1}\,\mathrm{d}t_1 =$$

$$-\frac{1}{\hbar}F_{fi}\,\frac{\exp\left(i(\omega_{fi}-\omega)t\right)-1}{\omega_{fi}-\omega} - \frac{1}{\hbar}F_{if}^{\;*}\,\frac{\exp\left(i(\omega-\omega_{if})t\right)-1}{\omega-\omega_{if}} \quad .$$

Pravděpodobnost přechodu za jednotku času je dána výrazem

$$w_{fi} = \lim_{t\to\infty}\frac{|\,c_{fi}(t)\,|^2}{t} \quad .$$

S využitím vztahu

$$\delta(\alpha) = \lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2(\alpha t)}{\pi t\alpha^2}$$

dostáváme

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left[|\,F_{fi}|^2\,\delta(E_f-E_i-\hbar\omega) + |\,F_{if}|^2\,\delta(E_i-E_f-\hbar\omega)\right] \quad .$$

Při přechodech do finálního stavu, který leží ve spojitém spektru s hustotou stavů $d\nu_f=\rho(E_f)dE_f$ počítáme hustotu pravděpodobnosti přechodu za jednotku času dw_{fi}

$$\mathrm{d}w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\,F_{fi}|^2\Big(\,\delta(E_f-E_i-\hbar\omega) + \delta(E_f-E_i+\hbar\omega)\,\Big)\rho(E_f)\mathrm{d}E_f \quad .$$

1.2. Základní popis elektromagnetického pole.

Klasicky je elektromagnetické pole popsáno vektory intenzity a indukce elektrického a magnetického pole. Tyto vektory vyhovují Maxwellovým rovnicím

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \quad div\,\vec{D} = \rho \quad ,$$

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad , \quad div\,B = 0 \quad .$$

Zavedeme-li pro popis elektromagnetického pole vektorový a skalární potenciál

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ,$$

máme pro něj v prostředí bez disperse rovnice

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t} div\,\vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon} \quad ,$$

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\mu\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla(div\,\vec{A} + \epsilon\mu\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}) = -\mu\mu_0\vec{j} \quad .$$

S využitím kalibrační transformace

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \quad , \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

dostáváme pro potenciály vlnovou rovnici

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad , \quad \epsilon\mu = n^2 \quad , \quad div\,\vec{A} + \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad ,$$

$$\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon} \quad ,$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{j} \quad .$$

Z Maxwellových rovnic odvodíme pro hustotu toku energie výraz

$$div\,(\vec{H}\times\vec{E}) = \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\,\vec{E} \quad .$$

Na pravé straně vystupuje kromě vykonané práce časová změna hustoty energie. V prostředí s dispresí musíme psát

$$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{e}^{\,*}) \quad , \quad \vec{D} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{d}^{\,*}) \quad ,$$

$$\vec{e}(t) = \vec{e}_0(t)\,e^{-i\omega t} = \int\vec{e}_0(\alpha)\,e^{-i(\alpha+\omega)t}\frac{d\alpha}{2\pi} \quad ,$$

$$\vec{d}(t) = \vec{d}_0(t)\,e^{-i\omega t} = \epsilon_0\int\epsilon(\alpha+\omega)\,\vec{e}_0(\alpha)\,e^{-i(\alpha+\omega)t}\frac{d\alpha}{2\pi}$$

a obdobně pro magnetické pole

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b}^{\,*}) \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{h} + \vec{h}^{\,*}) \quad ,$$

$$\vec{h}(t) = \vec{h}_0(t)\,e^{-i\omega t} = \int\vec{h}_0(\alpha)\,e^{-i(\alpha+\omega)t}\frac{d\alpha}{2\pi} \quad ,$$

$$\vec{b}(t) = \vec{b}_0(t)\,e^{-i\omega t} = \mu_0\int\mu(\alpha+\omega)\vec{h}_0(\alpha)\,e^{-i(\alpha+\omega)t}\frac{d\alpha}{2\pi} \quad .$$

Rozvoj integrandu kolem $\alpha=0$ upravíme na tvar

$$(\alpha+\omega)\,\epsilon(\alpha+\omega) \;=\; -\omega^2\frac{d\epsilon}{d\omega} + \frac{d\omega\,\epsilon(\omega)}{d\omega}(\alpha+\omega) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\omega\,\epsilon(\omega)}{d\omega^2}\alpha^2 + \dots \quad ,$$

$$(\alpha+\omega)\,\mu(\alpha+\omega) \;=\; -\omega^2\frac{d\mu}{d\omega} + \frac{d\omega\,\mu(\omega)}{d\omega}(\alpha+\omega) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\omega\,\mu(\omega)}{d\omega^2}\alpha^2 + \dots \quad .$$

To nám umožní získat přibližné vyjádření

$$\frac{\partial\vec{d}(t)}{\partial t} \;=\; i\epsilon_0\omega^2\frac{d\epsilon(\omega)}{d\omega}\vec{e}(t) \;+\; \epsilon_0\frac{d\omega\,\epsilon(\omega)}{d\omega}\,\frac{\partial\vec{e}(t)}{\partial t} \quad ,$$

$$\frac{\partial\vec{b}(t)}{\partial t} \;=\; i\mu_0\omega^2\frac{d\mu(\omega)}{d\omega}\vec{h}(t) \;+\; \mu_0\frac{d\omega\,\mu(\omega)}{d\omega}\,\frac{\partial\vec{h}(t)}{\partial t} \quad .$$

Pro hustotu energie pak máme konečný výraz

$$W \;=\; \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega}E^2 \;+\; \frac{1}{\mu_0\mu^2}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}B^2\right) \quad .$$

Z Maxwellových rovnic odvodíme pro hustotu toku impulzu výraz

$$\vec{E}.div\vec{D} - \vec{B}\times rot\vec{H} - \vec{D}\times rot\vec{E} \;=\; \vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{j}\times\vec{B} + \rho\vec{E} \quad .$$

Na pravé straně vystupuje kromě hustoty Lorentzovy síly časová změna hustoty impulzu.

Řešení vlnové rovnice pro vektorový potenciál ve tvaru rovinné vlny dává

$$\vec{A} \;=\; 2N\vec{e}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \;,\; \vec{E} \;=\; 2N\omega\,\vec{e}\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \;,$$

$$\vec{B} \;=\; 2N(\vec{k}\times\vec{e})\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad ,$$

$$\vec{e}\,.\,\vec{k} \;=\; 0 \;,\; |\vec{k}| \;=\; \frac{n\omega}{c} \quad .$$

Normovací podmínku pro vektorový potenciál odpovídající jednomu fotonu napíšeme jako

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\int_V dv\,W \;=\; \hbar\omega \quad .$$

Po dosazení dostaneme pro normovací konstantu N

$$N \;=\; \left[\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V\dfrac{\epsilon\,d(\omega n)}{n\,d\omega}}\right]^{1/2} \quad .$$

S uvedenou hodnotou normovací konstanty N je impulz fotonu střední hodnotou veličiny úměrné Poyntingovu vektoru

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\int_V dv\,\frac{1}{c^2}\frac{dn\omega}{d\omega}\vec{E}\times\vec{H} \;=\; \frac{\hbar\omega}{c}\frac{\vec{k}}{k} \quad .$$

Obecné řešení vlnové rovnice teď budeme psát jako

$$\hat{\vec{A}} = \sum_{\substack{\vec{k} \\ \sigma = 1,2}} N_k \, \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma} \, e^{\,i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma} \, e^{\,-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad ,$$

kde amplitudy jsou dány vztahem

$$\hat{a}_{\vec{k},\sigma} = \hat{a}_{\vec{k},\sigma}(0) \, e^{\,-i\omega_k t} \quad , \quad \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma} = \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma}(0) \, e^{\,i\omega_k t} \quad .$$

Dosazením do výrazu pro energii dostáváme Hamiltonův operátor

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k} \\ \sigma = 1,2}} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma} \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma} + \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma} \hat{a}_{\vec{k},\sigma} \right) \quad ,$$

S využitím komutačních relací

$$[\ \hat{a}_{\vec{k},\sigma} \ , \ \hat{a}^{+}_{\vec{k}',\sigma'} \ ] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \ \delta_{\sigma,\sigma'}$$

pak má Hamiltonián tvar

$$\hat{H} = \sum_{\substack{\vec{k} \\ \sigma = 1,2}} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma} \hat{a}_{\vec{k},\sigma} + \frac{1}{2} \right) \quad .$$

Obdobně pro operátor impulzu

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\substack{\vec{k} \\ \sigma = 1,2}} \frac{\hbar\omega_k}{c} \frac{\vec{k}}{k} \left(\hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma} \hat{a}_{\vec{k},\sigma} + \frac{1}{2} \right) \quad .$$

1.3. Kreační a anihilační operátory.

Zavedení anihilačního operátoru $\hat{a}$ a kreačního operátoru $\hat{a}^{+}$ vedlo k vyjádření hamiltoniánu pomocí operátoru počtu fotonů $\hat{N} = \hat{a}^{+}\hat{a}$ (pojmenování vyplyne z dalšího). Základem pro další úvahy bude chování vlastních vektorů operátoru $\hat{N}$ při působení operátorů $\hat{a}$ a $\hat{a}^{+}$. Označíme vlastní vektory a vlastní hodnoty jako $\hat{N}\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle$, $\langle n\,|\,n\rangle = 1$ a dále zavedeme vektory $|\,u\rangle = \hat{a}\,|\,n\rangle$ a $|\,v\rangle = \hat{a}^{+}\,|\,n\rangle$. Potom

$$\hat{N}\,|\,u\rangle = \hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}\,|\,n\rangle = \hat{a}\,(\hat{a}^{+}\hat{a} - \hat{1})\,|\,n\rangle = (n \quad 1)\,|\,u\rangle \quad ,$$

$$\hat{N}\,|\,v\rangle = \hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}\,|\,n\rangle = \hat{a}^{+}\,(\hat{a}^{+}\hat{a} + \hat{1})\,|\,n\rangle = (n \quad 1)\,|\,v\rangle \ .$$

Musí tedy být také $|\,u\rangle$ a $|\,v\rangle$ vlastními vektory operátoru $\hat{N}$

$$|\,u\rangle = c_u\,|\,n-1\,\rangle \quad , \quad \langle u\,|\,u\rangle = |\,c_u\,|^2 \langle n-1\,|\,n-1\,\rangle = |\,c_u\,|^2$$

$$\langle u\,|\,u\rangle = \langle n\,|\,\hat{a}^{+}\hat{a}\,|\,n\rangle = n\langle n\,|\,n\rangle = n \quad ,$$

$$|\,v\rangle = c_v\,|\,n+1\,\rangle \quad , \quad \langle v\,|\,v\rangle = |\,c_v\,|^2 \langle n+1\,|\,n+1\,\rangle = |\,c_v\,|^2$$

$$\langle v\,|\,v\rangle = \langle n\,|\,\hat{a}\hat{a}^{+}\,|\,n\rangle = \langle n\,|\,(\hat{a}^{+}\hat{a} + \hat{1})\,|\,n\rangle = (n \quad 1)\langle n\,|\,n\rangle = n \quad 1 \ .$$

Zvolíme-li fázový faktor tak, že c_u a c_v jsou reálné, dostáváme

$$\hat{a}\,|\,n\rangle \;=\; \sqrt{n}\,|\,n-1\,\rangle \quad , \quad \hat{a}^{+}\,|\,n\rangle \;=\; \sqrt{n\;\;1}\,|\,n+1\,\rangle \quad .$$

Pro zdůvodnění názvů operátorů zbývá ukázat, že n je celé nezáporné číslo. Uvažujme výraz

$$\langle n\,|\,\hat{a}^{+k}\hat{a}^{\,k}\,|\,n\rangle \;=\; n\,\langle n-1\,|\,\hat{a}^{+(k-1)}\hat{a}^{(k-1)}\,|\,n-1\,\rangle \;=\; \ldots \;=$$

$$n(n\;\;1)\ldots(n\;\;k\;\;1) \;\geq\; 0 \quad , \quad k \;=\; 1,2,\ldots..$$

To nelze splnit jinak, než volbou $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$

1.4. Interakční hamiltonián (nerelativisticky), emise a absorbce světla.

Interakční hamiltonián elektronu a elektromagnetické vlny je

$$\hat{H}_{int} \;=\; -\frac{e}{m}\hat{\vec{A}}\hat{\vec{p}} + \frac{e^2}{2m}\hat{\vec{A}}^2 \;-\; \frac{e\hbar}{2m}\frac{\hat{\vec{s}}}{s} rot\,\hat{\vec{A}} \quad .$$

Po dosazení za vektorový potenciál dostáváme

$$\hat{H}_{int} \;=\; \hat{H}^{(1)}_{int} \;+\; \hat{H}^{(2)}_{int} \quad ,$$

kde

$$\hat{H}^{(1)}_{int} \;=\; -\frac{e}{m}\sum_{\vec{k},\sigma} N_k\left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma}\, e^{\,i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma}\, e^{\,-i\vec{k}\vec{r}}\right)\vec{e}_{\vec{k},\sigma}.\hat{\vec{p}} \;-$$

$$\frac{ie\hbar}{2m}\sum_{\vec{k},\sigma} N_k\,\frac{\hat{\vec{s}}}{s}.(\vec{k}\times\vec{e}_{\vec{k},\sigma})\left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma}\, e^{\,i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma}\, e^{\,-i\vec{k}\vec{r}}\right)$$

a

$$\hat{H}^{(2)}_{int} \;=\; \frac{e^2}{2m}\sum_{\vec{k},\sigma}\;\sum_{\vec{k}',\sigma'} N_k N_{k'}\,\vec{e}_{\vec{k},\sigma}\,\vec{e}_{\vec{k}',\sigma'}\Big(\;\hat{a}_{\vec{k},\sigma}\,\hat{a}_{\vec{k}',\sigma'}\, e^{\,i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}} \;+$$

$$\hat{a}_{\vec{k},\sigma}\,\hat{a}^{+}_{\vec{k}',\sigma'}\, e^{\,i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} \;+\; \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma}\,\hat{a}_{\vec{k}',\sigma'}\, e^{\,-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} \;+\; \hat{a}^{+}_{\vec{k},\sigma}\,\hat{a}_{\vec{k}',\sigma'}\, e^{\,-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}\;\Big) \quad .$$

Při výpočtu emise a absorbce světla budeme uvažovat pouze jednofotonové procesy. Počáteční $|\,i\rangle$ a koncový $|f\rangle$ stav při emisi nebo absorbci jsou

$$|\,i\,\rangle \;=\; |\,e\,\rangle_{atom}\,|\,n_{\vec{k},\sigma}\,\rangle_{rad} \quad , \quad |f\rangle \;=\; |\,b\,\rangle_{atom}\,|\,n_{\vec{k},\sigma}+1\,\rangle_{rad} \quad ,$$

$$|\,i\,\rangle \;=\; |\,b\,\rangle_{atom}\,|\,n_{\vec{k},\sigma}\,\rangle_{rad} \quad , \quad |f\rangle \;=\; |\,e\,\rangle_{atom}\,|\,n_{\vec{k},\sigma}-1\,\rangle_{rad} \quad .$$

Pro maticové elementy dostáváme při zanedbání spinové interakce výrazy

$$\langle f|\,\hat{H}^{(1)}_{int}\,|i\rangle =$$

$$-\frac{e}{m}\left[\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}\right]^{1/2}\left(n_{\vec{k},\sigma}+1\right)^{1/2}\langle\, b|e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\vec{e}_{\vec{k},\sigma}.\hat{\vec{p}}|e\rangle\, e^{-i(E_e-E_b-\hbar\omega_k)t} \quad ,$$

$$\langle f|\,\hat{H}^{(1)}_{int}\,|i\rangle =$$

$$-\frac{e}{m}\left[\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}\right]^{1/2}\left(n_{\vec{k},\sigma}\right)^{1/2}\langle\, e|e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\vec{e}_{\vec{k},\sigma}.\hat{\vec{p}}|b\rangle\, e^{i(E_e-E_b-\hbar\omega_k)t} \quad .$$

Pravděpodobnost přechodu za jednotku času w_{em} nebo w_{ab} spočteme podle Fermiho pravidla

$$w_{em} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\,\langle f|\,\hat{H}^{(1)}_{int}\,|i\rangle\,|^2 =$$

$$\frac{\pi e^2}{m^2\epsilon_0\omega_k V}\left(n_{\vec{k},\sigma}+1\right)|\langle\, b|e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\vec{e}_{\vec{k},\sigma}.\hat{\vec{p}}|e\rangle|^2\,\delta(E_e-E_b-\hbar\omega_k) \quad ,$$

$$w_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\,\langle f|\,\hat{H}^{(1)}_{int}\,|i\rangle\,|^2 =$$

$$\frac{\pi e^2}{m^2\epsilon_0\omega_k V}\, n_{\vec{k},\sigma}\,|\langle\, e|e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\vec{e}_{\vec{k},\sigma}.\hat{\vec{p}}|b\rangle|^2\,\delta(E_e-E_b-\hbar\omega_k) \quad .$$

Je vidět, že pravděpodobnosti přechodu při emisi a absorbci se liší jen faktorem, souvisejícím s počtem fotonů. Napíšeme-li rovnice pro počet atomů v základním a excitovaném stavu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_b = -\,w_{ab}N_b + w_{em}N_e \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_e = -\,w_{em}N_e + w_{ab}N_b \quad ,$$

máme ve stavu termodynamické rovnováhy

$$\frac{N_b}{N_e} = \frac{e^{\frac{-E_b}{k_B T}}}{e^{\frac{-E_e}{k_B T}}} = e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \quad , \quad \frac{N_b}{N_e} = \frac{w_{em}}{w_{ab}} = \frac{\bar{n}_{\vec{k},\sigma}+1}{\bar{n}_{\vec{k},\sigma}}$$

a odsud pak

$$\bar{n}_{\vec{k},\sigma} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}-1} \quad .$$

1.5. Přirozená šířka spektrální čáry.

Máme-li nenulovou pravděpodobnost spontánní emise, nemůže pak být podle relací neurčitosti energie elektronu na vyšší hladině určena ostřeji než

$$\Delta E = 2\pi \sum_{\vec{k},\sigma} |\langle f|\, \hat{H}^{(1)}_{int}\, |i\rangle|^2 \quad .$$

Přejdeme ke spojitému rozložení impulzů fotonu a vhodně zvolíme orientaci vektorů

$$\sum_{\vec{k},\sigma} \rightarrow \sum_{\sigma} \frac{V}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3\vec{k} \ , \ \vec{k} = (0,0,k) \ , \ \vec{t} = (0,t_y,t_z) \ ,$$

$$\vec{e}_{\vec{k},1} = (1,0,0) \ , \ \vec{e}_{\vec{k},2} = (0,1,0) \quad , \quad \vec{t} = \langle b\,|\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\hat{\vec{p}}\,|\, e\rangle \quad .$$

Máme pak

$$\Delta E = \frac{\hbar e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 m^2} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\omega_k} |\langle b|\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\hat{\vec{p}}\,|e\rangle|^2 \sin^2\theta \ \delta(E_e - E_b - \hbar\omega) \ ,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\omega_k} \sin^2\theta = \frac{2\pi}{c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega_k\, \omega_k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin^3\theta \quad .$$

Po výpočtu integrálu dostaneme

$$\Delta E = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \frac{E_e - E_b}{\hbar} |\langle b|\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\hat{\vec{p}}\,|e\rangle|^2 \quad .$$

Předpokládáme-li nyní, že vlnová délka emitovaného záření je velká ve srovnání s atomovými rozměry, můžeme psát

$$\langle b|\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\hat{\vec{p}}\,|e\rangle \simeq \langle b|\,\hat{\vec{p}}\,|e\rangle = \langle b|\, m\frac{\mathrm{d}\hat{\vec{r}}}{\mathrm{d}t}\,|e\rangle =$$

$$\frac{im}{\hbar} \langle b|\,\hat{H}\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}\hat{H}\,|e\rangle = -im\frac{E_e - E_b}{\hbar} \langle b|\,\hat{\vec{r}}\,|e\rangle$$

a konečný výraz pro přirozenou šířku spektrální čáry dostáváme ve tvaru

$$\Delta E = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{E_e - E_b}{\hbar}\right)^3 |\langle b|\,\hat{\vec{r}}\,|e\rangle|^2 \quad .$$

1.6. Rozptyl elektromagnetického záření volným elektronem.

V nerelativistické teorii popisuje tento jev kvadratická část interakčního hamiltoniánu, která vyjadřuje současnou absorbci a emisi fotonu. Počáteční $|i\rangle$ a koncový $|f\rangle$ stav je

$$|i\rangle = |\vec{q}_i\rangle_{el}\, |n_{\vec{k}_i,\sigma_i}, n_{\vec{k}_f,\sigma_f}\rangle_{rad} \quad , \quad |\vec{q}_i\rangle_{el} = \frac{1}{V^{1/2}}\, e^{i\vec{q}_i\vec{r}} \quad ,$$

$$|f\rangle = |\vec{q}_f\rangle_{el}\, |n_{\vec{k}_i,\sigma_i} - 1 , n_{\vec{k}_f,\sigma_f} + 1\rangle_{rad} \quad , \quad |\vec{q}_f\rangle_{el} = \frac{1}{V^{1/2}}\, e^{i\vec{q}_f\vec{r}} \quad .$$

Přispívající částí hamiltoniánu bude

$$\hat{H}^{(2)}_{int} = \frac{e^2}{2m} N_{k_f} N_{k_i}\, \vec{e}_{\vec{k}_f,\sigma_f}\, \vec{e}_{\vec{k}_i,\sigma_i} \Big(\hat{a}_{\vec{k}_i,\sigma_i}\, \hat{a}^{+}_{\vec{k}_f,\sigma_f} + \hat{a}^{+}_{\vec{k}_f,\sigma_f}\, \hat{a}_{\vec{k}_i,\sigma_i} \Big)\, e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f)\vec{r}} \quad .$$

Pravděpodobnost přechodu za jednotku času je potom

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}\, |\langle f|\, \hat{H}^{(2)}_{int}\, |i\rangle|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e^2\hbar}{2m\epsilon_0 V} \right)^2 \frac{n_{\vec{k}_i,\sigma_i} (n_{\vec{k}_f,\sigma_f} + 1)}{\omega_{k_i}\omega_{k_f}}$$

$$\left(\vec{e}_{\vec{k}_i,\sigma_i} . \vec{e}_{\vec{k}_f,\sigma_f}\right)^2 |\langle \vec{q}_f| e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f)\vec{r}}\, |\vec{q}_i\rangle|^2\, \delta(\hbar\omega_{k_i} + E_i - E_f - \hbar\omega_{k_f}) =$$

$$\frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e^2\hbar}{2m\epsilon_0 V} \right)^2 \frac{n_{\vec{k}_i,\sigma_i} (n_{\vec{k}_f,\sigma_f} + 1)}{\omega_{k_i}\omega_{k_f}}$$

$$\left(\vec{e}_{\vec{k}_i,\sigma_i} . \vec{e}_{\vec{k}_f,\sigma_f}\right)^2 \delta_{\vec{q}_i + \vec{k}_i, \vec{q}_f + \vec{k}_f}\, \delta(\hbar\omega_{k_i} + E_i - E_f - \hbar\omega_{k_f}) \quad .$$

V dalším uvažujeme $n_f = 0$, a pro účinný průřez rozptylu nepolarizovaného elektromagnetického záření volným elektronem σ

$$\sigma = \frac{1}{J_i} \sum_{\substack{\vec{k}_f,\sigma_f \\ \vec{q}_f,\sigma_i}} w(n_{\vec{k}_f,\sigma_f} = 0) \quad , \quad J_i = \frac{n_i c}{V}$$

dostáváme

$$\sigma = \frac{e^4\hbar}{16\pi^2 m^2 \epsilon_0^2 c} \sum_{\sigma_i,\sigma_f} \int d^3\vec{k}_f \frac{\left(\vec{e}_{\vec{k}_i,\sigma_i} . \vec{e}_{\vec{k}_f,\sigma_f}\right)^2}{\omega_{k_i}\omega_{k_f}}\, \delta(\hbar\omega_{k_i} + E_i - E_f - \hbar\omega_{k_f}) \; ,$$

$$E_i = \left(\hbar^2 q_i^2 c^2 + m^2 c^4\right)^{1/2} \; , \; E_f = \left(\hbar^2 q_f^2 c^2 + m^2 c^4\right)^{1/2} \; ,$$

$$\vec{q}_f = \vec{k}_i + \vec{q}_i - \vec{k}_f \; .$$

Pro výpočet předpokládáme, že elektron má v počátečním stavu zanedbatelný impuls a zvolíme orientaci vektorů

$$\vec{k}_i = \frac{\omega_i}{c}(0,0,1) \ , \ \vec{e}_{\vec{k}_i,1} = (1,0,0) \ , \ \vec{e}_{\vec{k}_i,2} = (0,1,0) \ ,$$

$$\vec{k}_f = \frac{\omega_f}{c}(\sin\theta, 0, \cos\theta) \ , \ \vec{e}_{\vec{k}_f,1} = (\cos\theta, 0, -\sin\theta) \ ,$$

$$\vec{e}_{\vec{k}_f,2} = (0,1,0) \ .$$

Výraz pro účinný průřez se zjednoduší na

$$\sigma = \frac{e^4\hbar}{8\pi m^2\epsilon_0^2 c^4\omega_i}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega_f \omega_f \int_0^\pi \mathrm{d}(\cos\theta)\,(1+\cos^2\theta)\ \delta(\hbar(\omega_i-\omega_f)+mc^2-E_f) \ ,$$

$$E_f = \left(m^2c^4+\hbar^2(\omega_f^2+\omega_i^2-2\,\omega_f\omega_i\cos\theta)\right)^{1/2} \ .$$

S využitím vztahu

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \quad , \quad f(x_i) = 0$$

se výraz pro účinný průřez dále zjednoduší na

$$\sigma = \frac{e^4}{8\pi m^2\epsilon_0^2 c^4}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega_f \int_0^\pi \mathrm{d}(\cos\theta)\,(1+\cos^2\theta) \left(1 + \frac{\left(\frac{\hbar\omega_i}{mc^2}\right)^2(1-\cos\theta)}{1+\frac{\hbar\omega_i}{mc^2}(1-\cos\theta)} \right)$$

$$\delta\left(\omega_f - \frac{\omega_i}{1+\frac{\hbar\omega_i}{mc^2}(1-\cos\theta)} \right) \ .$$

1.7. Čerenkovovo záření.

V nerelativistické teorii popisuje tento jev lineární část interakčního hamiltoniánu, přičemž počáteční $|\,i\rangle$ a koncový $|f\rangle$ stav je

$$|\,i\,\rangle = |\vec{q}\,\rangle_{el}\,|n_{\vec{k},\sigma}\rangle_{rad} \quad , \quad |f\rangle = |\vec{q}-\vec{k}\,\rangle_{el}\,|n_{\vec{k},\sigma}+1\,\rangle_{rad} \ .$$

Pravděpodobnost přechodu za jednotku času w je podle Fermiho pravidla

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \, |\langle f| \hat{H}^{(1)}_{int} |i\rangle|^2 =$$

$$\frac{\pi e^2 (n_{\vec{k},\sigma}+1)}{m^2 \epsilon_0 \omega_k V \dfrac{\epsilon \, \mathrm{d}(\omega_k n)}{n \, \mathrm{d}\omega_k}} |\langle \vec{q}-\vec{k}| e^{-i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_{\vec{k},\sigma}.\hat{\vec{p}}|\vec{q}\rangle|^2 \, \delta(E_{\vec{q}} - E_{\vec{q}-\vec{k}} - \hbar\omega_k) =$$

$$\frac{\pi e^2 \hbar^2 (n_{\vec{k},\sigma}+1)}{m^2 \epsilon_0 \omega_k V \dfrac{\epsilon \, \mathrm{d}(\omega_k n)}{n \, \mathrm{d}\omega_k}} \left(\vec{q}.\vec{e}_{\vec{k},\sigma}\right)^2 \delta(E_{\vec{q}} - E_{\vec{q}-\vec{k}} - \hbar\omega_k) \quad .$$

Pro výpočet vyzářeného výkonu

$$W(\vec{q}) = \sum_{\vec{k},\sigma} \hbar\omega_k w(\vec{q} \to \vec{q}-\vec{k})$$

zvolíme orientaci vektorů

$$\vec{q} = q(0,0,1) \; , \; \vec{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta) \; ,$$

$$\vec{e}_{\vec{k},1} = (\cos\theta, 0, -\sin\theta) \; , \; \vec{e}_{\vec{k},2} = (0,1,0) \; .$$

Pro vyzářený výkon dostáváme výraz

$$W(\vec{q}) = \frac{e^2 q}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^4} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \, \mu(\omega) \hbar\omega \, |\hbar\omega - (\hbar^2 q^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}|$$

$$\int_0^\pi \mathrm{d}(\cos\theta) \, \sin^2\theta \, \delta(\cos\theta - \cos\theta_{cr}) \quad ,$$

$$\cos\theta_{cr} = \frac{(\hbar^2 q^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}}{n(\omega)\hbar q c} \left(1 + \frac{(n(\omega)^2 - 1)\hbar\omega}{2(\hbar^2 q^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}} \right) \quad .$$

2. Relativistická teorie - bosony.

2.1. Vlnová rovnice pro částice se spinem 0.

V této a následující kapitole zvolíme jednotky takové, že $c = \hbar = 1$. Stav volné částice (bez spinu) je plně charakterizován impulzem $\vec{p}$, přitom energie ϵ je

$$\epsilon^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \quad , \quad g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 \quad .$$

Užíváme sumační konvence a obvyklého značení čtyřrozměrných geometrických veličin

$$\left(g_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad x_\mu = \left(t, -\vec{r}\right) \quad , \quad x^\mu = \left(t, \vec{r}\right) \quad .$$

Operátor čtyřimpulzu je

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}\right) \quad ,$$

$$\hat{p}_\mu = i\partial_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, i\vec{\nabla}\right) \quad .$$

Vlnovou rovnici získáme konstrukcí relativisticky invariantních výrazů z $\boldsymbol{p}^\mu$, $\boldsymbol{p}_\mu$ a m

$$\hat{p}_\mu \psi = m\psi_\mu \quad , \quad \hat{p}^\mu \psi_\mu = m\psi \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m^2\right)\psi = 0 \quad .$$

2.2. Tensor energie-impulzu.

Pohybové rovnice pro pole odvozujeme z variačního principu

$$\delta S = \delta \int_\Omega L(q^A, q^A{}_{,\mu})\, \mathrm{d}\Omega = 0 \quad ,$$

$$\int_\Sigma \frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,\mu}} \delta q^A \, \mathrm{d}\Sigma_\mu + \int_\Omega \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,\mu}} \right) \right\} \delta q^A \, \mathrm{d}\Omega = 0 \quad .$$

Lagrangián, který dává vlnovou rovnici jako pohybovou rovnici variačního principu je

$$L = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi \quad .$$

Teorém Noetherové říká, že každé spojité s-parametrické transformaci souřadnic a funkcí pole, která vede k nulové variaci účinku, odpovídá s kombinací funkcí pole a jejich derivací, které se v čase nemění. Uvažujme

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu \quad , \quad q^A(x) \rightarrow q^{A\prime}(x^\prime) = q^A(x) + \delta q^A(x) \quad ,$$

$$\delta x^\mu = X^\mu_n(x)\,\delta\omega^n \quad , \quad \delta q^A(x) = Q^A_n(x)\,\delta\omega^n \quad .$$

Takto definované variace funkcí pole nejsou užitečné, protože obecně nekomutují s derivacemi podle souřadnic. Proto definujeme redukované variace

$$\delta q^A(x) = q^{A\prime}(x^\prime) - q^A(x) = \bar{\delta} q^A(x) + q^A{}_{,\mu}(x)\,\delta x^\mu \quad ,$$

$$\bar{\delta} q^A(x) = q^{A\prime}(x) - q^A(x) = \left(Q_n^A(x) - X_n^\mu(x)\, q^A{}_{,\mu}(x)\right)\delta\omega^n \quad .$$

Pro variaci účinku dostáváme

$$\delta S = \int_\Omega L^\prime(q^{A\prime}, q^{A\prime}{}_{,\mu})\,\mathrm{d}\Omega^\prime - \int_\Omega L(q^A, q^A{}_{,\mu})\,\mathrm{d}\Omega =$$

$$\int_\Omega \left[L(x) + \bar{\delta} L(x) + \frac{\partial L(x)}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu \right] \mathrm{d}\Omega^\prime - \int_\Omega L(x)\,\mathrm{d}\Omega \quad .$$

Poněvadž pro objemový element je

$$\mathrm{d}\Omega^\prime = \frac{\partial(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\,\mathrm{d}\Omega = \left(1 + \frac{\partial\,\delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right)\mathrm{d}\Omega \quad ,$$

můžeme psát

$$\delta S = \int_\Omega \left[\bar{\delta} L(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(L(x)\,\delta x^\mu\right) \right] \mathrm{d}\Omega =$$

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial q^A}\,\bar{\delta} q^A + \frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,\mu}}\,\bar{\delta} q^A{}_{,\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(L\,\delta x^\mu\right) \right] \mathrm{d}\Omega =$$

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,\mu}}\,\bar{\delta} q^A + L\,\delta x^\mu \right] \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,\mu}} \right] \bar{\delta} q^A\,\mathrm{d}\Omega \quad .$$

Jsou-li splněny pohybové rovnice, dostáváme konečné vyjádření změny účinku

$$\delta S = -\int_\Omega \partial_\mu \Theta_n^\mu(x)\,\delta\omega^n\,\mathrm{d}\Omega \quad ,$$

$$\Theta_n^\mu(x) = -\frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,\mu}}\left(Q_n^A - X_n^\rho\, q^A{}_{,\rho}\right) - L X_n^\mu \quad .$$

Jestliže se účinek nezmění, dostáváme diferenciální zákony zachování. Integrální tvar dostaneme z Gaussovy věty, předpokládáme-li hranici čtyřrozměrné oblasti ve tvaru "válce", kde podstavami jsou nadroviny s *t=const.* Potom pro *s* veličin C_n platí zákon zachování

$$C_n = \int_V \Theta_n^0(x)\,\mathrm{d}V \quad , \quad \frac{\mathrm{d}C_n}{\mathrm{d}t} = 0 \quad .$$

Tensor energie-impulzu dostaneme při transformaci, odpovídající translaci souřadnic

$$X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu \quad , \quad Q_\nu^A = 0 \quad , \quad T_\nu^\mu(x) = q^A{}_{,\nu}\,\frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,\mu}} - L\,\delta_\nu^\mu \quad .$$

Vektor proudu dostaneme při transformaci, odpovídající změně fáze

$$X^{\mu} = 0 \quad , \quad Q^{A} = iq^{A} \quad , \quad j^{\mu}(x) = i\left(q^{*A} \frac{\partial L}{\partial q^{*A}{}_{,\mu}} - q^{A} \frac{\partial L}{\partial q^{A}{}_{,\mu}} \right) \ .$$

Lagrangiánu pro skalární pole přísluší pak tenzor energie-impulzu a vektor proudu

$$T^{\mu}_{\nu} = \partial^{\mu}\psi^{*}\partial_{\nu}\psi + \partial^{\mu}\psi\,\partial_{\nu}\psi^{*} + \left(m^{2}\psi\psi^{*} - \partial_{\rho}\psi^{*}\partial^{\rho}\psi\right)\delta^{\mu}_{\nu} \quad ,$$

$$j^{\mu} = i\left(\psi^{*}\partial^{\mu}\psi - \psi\partial^{\mu}\psi^{*}\right) \quad .$$

2.3. Částice a antičástice.

Vlnová funkce, normovaná na jednu částici v jednotkovém objemu je

$$\psi_{p} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \quad .$$

Podle obecného postupu při druhém kvantování napíšeme rozklad obecné vlnové funkce a funkce k ní komplexně sdružené podle úplného souboru stavů volné částice, např. rovinných vln a nahradíme koeficienty rozkladu funkce anihilačními operátory a koeficienty rozkladu funkce komplexně sdružené kreačními operátory. Problémem jsou však stavy se zápornou energií: zjevně nemají fyzikální význam, ale na druhé straně obecné řešení dostaneme pouze jako superposici všech nezávislých parciálních řešení. Je třeba změnit interpretaci. Napišme

$$\psi = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\left(a^{(+)}_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{r} - \epsilon t)} + a^{(-)}_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{r} + \epsilon t)} \right) \quad , \quad \epsilon = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^{2}} \ .$$

Při kvantování provedeme záměnu

$$a^{(+)}_{\vec{p}} \rightarrow \hat{a}_{\vec{p}} \quad , \quad a^{(-)}_{\vec{p}} \rightarrow \hat{b}^{+}_{-\vec{p}} \quad .$$

Tato záměna odpovídá interpretaci "anihilace volné částice se zápornou energií = kreace volné antičástice s kladnou energií". Budeme tedy mít

$$\psi = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + \hat{b}^{+}_{\vec{p}} e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right) \quad ,$$

$$\psi^{+} = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\left(\hat{a}^{+}_{\vec{p}} e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + \hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right) \quad .$$

Po dosazení do výrazu pro vektor energie-impulzu a do výrazu pro celkový náboj dostáváme

$$\hat{H} = \hat{P}_{0} = \int \hat{T}^{0}_{0}\, \mathrm{d}V = \int \left(\frac{\partial \psi^{+}}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\nabla}\psi^{+}\vec{\nabla}\psi + m^{2}\psi^{+}\psi \right) \mathrm{d}V \quad ,$$

$$\hat{P}_{i} = \int \hat{T}^{0}_{i}\, \mathrm{d}V = \int \left(\frac{\partial \psi^{+}}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x^{i}} + \frac{\partial \psi^{+}}{\partial x^{i}}\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \mathrm{d}V \quad ,$$

$$\hat{Q} = \int \hat{j}^{0}\, \mathrm{d}V = \int \left(\psi^{+}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^{+}}{\partial t}\psi \right) \mathrm{d}V \quad .$$

Vyjádříme-li teď operátor vlnové funkce pomocí rozkladu podle rovinných vln, dostáváme

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \epsilon_k \left(\hat{a}^+_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}} \hat{b}^+_{\vec{k}} \right) \quad ,$$

$$\hat{P}_i = \sum_{\vec{k}} p_i \left(\hat{a}^+_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}} \hat{b}^+_{\vec{k}} \right) \quad ,$$

$$\hat{Q} = \sum_{\vec{k}} \left(\hat{a}^+_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} - \hat{b}_{\vec{k}} \hat{b}^+_{\vec{k}} \right) \quad .$$

S využitím komutačních relací a operátorů počtu částic

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^+_{\vec{k}}] = [\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^+_{\vec{k}}] = \hat{1} \quad , \quad \hat{N}_{\vec{k}} = \hat{a}^+_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} \quad , \quad \hat{\bar{N}}_{\vec{k}} = \hat{b}^+_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}}$$

dostáváme výrazy

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p}} \epsilon_p \left(\hat{N}^+_{\vec{p}} + \hat{\bar{N}}_{\vec{p}} \right) \; , \; \hat{P}_i = \sum_{\vec{p}} p_i \left(\hat{N}^+_{\vec{p}} + \hat{\bar{N}}_{\vec{p}} \right) \; , \; \hat{Q} = \sum_{\vec{p}} \left(\hat{N}^+_{\vec{p}} - \hat{\bar{N}}_{\vec{p}} \right) \; .$$

Ve specielním případě nemusí k rozlišení částic a antičástic dojít, je pak

$$\psi = \psi^+ = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \left(\hat{c}_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{c}^+_{\vec{p}} e^{ip_\mu x^\mu} \right) \quad .$$

Lagrangeův operátor je v tomto případě

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - m^2 \psi^2 \right) \quad .$$

3. Druhé kvantování.

3.1. Základní popis.

Buď $\{\hat{K}_i\}$ soubor operátorů odpovídající úplnému souboru dynamických proměnných. Soubor vlastních hodnot $\{K_i\}$ jednoznačně určuje fyzikální stav. Stav soustavy identických částic je jednoznačně určen souborem $\{n_i\}$, kde n_i udává, kolik částic je ve stavu určeném K_i. Soubor komutujících operátorů $\{\hat{N}_i\}$, jejichž vlastními hodnotami jsou $\{n_i\}$, poskytuje také úplný popis soustavy. Hilbertův prostor stavových vektorů soustavy identických částic je nazýván Fockův prostor. Mějme vakuový a jednočásticový stav

$$|\Psi^{(0)}\rangle = |0,\ldots.\rangle \quad ,$$

$$|\Psi^{(1)}_i\rangle = |0,..,0,n_i{=}1,0,..\rangle = |K_i\rangle \quad .$$

Přirozeným způsobem zavedeme působení anihilačního a kreačního operátoru

$$\hat{a}_i\,|\,..n_i..\rangle \propto |\,..n_i-1..\rangle \quad , \quad \hat{a}_i\,|\,\Psi_i^{(1)}\rangle = |\,\Psi^{(0)}\rangle \quad ,$$

$$\hat{a}_i^{+}\,|\,..n_i..\rangle \propto |\,..n_i+1..\rangle \quad , \quad \hat{a}_i^{+}\,|\,\Psi^{(0)}\rangle = |\,\Psi_i^{(1)}\rangle \quad ,$$

$$\hat{a}_i\,|\,\Psi^{(0)}\rangle = 0 \quad , \quad \hat{a}_{j\neq i}\,|\,\Psi_i^{(1)}\rangle = 0 \quad .$$

Takto zavedené operátory $\hat{a}_i$a $\hat{a}_i^{+}$ jsou Hermiteovsky sdružené. Uvažujme jiný soubor operátorů odpovídající úplnému souboru dynamických proměnných, spojený s původním transformačními vztahy vlastních vektorů

$$|\,K_i\rangle = \sum_q |\,L_q\rangle\langle L_q\,|\,K_i\rangle = \sum_q |\,L_q\rangle\, C_{qi} \quad ,$$

$$\langle K_j\,| = \sum_q \langle K_j\,|\,L_q\rangle\langle L_q\,| = \sum_q C_{qj}^{*}\langle L_q\,| \quad ,$$

$$\langle K_j\,|\,K_i\rangle = \delta_{ij} = \sum_q c_{qj}^{*}\, c_{qi} \quad .$$

Transformační vztahy pro kreační a anihilační operátory

$$\hat{a}_i^{+}\,|\,\Psi^{(0)}\rangle = |\,K_i\rangle = \sum_q |\,L_q\rangle\, C_{qi} = \sum_q \hat{b}_q^{+}\, C_{qi}\,|\,\Psi^{(0)}\rangle \quad ,$$

$$\hat{a}_i\,|\,K_j\rangle = \delta_{ij}\,|\,\Psi^{(0)}\rangle = \sum_{q,r} C_{qi}^{*}\, C_{rj}\,\delta_{qr}\,|\,\Psi^{(0)}\rangle =$$

$$\sum_q \hat{b}_q C_{qi}^{*} \sum_r C_{rj}\,|\,L_r\rangle = \sum_q \hat{b}_q\, C_{qi}^{*}\,|\,K_j\rangle \quad ,$$

jsou přirozeně transformačními vztahy hermiteovsky sdruženými

$$\hat{a}_i^{+} = \sum_q \hat{b}_q^{+}\, C_{qi} \quad , \quad \hat{a}_i = \sum_q \hat{b}_q\, C_{qi}^{*} \quad .$$

Nenulové elementy matice anihilačního a kreačního operátoru jsou

$$\langle ..n_i-1..\,|\,\hat{a}_i|\,..n_i..\rangle = \langle ..n_i..\,|\,\hat{a}_i^{+}\,|\,..n_i-1..\rangle^{*} \quad .$$

3.2. Komutační relace.

Postupné působení dvou anihilačních operátorů různých jednočásticových stavů vede k témuž fyzikálnímu stavu soustavy, takže stavové vektory se mohou odlišovat pouze faktorem. To musí platit nezávisle na zvolené reprezentaci, takže máme

$$i \neq j \quad : \quad \hat{a}_i\,\hat{a}_j\,|\,\Psi\rangle = N_{ij}\,\hat{a}_j\,\hat{a}_i\,|\,\Psi\rangle \quad ,$$

$$\left(\hat{a}_i\,\hat{a}_j - N_{ij}\,\hat{a}_j\,\hat{a}_i\right)|\,\Psi\rangle = \sum_{qr} C_{qi}^{*} C_{rj}^{*}\left(\hat{b}_q\,\hat{b}_r - N_{ij}\hat{b}_r\,\hat{b}_q\right)|\,\Psi\rangle = 0 \quad ,$$

$$N_{ij} = N = \pm\, 1 \quad .$$

Obdobně pro postupné působení dvou kreačních operátorů různých jednočásticových stavů máme

$$i \neq j \quad : \quad \hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ \,|\,\Psi\rangle \;=\; N_{ij}\, \hat{a}_j^+ \hat{a}_i^+ \,|\,\Psi\rangle \quad ,$$

$$\left(\hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ - N_{ij}\, \hat{a}_j^+ \hat{a}_i^+\right)|\,\Psi\rangle \;=\; \sum_{qr} C_{qi} C_{rj} \left(\hat{b}_q^+ \hat{b}_r^+ - N_{ij}\, \hat{b}_r^+ \hat{b}_q^+\right)|\,\Psi\rangle \;=\; 0 \quad ,$$

$$N_{ij} \;=\; N \;=\; \pm\, 1 \quad .$$

Nakonec při postupném působení kreačního a anihilačního operátorů různých jednočásticových stavů dostáváme

$$i \neq j \quad : \quad \hat{a}_i \hat{a}_j^+ \,|\,\Psi\rangle \;=\; N_{ij}\, \hat{a}_j^+ \hat{a}_i \,|\,\Psi\rangle \quad ,$$

$$\left(\hat{a}_i \hat{a}_j^+ - N_{ij}\, \hat{a}_j^+ \hat{a}_i\right)|\,\Psi\rangle \;=$$

$$\sum_{qr} C_{qi}^* C_{rj} \left(\hat{b}_q \hat{b}_r^+ - N_{ij}\, \hat{b}_r^+ \hat{b}_q + \delta_{qr}\, \hat{1}\right)|\,\Psi\rangle \;=\; 0 \quad ,$$

$$N_{ij} \;=\; N \;=\; \pm\, 1 \quad , \quad \hat{b}_q \hat{b}_q^+ - N \hat{b}_q^+ \hat{b}_q \;=\; \hat{1} \quad .$$

Při odvozovaní jsme vycházeli z nezávislosti koeficientů transformační matice C_{ij} až na podmínku unitárnosti, kterou jsme pak užili při odvození poslední relace. Můžeme tedy shrnout odvozené vztahy. Pro bosony máme komutační relace

$$\hat{a}_i \hat{a}_j^+ \;-\; \hat{a}_j^+ \hat{a}_i \;=\; \delta_{ij}\, \hat{1} \quad ,$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_j \;-\; \hat{a}_j \hat{a}_i \;=\; 0 \quad , \quad \hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ \;-\; \hat{a}_j^+ \hat{a}_i^+ \;=\; 0 \quad .$$

Působení anihilačního a kreačního operátoru je dáno vztahy

$$\hat{a}_i \,|\, ..n_i..\rangle \;=\; \sqrt{n_i}\,|\, ..n_i - 1\, ..\rangle \quad ,$$

$$\hat{a}_i^+ \,|\, ..n_i..\rangle \;=\; \sqrt{n_i + 1}\,|\, ..n_i + 1\, ..\rangle \quad .$$

Pro fermiony máme antikomutační relace

$$\hat{a}_i \hat{a}_j^+ \;+\; \hat{a}_j^+ \hat{a}_i \;=\; \delta_{ij}\, \hat{1} \quad ,$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_j \;+\; \hat{a}_j \hat{a}_i \;=\; 0 \quad , \quad \hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ \;+\; \hat{a}_j^+ \hat{a}_i^+ \;=\; 0 \quad .$$

Působení anihilačního a kreačního operátoru je dáno vztahy

$$\hat{a}_i \,|\, ..n_i..\rangle \;=\; (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} n_j} \sqrt{n_i}\,|\, ..1 - n_i..\rangle \quad ,$$

$$\hat{a}_i^+ \,|\, ..n_i..\rangle \;=\; (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} n_j} \sqrt{1 - n_i}\,|\, ..1 - n_i..\rangle \quad .$$

3.3. Dynamické proměnné.

Vyjádření operátoru jednočásticové veličiny pomocí operátorů počtu částic je

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_a \hat{f}_a^{(1)} = \sum_i f_i^{(1)} \hat{N}_i = \sum_i f_i^{(1)} \hat{a}_i^+ \hat{a}_i =$$

$$\sum_{i,k,l} \langle g_k | f_i \rangle f_i^{(1)} \langle f_i | g_l \rangle \hat{b}_k^+ \hat{b}_l = \sum_{kl} \langle g_k | \hat{f}^{(1)} | g_l \rangle \hat{b}_k^+ \hat{b}_l \quad .$$

Pro operátor dvoučásticové veličiny máme

$$\hat{F}^{(2)} = \sum_{a>b} \hat{f}_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij}^{(2)} \left(\hat{N}_i \hat{N}_j - \hat{N}_i \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij}^{(2)} \hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ \hat{a}_j \hat{a}_i =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ klmn}} \langle g_k | f_i \rangle \langle g_l | f_j \rangle f_{ij}^{(2)} \langle f_j | g_m \rangle \langle f_i | g_n \rangle \hat{b}_k^+ \hat{b}_l^+ \hat{b}_m \hat{b}_n =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{klmn} \langle g_k | \langle g_l | \hat{f}^{(2)} | g_m \rangle | g_n \rangle \hat{b}_k^+ \hat{b}_l^+ \hat{b}_m \hat{b}_n \quad .$$

Pro reprezentaci operátorů, u kterých známe vyjádření v souřadnicové reprezentaci, je výhodné zavést operátory vlnové funkce $\hat{\Psi}$ operátory). Máme

$$\hat{\Psi}(\xi) = \sum_i \psi_i(\xi) \hat{a}_i \ , \ \hat{\Psi}^+(\xi) = \sum_i \psi_i^*(\xi) \hat{a}_i^+ \ , \ \psi_i(\xi) = \langle \xi | K_i \rangle \quad ,$$

$$\delta(\xi - \xi_0) = \langle \xi | \hat{1} | \xi_0 \rangle = \sum_i \langle \xi | K_i \rangle \langle K_i | \xi_0 \rangle = \sum_i \psi_i^*(\xi) \psi_i(\xi_0) \ .$$

Pro bosony

$$\hat{\Psi}(\xi) \hat{\Psi}(\xi') - \hat{\Psi}(\xi') \hat{\Psi}(\xi) = \hat{\Psi}^+(\xi) \hat{\Psi}^+(\xi') - \hat{\Psi}^+(\xi') \hat{\Psi}^+(\xi) = 0 \ ,$$

$$\hat{\Psi}(\xi) \hat{\Psi}^+(\xi') - \hat{\Psi}^+(\xi') \hat{\Psi}(\xi) = \delta(\xi - \xi')$$

a pro fermiony

$$\hat{\Psi}(\xi) \hat{\Psi}(\xi') + \hat{\Psi}(\xi') \hat{\Psi}(\xi) = \hat{\Psi}^+(\xi) \hat{\Psi}^+(\xi') + \hat{\Psi}^+(\xi') \hat{\Psi}^+(\xi) = 0 \ ,$$

$$\hat{\Psi}(\xi) \hat{\Psi}^+(\xi') + \hat{\Psi}^+(\xi') \hat{\Psi}(\xi) = \delta(\xi - \xi') \quad .$$

Příslušné n-částicové operátory pak napíšeme jako

$$\hat{F}^{(n)} = \frac{1}{n!} \int \cdot\cdot \int$$

$$\hat{\Psi}^+(\xi_1) \cdot\cdot \hat{\Psi}^+(\xi_n) \hat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \hat{\Psi}(\xi_n) \cdot\cdot \hat{\Psi}(\xi_1) \, \mathrm{d}\xi_1 \cdot\cdot \mathrm{d}\xi_n \quad .$$

Například operátor počtu částic je

$$\hat{N} = \int \hat{\Psi}^+(\xi) \hat{\Psi}(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

a Hamiltonův operátor nerelativistické teorie

$$\hat{H} = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\hat{\Psi}^{+}(\xi)\,\vec{\nabla}\Psi(\xi) + \hat{\Psi}^{+}(\xi)\,U^{(1)}(\xi)\,\hat{\Psi}(\xi) \right) d\xi \; +$$

$$\frac{1}{2}\int\int \hat{\Psi}^{+}(\xi)\,\hat{\Psi}^{+}(\xi')\,U^{(2)}(\xi,\xi')\,\hat{\Psi}(\xi')\,\hat{\Psi}(\xi)\,d\xi\,d\xi' + \ldots$$

Obecný n-částicový stav lze zapsat jako

$$|\,\Phi\,\rangle = \int\ldots\int f(\xi_1',\ldots,\xi_n')\,|\,\Psi(\xi_1',\ldots\xi_n')\,\rangle\,d\xi_1'\ldots d\xi_n' \quad ,$$

$$|\,\Psi(\xi_1,\ldots\xi_n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\hat{\Psi}^{+}(\xi_1)\ldots\hat{\Psi}^{+}(\xi_n)\,|\,\Psi^{(0)}\rangle \quad .$$

Vlnová funkce je pak vzhledem k (anti)komutačním relacím

$$\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \langle\Psi(\xi_1,\ldots\xi_n)\,|\,\Phi\,\rangle =$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{\{P_n\}} sgn(P_n)\,f(\xi_1,\ldots,\xi_n) \quad ,$$

kde se sčítá přes všechny permutace, $sgn(P_n) = 1$ pro sudé i liché permutace u bosonů a pro sudé permutace u fermionů a $sgn(P_n) = -1$ pro liché permutace u fermionů.

4. Relativistická teorie - fermiony.

4.1. Vlastnosti spinorů.

Pauliho matice

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

V trojrozměrném případě je operace inverse provedaná dvakrát návratem k původní souřadné soustavě, proto u tensorových veličin je $P^2 = 1$. U trojrozměrných spinorů mohou nastat (rotace o 0^o a 360^o nejsou ekvivalentní) dvě možnosti

$$\hat{P}^2 = 1 \;\Rightarrow\; \hat{P} = \pm 1 \quad , \quad \hat{P}^2 = -1 \;\Rightarrow\; \hat{P} = \pm i \quad .$$

Ve čtyřrozměrném prostoru však prostorová inverse mění znaménko pouze tří *(x, y, z)* ze čtyř *(t, x, y, z)* prostoročasových souřadnic a nekomutuje tedy s rotacemi souřadnic, které obsahují časovou osu. Speciálně pro Lorentzovu transformaci

$$\hat{P}\,\hat{L}(\vec{V}) = \hat{L}(-\vec{V})\,\hat{P} \quad .$$

Při transformaci z vlastní Lorentzovy grupy transformuje se spinor jako

$$\xi'^{1} = \alpha\,\xi^1 + \beta\,\xi^2 \quad , \quad \xi'^{2} = \gamma\,\xi^1 + \delta\,\xi^2 \quad ,$$

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1 \quad .$$

Koeficienty α, β, γ a δ jsou funkcemi úhlů rotace čtyřrozměrné souřadné soustavy. Bilineární forma

$$\xi^1\,\Xi^2 - \xi^2\,\Xi^1$$

je invariantem (částice se spinem nula, složená ze dvou částic se spinem 1/2). Je užitečné zavést zápis

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_A = g_{AB}\, \xi^B \quad .$$

Potom můžeme psát

$$\xi^A\, \Xi_A = -\, \xi_A\, \Xi^A = \text{invariant}$$

V nerelativistické teorii určuje $\psi^1 \psi^{1\,*} + \psi^2 \psi^{2\,*}$ hustotu pravděpodobnosti, a je tedy skalární veličinou, proto musí být spinorová transformace unitární (α=δ^*, β=-γ^*). V relativistické teorii je hustota pravděpodobnosti časupodobnou složkou čtyřvektoru a podmínka unitarity nevzniká. Proto musíme uvažovat dvojici spinorů ξ a η, transformujících se podle komplexně sdružených representací Lorentzovy grupy

$$\eta^{\dot{1}/} = \alpha^*\, \eta^{\dot{1}} + \beta^*\, \eta^{\dot{2}} \quad , \quad \eta^{\dot{2}/} = \gamma^*\, \eta^{\dot{1}} + \delta^*\, \eta^{\dot{2}} \quad ,$$

$$\eta_{\dot{A}} = g_{\dot{A}\dot{B}}\, \eta^{\dot{B}} \quad .$$

Pro operátory inverse je pak (volíme $P^2 = -1$)

$$\hat{P}\, \xi^A = i\, \eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\, \eta_{\dot{A}} = i\, \xi^A$$

neboli

$$\hat{P}\, \xi_A = -\, i\, \eta^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\, \eta^{\dot{A}} = -\, i\, \xi_A \quad .$$

Dvojice bispinorů representuje mimo jiné skalární a vektorové veličiny. Máme pak pro skalární veličiny (skalár a pseudoskalár)

$$(\xi^A, \eta_{\dot{A}})\ ,\ (\Xi^A, \mathrm{H}_{\dot{A}}) \ :\ \zeta = \xi^A\, \Xi_A + \eta_{\dot{A}}\, \mathrm{H}^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\, \zeta = \zeta \quad ,$$

$$\zeta = \xi^A\, \Xi_A - \eta_{\dot{A}}\, \mathrm{H}^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\, \zeta = -\, \zeta \quad .$$

Pro vektorové veličiny

$$(\xi^A, \eta_{\dot{A}})\ ,\ (\Xi^A, \mathrm{H}_{\dot{A}}) \ :\ \zeta^{A\dot{B}} = \xi^A\, \mathrm{H}^{\dot{B}} + \Xi^A\, \eta^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\, \zeta^{A\dot{B}} = \zeta_{\dot{A}B} \quad ,$$

$$\zeta^{A\dot{B}} = \xi^A\, \mathrm{H}^{\dot{B}} - \Xi^A\, \mathrm{H}^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\, \zeta^{A\dot{B}} = -\, \zeta_{\dot{A}B} \quad .$$

Vzhledem k relacím

$$\zeta = \left(\zeta^{A\dot{B}}\right) = \vec{a}.\vec{\sigma} + a_0 \quad , \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\, Tr(\zeta\, \vec{\sigma}) \quad , \quad a^0 = \frac{1}{2}\, Tr(\zeta)$$

odpovídá první případ čtyřrozměrnému vektoru (s trojrozměrným polárním vektorem) a druhý případ čtyřrozměrnému pseudovektoru (s trojrozměrným axiálním vektorem)

$$\hat{P}\,(a^0, \vec{a}) = (a^0, -\vec{a}) \quad , \quad \hat{P}\,(a^0, \vec{a}) = (-a^0, \vec{a}) \quad .$$

4.2. Lorentzova transformace spinorů.

Vztahů mezi bispinorem ς a čtyřvektorem a^{μ} využijeme pro nalezení konkretního tvaru koeficientů transformace. Označme

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^{\dot 1} & \eta^{\dot 2} \end{pmatrix} \quad , \quad \varsigma = \begin{pmatrix} \varsigma^{1\dot 1} & \varsigma^{1\dot 2} \\ \varsigma^{2\dot 1} & \varsigma^{2\dot 2} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\xi' = L\,\xi \quad , \quad \eta' = \eta\, L^{+} \quad , \quad \varsigma' = L\,\varsigma\, L^{+} \quad .$$

Pro infinitesimální transformaci píšeme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \quad , \quad \varsigma' = \varsigma + \lambda\varsigma + \varsigma\lambda^{+} \quad .$$

Při infinitesimální Lorentzově transformaci máme jednak

$$\vec{a}' = \vec{a} - a^0 \vec{n}\,\delta V = \vec{a} - \frac{1}{2}\delta V \operatorname{Tr}(\varsigma\vec{n}) \quad ,$$

$$a'^0 = a^0 - \vec{a}\,.\,\vec{n}\,\delta V = a^0 - \frac{1}{2}\delta V \operatorname{Tr}(\varsigma\vec{\sigma}\vec{n})$$

a také (při počítání stopy lze zaměnit pořadí matic)

$$\vec{a}' = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\varsigma'\vec{\sigma}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\varsigma(\vec{\sigma}\lambda + \lambda^{+}\vec{\sigma})\right) \quad ,$$

$$a'^0 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\varsigma') = a^0 + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\varsigma(\lambda + \lambda^{+})\right) \quad .$$

Porovnáním obou zápisù dostaneme

$$\lambda = \lambda^{+} = -\frac{1}{2}\delta V \vec{\sigma}\,.\,\vec{n} \quad .$$

S využitím vztahu

$$(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mùžeme psát pro konečné velikosti rychlosti

$$L = \exp\left\{-\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\vec{n}\right\} = \cosh\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sinh\frac{\phi}{2}\vec{\sigma}\vec{n} \quad , \quad \tanh\phi = V \quad .$$

Při infinitesimální rotaci souřadnic v geometrickém prostoru máme pak

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{n}\times\vec{a}\,\delta\theta = \vec{a} - \frac{1}{2}\delta\theta \operatorname{Tr}(\varsigma\vec{\sigma}\times\vec{n}) \quad ,$$

$$a'^0 = a^0$$

odkud

$$\lambda = -\lambda^{+} = \frac{i}{2}\,\delta\theta\,\vec{n}\,.\,\vec{\sigma}$$

Pro konečné rotace potom

$$L = \exp\{\, i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{\sigma}\,\vec{n}\,\} = \cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{\sigma}\,\vec{n} \quad .$$

4.3. Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2.

Rovnice

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\left(\hat{p}_0 + \hat{\vec{p}}\,\vec{\sigma} \right) \eta = m\,\xi \quad ,$$

$$\left(\hat{p}_0 - \hat{\vec{p}}\,\vec{\sigma} \right) \xi = m\,\eta \quad .$$

Bispinory - Diracova rovnice

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_0 + \hat{\vec{p}}\,\vec{\sigma} \\ \hat{p}_0 - \hat{\vec{p}}\,\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\left(\gamma^0\,\hat{p}_0 - \vec{\gamma}\,\hat{\vec{p}} \right) \psi = m\,\psi \quad .$$

Konečný tvar

$$\hat{\underline{p}} \equiv \gamma^{\mu}\,\hat{p}_{\mu} \quad , \quad \left(\hat{\underline{p}} - m \right) \psi = 0 \quad .$$

V souřadnicové representaci (na chvíli v SI jednotkách)

$$\left(\hat{\underline{p}} - mc \right) \psi = 0 \ , \ \hat{\underline{p}} \rightarrow i\,\hbar\,\underline{\nabla} = i\hbar\,\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = i\hbar \left(\gamma^0\,\frac{\partial}{\partial c t} + \vec{\gamma}\,.\,\vec{\nabla} \right) \quad ,$$

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = \hat{H}\,\psi \quad , \quad \hat{H} = \frac{\hbar}{i}\,c\,\vec{\alpha}\,.\,\vec{\nabla} + m c^2\,\beta \quad ,$$

kde matice α a β jsou dány vztahy

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\,\delta_{ik} \quad , \quad \beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0 \quad , \quad \beta^2 = 1 \quad .$$

Pro interakci s elektromagnetickým polem

$$\underline{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu \quad , \quad A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A}\right) \quad , \quad \left(\underline{\hat{p}} - e\underline{A} - mc\right) \psi = 0 \quad .$$

4.4. Vlastnosti γ matic.

Diracovu rovnici a tedy v ní vystupující γ matice můžeme representovat různým způsobem. Námi zavedená reprezentace se nazývá spinorová. Pro transformační unitární matici 4 x 4 U dostáváme

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\gamma^0 \to U \gamma^0 U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} \to U \vec{\gamma}\, U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

což je přechod ke standardní reprezentaci. Matice spinu $1/2\,\Sigma$ má ve všech reprezentacích stejný tvar

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad .$$

Pro matice platí antikomutační relace

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\, g^{\mu\nu} \quad .$$

Hermiteovská matice γ^5 má ve spinorové a ve standardní reprezentaci tvar

$$\gamma^5 = -i\,\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

4.5. Relativistické sdružení Diracovy rovnice.

Chování matic γ vzhledem k operaci hermiteovského sdružení můžeme zapsat jako

$$\gamma^{0+} = \gamma^0 \quad , \quad \vec{\gamma}^{\,+} = -\,\vec{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mu +} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad .$$

Proveďme nyní tuto operaci na Diracově rovnici

$$\left\{\left(\gamma^0(\hat{p}_0 - e\,\phi) - \vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) - m\right)\psi\right\}^+ =$$

$$\psi^+\left(\gamma^{0+}(\hat{p}_0{}^* - e\,\phi) - \vec{\gamma}^+(\hat{\vec{p}}^* - e\vec{A}) - m\right) =$$

$$-\psi^+\left(\gamma^{0+}(\hat{p}_0 + e\,\phi) - \vec{\gamma}^+(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}) + m\right) =$$

$$-\psi^+\gamma^0\left(\gamma^0(\hat{p}_0 + e\,\phi) - \vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}) + m\right)\gamma^0 =$$

$$\overline{\psi}\left(\gamma^0(\hat{p}_0 + e\,\phi) - \vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}) + m\right)\gamma^0 = 0 \quad , \quad \overline{\psi} = \psi^+\gamma^0 \quad .$$

Zavedli jsme operaci Diracova (nebo také relativistického) sdružení

$$\psi = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \quad , \quad \overline{\psi} = \begin{pmatrix}\xi^* & \eta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta^* & \xi^*\end{pmatrix} \quad .$$

Ve stručné notaci

$$(\underline{\hat{p}} - e\underline{A} - m)\,\psi = 0 \quad , \quad \overline{\psi}\,(\underline{\hat{p}} + e\underline{A} + m) = 0 \quad .$$

Jednoduchými úpravami dojdeme k rovnici kontinuity

$$\overline{\psi}\,[\,(\underline{\hat{p}} - e\underline{A} - m)\,\psi\,] + [\,\overline{\psi}\,(\underline{\hat{p}} + e\underline{A} + m)\,]\,\psi =$$

$$\overline{\psi}\,[\,\underline{\hat{p}}\,\psi\,] + [\,\overline{\psi}\,\underline{\hat{p}}\,]\,\psi = \hat{p}_\mu\,[\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\,] = 0 \quad ,$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \quad j^\mu = \overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi = (\psi^+\psi, \psi^+\vec{\alpha}\,\psi)\,.$$

4.6. Rovinné vlny.

Stav částice s určitou hodnotou energie a impulzu je popsán rovinnou vlnou

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\,u_p\,e^{-ip_\mu x^\mu} \quad , \quad \psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\,u_{-p}\,e^{ip_\mu x^\mu} \quad ,$$

$$p_0 = \epsilon = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \quad .$$

Spinory vyhovují řešitelným (determinant je roven nule) soustavám algebraických rovnic

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)u_p = 0 \quad , \quad \left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)u_{-p} = 0$$

a normujeme je tak, aby platilo

$$\overline{u}_p\,u_p = 2m \quad , \quad \overline{u}_{-p}\,u_{-p} = -2m \quad .$$

Potom totiž po vynásobení rovnic relativisticky sdruženými veličinami dostaneme

$$\bar{u}_p \gamma^\mu p_\mu u_p = m \bar{u}_p u_p = 2m^2 = 2p^\mu p_\mu \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_p \gamma^\mu u_p = 2p^\mu \quad ,$$

$$\bar{u}_{-p} \gamma^\mu p_\mu u_{-p} = -m \bar{u}_{-p} u_{-p} = 2m^2 = 2p^\mu p_\mu \Rightarrow \bar{u}_{-p} \gamma^\mu u_{-p} = 2p^\mu \quad ,$$

$$j^\mu = \bar{\psi}_{\pm p} \gamma^\mu \psi_{\pm p} = \frac{p^\mu}{\epsilon} = (1, \vec{v}) \quad , \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\epsilon} \quad ,$$

takže vlnové funkce jsou normovány na jednu částici v jednotce objemu. Ve standardní representaci máme

$$(\epsilon - m)\phi - \vec{p}.\vec{\sigma}\chi = 0 \quad , \quad (\epsilon + m)\chi - \vec{p}.\vec{\sigma}\phi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{\vec{p}.\vec{\sigma}}{\epsilon - m}\chi \quad , \quad \chi = \frac{\vec{p}.\vec{\sigma}}{\epsilon + m}\phi \quad ,$$

a pro normované čtyřkomponentové veličiny u_p a u_{-p} máme výrazy

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + m}\, w_+ \\ \sqrt{\epsilon - m}\, (\vec{n}.\vec{\sigma})\, w_+ \end{pmatrix} \quad , \quad u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon - m}\, (\vec{n}.\vec{\sigma})\, w_- \\ \sqrt{\epsilon + m}\, w_- \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{p} \quad , \quad w_+^+ w_+ = w_-^+ w_- = 1 \quad .$$

V těchto výrazech jsou w_+ a w_- libovolné normované dvoukomponentové veličiny. Pro relativisticky sdružené výrazy dostáváme

$$\bar{u}_p = \left(\sqrt{\epsilon + m}\, w_+^+ \quad , \quad -\sqrt{\epsilon - m}\, w_+^+ (\vec{n}.\vec{\sigma}) \right) \quad ,$$

$$\bar{u}_{-p} = \left(\sqrt{\epsilon - m}\, w_-^+ (\vec{n}.\vec{\sigma}) \quad , \quad -\sqrt{\epsilon + m}\, w_-^+ \right) \quad .$$

Této volnosti můžeme užít pro vhodnou volbu vlnové funkce. Veličina w_+ může být například trojrozměrným spinorem, splňujícím rovnici

$$\frac{1}{2}(\vec{n}.\vec{\sigma})\, w_+^{(\lambda)} = \lambda\, w_+^{(\lambda)} \; , \; \vec{n} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta) \; ,$$

$$w_+^{(\lambda = \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\phi} \cos\frac{1}{2}\theta \\ e^{\frac{i}{2}\phi} \sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \quad , \quad w_+^{(\lambda = -\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{i}{2}\phi} \sin\frac{1}{2}\theta \\ e^{\frac{i}{2}\phi} \cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \quad .$$

Další možnou volbou je

$$w_+^{(\sigma = \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad w_-^{(\sigma = \frac{1}{2})} = -\sigma_y\, w_+^{(\sigma = -\frac{1}{2})*} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$w_+^{(\sigma = -\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad w_-^{(\sigma = -\frac{1}{2})} = -\sigma_y\, w_+^{(\sigma = \frac{1}{2})*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \quad .$$

4.7. Transformace C, P a T.

Srovnání Diracovy rovnice a rovnice po prostorové inversi

$$\left[\gamma^0(\hat{p}_0 - eA_0(t,\vec{r})) - \vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(t,\vec{r})) - m\right]\psi(t,\vec{r}) = 0 \quad ,$$

$$\left[\gamma^0(\hat{p}_0 - eA_0(t,\vec{r})) + \vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(t,\vec{r})) - m\right]\psi^P(t,-\vec{r}) = 0 \quad ,$$

$$\hat{p}_0^{\,P} = \hat{p}_0 \quad , \quad A_0^P(t,-\vec{r}) = A_0(t,\vec{r}) \quad ,$$

$$\hat{\vec{p}}^{\,P} = -\hat{\vec{p}} \quad , \quad \vec{A}^{\,P}(t,-\vec{r}) = -\vec{A}(t,\vec{r})$$

vede k rovnicím pro transformační matici

$$U^P\ \psi(t,\vec{r}) = \psi^P(t,-\vec{r}) \quad ,$$

$$U^P\ \gamma^0\ (U^P)^{-1} = \gamma^0 \quad , \quad U^P\ \vec{\gamma}\ (U^P)^{-1} = -\vec{\gamma} \quad \Rightarrow \quad U^P = i\,\gamma^0 \quad .$$

Faktor i u γ^0 matice volíme v souhlasu s bispinorovou reprezentací.

Srovnání komplexně sdružené Diracovy rovnice a rovnice po časové inversi

$$\left[\gamma^{0\,*}(\hat{p}_0 + eA_0(t,\vec{r})) - \vec{\gamma}^{\,*}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}(t,\vec{r})) + m\right]\psi^*(t,\vec{r}) = 0 \quad ,$$

$$\left[\gamma^0(\hat{p}_0 + eA_0(t,\vec{r})) + \vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}(t,\vec{r})) + m\right]\psi^T(-t,\vec{r}) = 0 \quad ,$$

$$\hat{p}_0^{\,T} = -\hat{p}_0 \quad , \quad A_0^T(-t,\vec{r}) = A_0(t,\vec{r}) \quad ,$$

$$\hat{\vec{p}}^{\,T} = \hat{\vec{p}} \quad , \quad \vec{A}^{\,T}(-t,\vec{r}) = -\vec{A}(t,\vec{r})$$

vede k rovnicím pro transformační matici

$$U^T\ \psi(t,\vec{r}) = \psi^T(-t,\vec{r}) \quad ,$$

$$U^T\ \gamma^0\ (U^T)^{-1} = \gamma^{0\,*} \quad , \quad U^T\ \vec{\gamma}\ (U^T)^{-1} = -\vec{\gamma}^{\,*} \quad \Rightarrow \quad U^T = -i\,\gamma^1\,\gamma^3 \quad .$$

Srovnání komplexně sdružené Diracovy rovnice a rovnice po nábojové inversi

$$\left[\gamma^{0\,*}(\hat{p}_0 + eA_0(t,\vec{r})) - \vec{\gamma}^{\,*}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}(t,\vec{r})) + m\right]\psi^*(t,\vec{r}) = 0 \quad ,$$

$$\left[\gamma^0(\hat{p}_0 + eA_0(t,\vec{r})) - \vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}(t,\vec{r})) - m\right]\psi^C(t,\vec{r}) = 0 \quad ,$$

$$\hat{p}_0^{\,C} = \hat{p}_0 \quad , \quad A_0^C(t,\vec{r}) = -A_0(t,\vec{r}) \quad ,$$

$$\hat{\vec{p}}^{\,C} = \hat{\vec{p}} \quad , \quad \vec{A}^{\,C}(t,\vec{r}) = -\vec{A}(t,\vec{r})$$

vede k rovnicím pro transformační matici

$$U^C\ \psi(t,\vec{r})\ =\ \psi^C(t,\vec{r})\quad ,$$

$$U^C\ \gamma^\mu\ (U^C)^{-1}\ =\ -\gamma^{\mu *}\quad \Rightarrow\quad U^C\ =\ \gamma^2\quad .$$

Při určení transformačních matic jsme užili vlastností γ matic ve spinorové popřípadě standardní repesentaci při operaci komlexního sdružení, mohou tedy být transformační matice v jiných representacích odlišné.

Shrnutím transformačních vlastností máme

$$\psi^T(-t,\vec{r})\ =\ -i\,\gamma^1\,\gamma^3\,\psi^*(t,\vec{r})\quad ,$$

$$\psi^{PT}(-t,-\vec{r})\ =\ \gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^3\,\psi^*(t,\vec{r})\quad ,$$

$$\psi^{CPT}(-t,-\vec{r})\ =\ \gamma^2\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^3\,\psi(t,\vec{r})\ =\ i\,\gamma^5\,\psi(t,\vec{r})\quad .$$

Požadavek, aby elektronové i positronové vlnové funkce měly stejný tvar, vede k

$$\psi_{-p}\ =\ \gamma^2\,\psi_p^*\quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon+m}\,w_+^* \\ \sqrt{\epsilon-m}\,(\vec{n}\,.\,\vec{\sigma}^*)\,w_+^* \end{pmatrix}\ =\ \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon-m}\,(\vec{n}\,.\,\vec{\sigma})\,w_- \\ \sqrt{\epsilon+m}\,w_- \end{pmatrix}\quad \Rightarrow$$

$$w_-\ =\ -\,\sigma_y\,w_+^*\quad .$$

5. Propagátor pro Diracovu rovnici.

5.1. Hlavní hodnota integrálu.

Často budeme potřebovat větu: Buď $f(z)$ funkce analytická pro $Im(z) \geq 0$ s vyjímkou konečného počtu pólů, $f(z) \to 0$ pro $|z| \to \infty$ rovnoměrně. Potom pro hlavní hodnotu $\wp$ nevlastního integrálu dostáváme

$$\wp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum R + \pi i \sum R_0 \quad ,$$

kde R jsou residua v pólech v horní polorovině, R_0 residua v pólech na reálné ose (např. Whittaker a Watson, A Course of Modern Analysis). Důsledkem je, že pro funkci analytickou v horní polorovině (včetně reálné osy) můžeme psát

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon}\,\mathrm{d}x = \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\,\mathrm{d}x \mp i\pi f(x_0)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \wp \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0) \quad .$$

Pro exponenciální funkci máme

$$\wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixt)}{x - x_0}\,\mathrm{d}x = i\pi \exp(ix_0 t) \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

$$\wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixt)}{x - x_0}\,\mathrm{d}x = -i\pi \exp(ix_0 t) \quad , \quad t < 0 \quad .$$

5.2. Propagátor volné částice.

Propagátor definujeme jako operátor Greenovy funkce příslušné pohybové rovnice

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \hat{K} = \hat{1}\,\delta(t) \quad , \quad \hat{H} = \sum_k \epsilon_k \,|\Psi_k\rangle \langle\Psi_k| \quad ,$$

$$\hat{K} = \lim_{\delta \to 0} \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega t}}{\omega - \epsilon_k + i\delta} \,|\Psi_k\rangle \langle\Psi_k| \quad .$$

Modifikace pro propagátor v Diracově rovnici je

$$\left(\hat{\underline{p}} - m\right)\hat{K} = \hat{1}\,\delta(t) \quad ,$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \hat{K} = \gamma^0\,\hat{1}\,\delta(t) \quad , \quad \hat{H} = \sum_k \epsilon_k\,|\Psi_k\rangle\,\langle\Psi_k| \quad ,$$

$$\hat{K} = \lim_{\delta\to 0}\sum_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega t}}{\omega - \epsilon_k(1 - i\delta)}\;|\Psi_k\rangle\,\langle\Psi_k|\,\gamma^0 \quad .$$

Pro kvasikontinuální energiové spektrum přejdeme od sumace k integraci

$$\sum_m f(\epsilon_m) = \int f(\epsilon_m)\,\rho(\epsilon_m)\,\mathrm{d}\epsilon_m \quad .$$

Pro volné nerelativistické částice máme v souřadnicové representaci

$$\epsilon_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \quad , \quad \Psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\exp(i\vec{p}\,\vec{r}) \ , \ \rho(\epsilon_{\vec{p}})\mathrm{d}\epsilon_{\vec{p}} = \frac{\Omega}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3\vec{p}$$

a pro propagátor dostáváme explicitní vyjádření

$$K(\vec{r},t;\vec{r}^{\,\prime},t^{\prime}) = \begin{cases} -\dfrac{i}{\hbar}\left[\dfrac{m}{2\pi i\hbar(t-t^{\prime})}\right]^{3/2}\exp\left(-i\dfrac{m(\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime})^2}{2\hbar(t-t^{\prime})}\right) & t>t^{\prime} \\ 0 & t<t^{\prime} \end{cases} \quad .$$

Pro volné částice popsané řešením Diracovy rovnice máme

$$|\Psi_{\vec{p}\sigma}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\,u^{(\sigma)}_{\pm p}\,e^{\pm i\vec{p}\vec{x}} \quad , \quad \langle\Psi_{\vec{p}\sigma}|\,\gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\,\bar{u}^{(\sigma)}_{\pm p}\,e^{\mp i\vec{p}\vec{x}}$$

a po dosazení do výrazu pro propagátor

$$K(x_2,x_1) = -i\sum_{\vec{p},\sigma}\frac{1}{2\epsilon}\,e^{-ip_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\,u^{(\sigma)}_p\,\bar{u}^{(\sigma)}_p \qquad t_2 - t_1 > 0 \quad ,$$

$$K(x_2,x_1) = i\sum_{\vec{p},\sigma}\frac{1}{2\epsilon}\,e^{ip_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\,u^{(\sigma)}_{-p}\,\bar{u}^{(\sigma)}_{-p} \qquad t_2 - t_1 < 0 \quad .$$

Platí

$$\sum_\sigma w^\sigma_+\,w^{\sigma +}_+ = \sum_\sigma w^\sigma_-\,w^{\sigma +}_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Potom je

$$\sum_\sigma u^\sigma_p(x_2)\,\bar{u}^\sigma_p(x_1) = e^{-ip_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\left(\epsilon\gamma^0 - \vec{p}\vec{\gamma} + m\right) \quad ,$$

$$\sum_\sigma u^\sigma_{-p}(x_2)\,\bar{u}^\sigma_{-p}(x_1) = e^{ip_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\left(\epsilon\gamma^0 - \vec{p}\vec{\gamma} - m\right)$$

a pro propagátor dostáváme vyjádření

$$K(x_2,x_1) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{2\epsilon}\, e^{-ip_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\left(\epsilon\gamma^0 - \vec{p}\vec{\gamma} + m\right)$$

$$t_2 - t_1 > 0 \quad ,$$

$$K(x_2,x_1) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{2\epsilon}\, e^{ip_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\left(\epsilon\gamma^0 - \vec{p}\vec{\gamma} - m\right)$$

$$t_2 - t_1 < 0 \quad .$$

Po menších úpravách dojdeme k výrazu

$$K(\vec{r}_2,t_2\,|\,\vec{r}_1,t_1) = \left(i\underline{\nabla} + m\right) I(\vec{r},t) \quad ,$$

$$\underline{\nabla} = \gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad t = |t_2 - t_1| \quad ,$$

$$I(\vec{r},t) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}}\, e^{-i(\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,t - \vec{p}.\vec{r})} \quad .$$

Funkci I lze napsat jako

$$I(s^2) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{m^2}{\xi} + s^2\xi\right)}\, d\xi \quad , \quad s^2 = t^2 - \vec{r}^{\,2} \quad .$$

S využitím vztahů

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0\, e^{-ip_0 t}}{p_0^2 - \epsilon^2 + i\delta} = -\frac{i}{2\epsilon}\, e^{-i\epsilon|t|} \quad , \quad p_0^2 - \epsilon^2 = p_\mu p^\mu - m^2$$

můžeme propagátor volné částice zapsat jako

$$K(x_2,x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int G(p)\, e^{-ip_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\, d^4p \quad ,$$

$$G(p) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\underline{p} + m}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\delta} \quad .$$

Za pomoci propagátorů vyjádříme vlnovou funkci jako

$$\Psi(\vec{x}_2,t_2) = \int K(\vec{x}_2,t_2\,|\,\vec{x}_1,t_1)\,\gamma^0\,\Psi(\vec{x}_1,t_1)\, d^3\vec{x}_1 \; -$$

$$\int K(\vec{x}_2,t_2\,|\,\vec{x}_1,t_1')\,\gamma^0\,\Psi(\vec{x}_1,t_1')\, d^3\vec{x}_1 \quad , \quad t_1 < t_2 < t_1' \quad .$$

Relativisticky invariantní zápis je

$$\Psi(x_2^\mu) = \int K(x_2^\mu\,|\,x_1^\mu)\,\gamma_\nu\,\Psi(x_1^\mu)\, d^\nu\Sigma_1 \quad ,$$

$$t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; d^0\Sigma_1 = d^3\vec{x}_1 \quad , \quad t_1 > t_2 \;\Rightarrow\; d^0\Sigma_1 = -d^3\vec{x}_1 \quad .$$

5.3. Propagátor částice v poli.

Ve zhuštěném značení máme

$$\left(i\underline{\nabla}_2 - m\right) K(2,1) = \delta(2,1) \quad ,$$

$$\left(i\underline{\nabla}_2 - e\underline{A}_2 - m\right) K^A(2,1) = \delta(2,1)$$

a pro propagátor částice v poli tedy

$$K^A(2,1) = K(2,1) + e\int K(2,3)\,\underline{A}(3)\,K^A(3,2)\,\mathrm{d}^4x_3 \quad .$$

V impulsové representaci je

$$G^A(p',p) = (2\pi)^4\,\delta(p'-p)\,G(p) +$$

$$\frac{e}{(2\pi)^4}\,G(p')\int \underline{A}(t)\,G^A(p'-t,p)\,\mathrm{d}^4t \quad ,$$

$$\underline{A}(t) = \int \underline{A}(x)\,e^{it_\mu x^\mu}\,\mathrm{d}^4x \quad .$$

Pro amplitudu pravděpodobnosti přechodu ze stavu i (elektron v minulosti, positron v budoucnosti) do stavu f (elektron v budoucnosti, positron v minulosti) máme

$$M = \int\int \bar{\psi}_f(2)\,\beta\,K^A(2,1)\,\beta\,\psi_i(1)\,\mathrm{d}^3\vec{x}_1\,\mathrm{d}^3\vec{x}_2 \quad .$$

Užijeme teď rozvoje

$$K^A(2,1) = K(2,1) + \int K(2,3)\,e\underline{A}(3)\,K(3,1)\,\mathrm{d}^4x_3 +$$

$$\int\int K(2,4)\,e\underline{A}(4)\,K(4,3)\,e\underline{A}(3)\,K(3,1)\,\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{d}^4x_4 + \ldots$$

a vztahů

$$\psi_i(3) = \int K(3,1)\,\beta\,\psi_i(1)\,\mathrm{d}^3\vec{x}_1 \quad ,$$

$$\bar{\psi}_f(3) = \int \bar{\psi}_f(2)\,\beta\,K(2,3)\,\mathrm{d}^3\vec{x}_2 \quad .$$

Amplitudu pravděpodobnosti přechodu máme tak vyjádřenu vztahem (předpokládáme, že stavy i a f jsou různé)

$$M = \int \bar{\psi}_f(1)\,e\underline{A}(1)\,\psi_i(1)\,\mathrm{d}^4x_1 +$$

$$\int\int \bar{\psi}_f(2)\,e\underline{A}(2)\,K(2,1)\,e\underline{A}(1)\,\psi_i(1)\,\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2 + \ldots$$

V impulsové representaci je vyjádření ještě jednodušší

$$M = \frac{\bar{u}_f}{\sqrt{2\epsilon_f}}\,e\,\underline{A}(p_f - p_i)\,\frac{u_i}{\sqrt{2\epsilon_i}} +$$

$$\frac{\bar{u}_f}{\sqrt{2\epsilon_f}}\int e\,\underline{A}(p_f - q)\,\frac{\underline{q} + m}{q_\mu q^\mu - m^2 + i\delta}\,e\,\underline{A}(q - p_i)\,\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{u_i}{\sqrt{2\epsilon_i}} + \ldots$$

Pravděpodobnost přechodu za jednotku času je vyjádřena jako

$$w = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} \, |M|^2 \quad .$$

Amplitudu pravděpodobnosti přechodu můžeme graficky vyjádřit Feynmanovými diagramy a při sestavení vzorce se řídit následujícími pravidly: 1. Vnější vstupní elektronové čáře se přiřadí amplituda $u_i = u(p_i)$ odpovídající počátečnímu elektronu s impulsem p_i nebo amplituda $u_i = u(-p_i)$ odpovídající koncovému positronu s impulsem p_i. 2. Vnější výstupní elektronové čáře se přiřadí amplituda $u_f = u(p_f)$ odpovídající koncovému elektronu s impulsem p_f nebo amplituda $u_f = u(-p_f)$ odpovídající počátečnímu positronu s impulsem p_f. 3. Vnitřní elektronové čáře se přiřadí propagátor $G(p)$

$$G(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\delta} \quad .$$

4. Vnějšímu elektromagnetickému poli se přiřadí faktor $e\underline{A}(q)$

$$e\,\underline{A}(q) = e\,\gamma^\mu A_\mu(q) \quad , \quad A_\mu(q) = \int A_\mu(x)\, e^{i q_\mu x^\mu}\, \mathrm{d}^4 x \quad .$$

5. V každém vrcholu (tři čáry) platí zákon zachování čtyřrozměrného vektoru impulsu. 6. Podle všech volných impulsů t (neurčených ze zákonů zachování) se integruje

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 t}{(2\pi)^4} \quad .$$

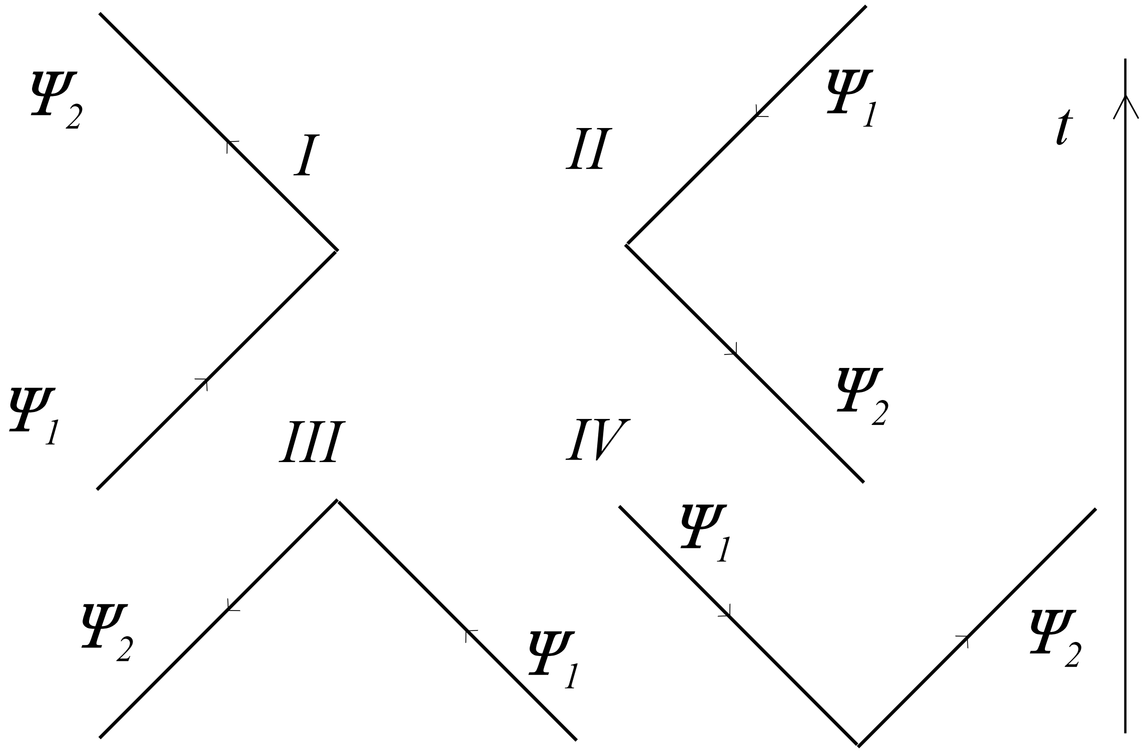
6. Interpretace.

6.1. Elektrony a positrony.

Interpretace je založena na Feynmanově popisu positronů jako elektronů jdoucích zpět v čase. Počáteční stavy Ψ_1 obsahují tedy elektrony v minulosti a positrony v budoucnosti, koncové stavy Ψ_2 pak obsahují elektrony v bodoucnosti a positrony v minulosti. Amplituda pravděpodobnosti přechodu za absorpce ($M e^{-i\omega t}$) nebo emise ($M^+ e^{i\omega t}$) fotonu je

$$\int \bar{\Psi}_2 \left(M e^{-i\omega t} + M^+ e^{i\omega t} \right) \Psi_1 \, \mathrm{d}\Omega \quad .$$

Na obrázku jsou znázorněny čtyři možnosti pro jednu částici v počátečním i koncovém stavu:



Označíme kladné hodnoty energie jako $\epsilon_i = \sqrt{(p_i^2 + m^2)}$. Potom máme v jednotlivých případech
I: $E_1 = \epsilon_1$, $E_2 = \epsilon_2$, elektron v minulosti, elektron v budoucnosti, jde o rozptyl elektronu.
II: $E_1 = -\epsilon_1$, $E_2 = -\epsilon_2$, positron v budoucnosti, positron v minulosti, jde o rozptyl positronu.
III: $E_1 = \epsilon_1$, $E_2 = -\epsilon_2$, elektron v minulosti, positron v minulosti, jde o anihilace páru.
IV: $E_1 = -\epsilon_1$, $E_2 = \epsilon_2$, positron v budoucnosti, elektron v budoucnosti, jde o kreaci páru.

7. Invariantní teorie poruch.

7.1. S - matice.

Po přechodu od Schrödingerovy k interakční representaci

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle = \left(\hat{H}_0 + \hat{V}(t) \right) | \psi \rangle \quad ,$$

$$| \Phi(t) \rangle = e^{i \hat{H}_0 t} | \psi(t) \rangle \quad , \quad \hat{H}_{int}(t) = e^{i \hat{H}_0 t} \hat{V}(t) e^{-i \hat{H}_0 t} \quad ,$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \Phi(t) \rangle = \hat{H}_{int}(t) | \Phi(t) \rangle$$

snadno ověříme, že řešení je možné zapsat pomocí operátoru S

$$| \Phi(t) \rangle = \hat{S}(t,t_0)\, | \Phi(t_0) \rangle \quad ,$$

$$\hat{S}(t,t_0) = \hat{1} - i \int_{t_0}^{t} \hat{H}_{int}(t_1)\,\mathrm{d}t_1 - \int_{t_0}^{t} \hat{H}_{int}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \hat{H}_{int}(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 + \ldots$$

Postupnými úpravami

$$\int_{t_0}^{t} \hat{H}_{int}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \hat{H}_{int}(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} \hat{H}_{int}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \hat{H}_{int}(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 + \int_{t_0}^{t} \hat{H}_{int}(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \hat{H}_{int}(t_1)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \right) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \hat{T}\,\{\hat{H}_{int}(t_1)\,\hat{H}_{int}(t_2)\}\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \quad ,$$

kde jsme definovali operátor chronologického uspořádání

$$\hat{T}\,\{\hat{H}_{int}(t_1)\,\hat{H}_{int}(t_2)\} = \Theta(t_1 - t_2)\,\hat{H}_{int}(t_1)\,\hat{H}_{int}(t_2) + \Theta(t_2 - t_1)\,\hat{H}_{int}(t_2)\,\hat{H}_{int}(t_1) \quad .$$

Potom můžeme psát

$$\hat{S}(t,t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} \hat{T}\,\{\hat{H}_{int}(t_1)..\hat{H}_{int}(t_k)\}\,\mathrm{d}t_k..\mathrm{d}t_1 =$$

$$\hat{T}\,\{ e^{-i\int_{t_0}^{t} \hat{H}_{int}(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \} \quad .$$

S - matice je definována jako

$$\hat{S} = \hat{S}(\infty, -\infty) = \hat{T}\,\{ e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_{int}(t)\,\mathrm{d}t} \} \quad .$$

Interakční hamiltonián má v kvantové elektrodynamice jednoduchý tvar

$$\hat{H}(t) = e \int \hat{j}^{\mu}(x)\,\hat{A}_{\mu}(x)\,\mathrm{d}^3\vec{x} \quad , \quad \hat{j}^{\mu}(x) = \hat{\bar{\psi}}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi(x) \quad .$$

7.2. T - matice a M - matice.

Je výhodné oddělit z S - matice diagonální členy a zákon zachování impulsu zavedením T - matice

$$\langle f | \hat{S} | i \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(\textstyle\sum P_f - \sum P_i)\,\langle f | \hat{T} | i \rangle \quad .$$

Při výpočtu čtverce δ funkce budeme psát

$$\delta^{(4)}(\sum P_f - \sum P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\sum P_{f\mu} - \sum P_{i\mu})x^\mu} \mathrm{d}^4 x \quad ,$$

$$|\delta^{(4)}(\sum P_f - \sum P_i)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{T\Omega}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(\sum P_f - \sum P_i)$$

a tedy pro pravděpodobnost přechodu za jednotku času máme výraz

$$w_{i\to f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum P_f - \sum P_i) \, |\langle f | \hat{T} | i \rangle|^2 \, \Omega \quad .$$

Vynecháme-li u ψ a A_μ normovací faktory dané převrácenou hodnotou odmocniny z dvojnásobku energie, budeme mít

$$w_{i\to f} = \frac{(2\pi)^4}{\prod (2\epsilon_i \Omega) \prod (2\epsilon_f \Omega)} \delta^{(4)}(\sum P_f - \sum P_i) \, |\langle f | \hat{M} | i \rangle|^2 \, \Omega \quad .$$

Pro přechod do spojité části spektra

$$\mathrm{d}w = \frac{(2\pi)^4 \Omega}{\prod (2\epsilon_i \Omega)} \delta^{(4)}(\sum P_f - \sum P_i) \, |\langle f | \hat{M} | i \rangle|^2 \prod \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_f}{2\epsilon_f (2\pi)^3} \quad .$$

7.3. Propagátory elektronu a fotonu.

Propagátor elektronu jsme definovali v předchozí části. Obdobně definujeme propagátor fotonu jako operátor Greenovy funkce vlnové rovnice

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{\Delta} \right) \hat{K} = \hat{1}\, \delta(t) \quad , \quad \hat{\Delta} = \sum_{\vec{k},\lambda} - \vec{k}^2 \, |\Psi^{(\lambda)}_{\vec{k}}\rangle \langle \Psi^{(\lambda)}_{\vec{k}}| \quad ,$$

$$\hat{K} = \lim_{\delta\to 0} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega \, e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \vec{k}^2 + i\delta} \, |\Psi^{(\lambda)}_{\vec{k}}\rangle \langle \Psi^{(\lambda)}_{\vec{k}}| \quad .$$

Pro fotony máme

$$|\Psi^{(\lambda)}_{\vec{k}}\rangle = e^{(\lambda)}_\mu e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad , \quad \langle \Psi^{(\lambda)}_{\vec{k}}| = e^{(\lambda)*}_\mu e^{-i\vec{k}\vec{x}}$$

a po dosazení do výrazu pro propagátor

$$D_{\mu\nu}(x_2, x_1) = -i \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{2|\vec{k}|} e^{-ik_\mu (x_2^\mu - x_1^\mu)} e^{(\lambda)}_\mu e^{(\lambda)*}_\nu \qquad t_2 - t_1 > 0 \quad ,$$

$$D_{\mu\nu}(x_2, x_1) = i \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{1}{2|\vec{k}|} e^{ik_\mu (x_2^\mu - x_1^\mu)} e^{(\lambda)}_\mu e^{(\lambda)*}_\nu \qquad t_2 - t_1 < 0 \quad .$$

S využitím vztahů

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_0 \, e^{-ik_0 t}}{k_0^2 - \vec{k}^2 + i\delta} = -\frac{i}{2|\vec{k}|} e^{-i|\vec{k}||t|} \quad , \quad k_0^2 - \vec{k}^2 = k_\mu k^\mu$$

můžeme propagátor volného fotonu psát jako

$$D_{\mu\nu}(x_2,x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int D_{\mu\nu}(k)\, e^{-ik_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)}\, \mathrm{d}^4 k \quad ,$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \lim_{\delta\to 0}\frac{4\pi}{k_\mu k^\mu + i\delta}\, g_{\mu\nu} \quad .$$

Za pomoci propagátorů vyjádříme vektorový potenciál jako

$$A_\mu(\vec{x}_2,t_2) = \int D_{\mu\rho}(\vec{x}_2,t_2\,|\,\vec{x}_1,t_1)\, g^{\rho\nu} A_\nu(\vec{x}_1,t_1)\, \mathrm{d}^3\vec{x}_1 \quad , \quad t_1 < t_2 \ .$$

Zapišme přehledně operátory polí, které budeme v dalším potřebovat. Přitom zvolíme kromě již užívaných jednotek $\hbar=1$ a $c=1$ zvolíme $4\pi\epsilon_0=1$. Je tedy

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p},\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}_{\vec{p},\sigma}\, u^{(\sigma)}(p)\, e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{b}^{+}_{\vec{p},\sigma}\, u^{(\sigma)}(-p)\, e^{ip_\mu x^\mu}\right] \quad ,$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\vec{p},\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}^{+}_{\vec{p},\sigma}\, \bar{u}^{(\sigma)}(p)\, e^{ip_\mu x^\mu} + \hat{b}_{\vec{p},\sigma}\, \bar{u}^{(\sigma)}(-p)\, e^{-ip_\mu x^\mu}\right] \quad ,$$

$$\hat{A}_\mu(x) = \hat{A}^{+}_\mu(x) = \sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_{\vec{k}}}}\left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\, e^{(\lambda)}_\mu\, e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{c}^{+}_{\vec{k},\lambda}\, e^{(\lambda)*}_\mu\, e^{ik_\mu x^\mu}\right] \quad ,$$

$$p_\mu p^\mu = m^2 \quad , \quad k_\mu k^\mu = 0 \quad , \quad k^\mu e^{(\lambda)}_\mu = 0 \quad , \quad e^{(\lambda)\mu} e^{(\lambda)*}_\mu = -1 \quad .$$

Pomocí operátoru chronologického uspořádání můžeme propagátory psát jako

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\,\langle 0\,|\,\hat{T}\{\hat{A}_\mu(x)\,\hat{A}_\nu(x')\}\,|\,0\rangle \quad ,$$

$$K(x-x') = -i\,\langle 0\,|\,\hat{T}\{\psi(x)\,\bar{\psi}(x')\}\,|\,0\rangle \quad .$$

7.4. Feynmanovy diagramy pro rozptyl elektronu.

V prvním přiblížení teorie poruch

$$\hat{S}^{(1)} = -ie\int \hat{j}^\mu(x_1)\,\hat{A}_\mu(x_1)\,\mathrm{d}^4 x_1$$

může jít jen o interakci elektronu s vnějším polem. Proces se dvěma elektrony a jedním fotonem je totiž zakázán zákony zachování

$$p_2^\mu \pm p_1^\mu = k^\mu \quad , \quad p_1^\mu = (\epsilon_1 = m\,, \vec{p}_1 = 0) \quad , \quad p_2^\mu = (\epsilon_2 = \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m^2}\,, \vec{p}_2)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = k_\mu k^\mu = (p_{2\mu} \pm p_{1\mu})(p_2^\mu \pm p_1^\mu) = 2m(m \pm \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m^2}) \neq 0 \quad .$$

Jsou tedy prvními nediagonálními prvky S - matice až prvky v druhém přiblížení teorie poruch

$$\hat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2}\int\!\!\int \hat{T}\,\{\hat{j}^\mu(x_1)\,\hat{j}^\nu(x_2)\}\ \hat{T}\,\{\hat{A}_\mu(x_1)\,\hat{A}_\nu(x_2)\}\ \mathrm{d}^4 x_2\, \mathrm{d}^4 x_1 \quad .$$

Uvažujme rozptyl dvou elektronů, tedy počítejme maticový element

$$
{}_{ph}\langle 0|\ {}_{el}\langle 0|\,\hat{a}_3\,\hat{a}_4\hat{S}^{(2)}\,\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1^{+}\,|0\rangle_{el}\,|0\rangle_{ph}\ =
$$

$$
\frac{i e^2}{2}\int\!\!\int D_{\mu\nu}(x-x^{/})\,H^{\mu\nu}(x,x^{/})\,\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x^{/}\quad ,
$$

$$
H^{\mu\nu}(x,x^{/})\ =\ {}_{el}\langle 0|\,\hat{a}_3\hat{a}_4\hat{T}\{\hat{\bar{\psi}}(x)\,\gamma^{\mu}\,\hat{\psi}(x)\,\hat{\bar{\psi}}(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\hat{\psi}(x^{/})\}\,\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1^{+}\,|0\rangle_{el}\quad .
$$

Každý z vnějších kreačních operátorů sdružíme s vnitřním anihilačním operátorem a každý z vnějších anihilačních operátorů sdružíme s vnitřním kreačním operátorem

$$
H^{\mu\nu}\ =\ {}_{el}\langle 0|\,\hat{a}_3\hat{a}_4\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^{\mu}\,\hat{\psi}\,\hat{\bar{\psi}}^{/}\,\gamma^{\nu}\,\hat{\psi}^{/}\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1^{+}\ +\ \hat{a}_3\hat{a}_4\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^{\mu}\,\hat{\psi}\,\hat{\bar{\psi}}^{/}\,\gamma^{\nu}\,\hat{\psi}^{/}\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1^{+}\ +
$$

$$
\hat{a}_3\hat{a}_4\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^{\mu}\,\hat{\psi}\,\hat{\bar{\psi}}^{/}\,\gamma^{\nu}\,\hat{\psi}^{/}\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1^{+}\ +\ \hat{a}_3\hat{a}_4\hat{\bar{\psi}}\,\gamma^{\mu}\,\hat{\psi}\,\hat{\bar{\psi}}^{/}\,\gamma^{\nu}\,\hat{\psi}^{/}\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1^{+}\,|0\rangle_{el}\quad .
$$

Všechny operátory a antikomutují (odpovídají různým stavům), takže můžeme vynechat operátor chronologického uspořádání. Je tedy

$$
H^{\mu\nu}\ =\ \bar{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_2\bar{\psi}_3^{/}\gamma^{\nu}\psi_1^{/}\ +\ \bar{\psi}_3\gamma^{\mu}\psi_1\bar{\psi}_4^{/}\gamma^{\nu}\psi_2^{/}\ -
$$

$$
\bar{\psi}_3\gamma^{\mu}\psi_2\bar{\psi}_4^{/}\gamma^{\nu}\psi_1^{/}\ -\ \bar{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_1\bar{\psi}_3^{/}\gamma^{\nu}\psi_2^{/}\quad .
$$

Po dosazení dostáváme

$$
{}_{ph}\langle 0|\ {}_{el}\langle 0|\,\hat{a}_3\,\hat{a}_4\hat{S}^{(2)}\,\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1^{+}\,|0\rangle_{el}\,|0\rangle_{ph}\ =\ i e^2\int\!\!\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x^{/}D_{\mu\nu}(x-x^{/})
$$

$$
\left(\bar{\psi}_4(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_2(x)\,\bar{\psi}_3(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_1(x^{/})\ -\ \bar{\psi}_4(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_1(x)\,\bar{\psi}_3(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_2(x^{/})\right)\quad .
$$

Rovinné vlny nám dají

$$
\bar{\psi}_4(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_2(x)\,\bar{\psi}_3(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_1(x^{/})\ -\ \bar{\psi}_4(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_1(x)\,\bar{\psi}_3(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_2(x^{/})\ =
$$

$$
\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_2\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_1\,e^{-i(p_2-p_4)x\,-\,i(p_1-p_3)x^{/}}\ -\ \bar{u}_4\gamma^{\mu}u_1\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_2\,e^{-i(p_1-p_4)x\,-\,i(p_2-p_3)x^{/}}\ =
$$

$$
\left(\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_2\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_1\,e^{-i(p_2+p_3-p_1-p_4)\frac{x-x^{/}}{2}}\ -\ \bar{u}_4\gamma^{\mu}u_1\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_2\,e^{-i(p_1+p_3-p_2-p_4)\frac{x-x^{/}}{2}}\right)
$$

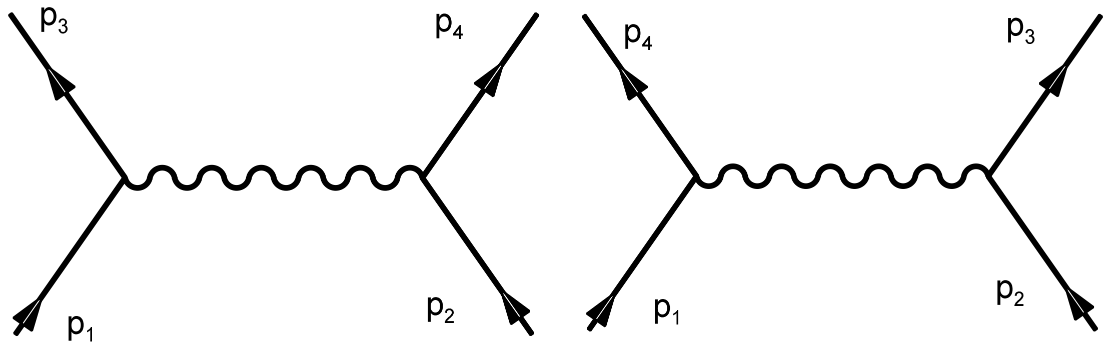
$$
e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)\frac{x+x^{/}}{2}}\quad .
$$

Po integraci dostáváme konečný tvar pro element M matice

$$
\langle f|\,\hat{M}\,|i\rangle\ =
$$

$$
e^2\left(\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_2D_{\mu\nu}(p_4-p_2)\,\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_1\ -\ \bar{u}_4\gamma^{\mu}u_1D_{\mu\nu}(p_4-p_1)\,\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_2\right)\quad .
$$

Grafické znázornění je na následujícím diagramu



Nyní uvažujme rozptyl elektronu a positronu, tedy počítejme maticový element

$$\langle f|\hat{S}^{(2)}|i\rangle = {}_{ph}\langle 0|\ {}_{el}\langle 0|\hat{a}_{\vec{p}'_-}\hat{b}_{\vec{p}_+}\hat{S}^{(2)}\hat{b}^+_{\vec{p}'_+}\hat{a}^+_{\vec{p}_-}|0\rangle_{el}|0\rangle_{ph} =$$

$$\frac{ie^2}{2}\int\int D_{\mu\nu}(x-x')\,H^{\mu\nu}(x,x')\,\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x' \quad ,$$

$$H^{\mu\nu}(x,x') = {}_{el}\langle 0|\hat{a}_{\vec{p}'_-}\hat{b}_{\vec{p}_+}\hat{T}\{\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma^\mu\psi(x)\hat{\bar{\psi}}(x')\gamma^\nu\psi(x')\}\hat{b}^+_{\vec{p}'_+}\hat{a}^+_{\vec{p}_-}|0\rangle_{el} \quad .$$

Každý z vnějších kreačních operátorů sdružíme s vnitřním anihilačním operátorem a každý z vnějších anihilačních operátorů sdružíme s vnitřním kreačním operátorem

$$H^{\mu\nu} = {}_{el}\langle 0|\hat{a}_{\vec{p}'_-}\hat{b}_{\vec{p}'_+}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}'\gamma^\nu\psi'\hat{b}^+_{\vec{p}_+}\hat{a}^+_{\vec{p}_-} + \hat{a}_{\vec{p}'_-}\hat{b}_{\vec{p}'_+}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}'\gamma^\nu\psi'\hat{b}^+_{\vec{p}_+}\hat{a}^+_{\vec{p}_-} +$$

$$\hat{a}_{\vec{p}'_-}\hat{b}_{\vec{p}'_+}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}'\gamma^\nu\psi'\hat{b}^+_{\vec{p}_+}\hat{a}^+_{\vec{p}_-} + \hat{a}_{\vec{p}'_-}\hat{b}_{\vec{p}'_+}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}'\gamma^\nu\psi'\hat{b}^+_{\vec{p}_+}\hat{a}^+_{\vec{p}_-}\ |0\rangle_{el} \quad .$$

Všechny operátory *a* a *b* antikomutují, takže opět můžeme vynechat operátor chronologického uspořádání. Je tedy

$$H^{\mu\nu} = -\bar{\psi}_{-p_+}\gamma^\mu\psi_{-p'_+}\bar{\psi}'_{p'_-}\gamma^\nu\psi'_{p_-} - \bar{\psi}_{p'_-}\gamma^\mu\psi_{p_-}\bar{\psi}'_{-p_+}\gamma^\nu\psi'_{-p'_+} +$$

$$\bar{\psi}_{p'_-}\gamma^\mu\psi_{-p'_+}\bar{\psi}'_{-p_+}\gamma^\nu\psi'_{p_-} + \bar{\psi}_{-p_+}\gamma^\mu\psi_{p_-}\bar{\psi}'_{p'_-}\gamma^\nu\psi'_{-p'_+} \quad .$$

Po dosazení dostáváme

$$\langle f|\,\hat{S}^{(2)}\,|\,i\rangle \;=\; {}_{ph}\langle 0\,|\;{}_{el}\langle 0\,|\,\hat{a}_{p_-^/}\,\hat{b}_{p_+}\,\hat{S}^{(2)}\,\hat{b}^{+}_{p_+^/}\hat{a}^{+}_{p_-}\,|\,0\rangle_{el}\,|\,0\rangle_{ph} \;=$$

$$-\,i\,e^{2}\iint \mathrm{d}^{4}x\,\mathrm{d}^{4}x^{/}D_{\mu\nu}(x-x^{/})\Big(\overline{\psi}_{-p_+}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_{-p_+^/}(x)\,\overline{\psi}_{p_-^/}(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_{p_-}(x^{/})\,-$$

$$\overline{\psi}_{-p_+}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_{p_-}(x)\,\overline{\psi}_{p_-^/}(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_{-p_+^/}(x^{/})\Big)\quad .$$

Rovinné vlny nám dají

$$\overline{\psi}_{-p_+}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_{-p_+^/}(x)\,\overline{\psi}_{p_-^/}(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_{p_-}(x^{/})\;-\;\overline{\psi}_{-p^+}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi_{p_-}(x)\,\overline{\psi}_{p_-^/}(x^{/})\,\gamma^{\nu}\,\psi_{-p_+^/}(x^{/})\;=$$

$$\overline{u}(-p_+)\,\gamma^{\mu}\,u(-p_+^/)\,\overline{u}(p_-^/)\,\gamma^{\nu}\,u(p_-)\,e^{-i(p_+-p_+^/)x\,-\,i(p_--p_-^/)x^/}\;-$$

$$\overline{u}(-p_+)\,\gamma^{\mu}\,u(p_-)\,\overline{u}(p_-^/)\,\gamma^{\nu}\,u(-p_+^/)\,e^{-i(p_-+p_+)x\,+\,i(p_-^/+p_+^/)x^/}\;=$$

$$\Big(\overline{u}(-p_+)\,\gamma^{\mu}\,u(-p_+^/)\,\overline{u}(p_-^/)\,\gamma^{\nu}\,u(p_-)\,e^{-i(p_++p_-^/-p_+^/-p_-)\frac{x-x^/}{2}}\;-$$

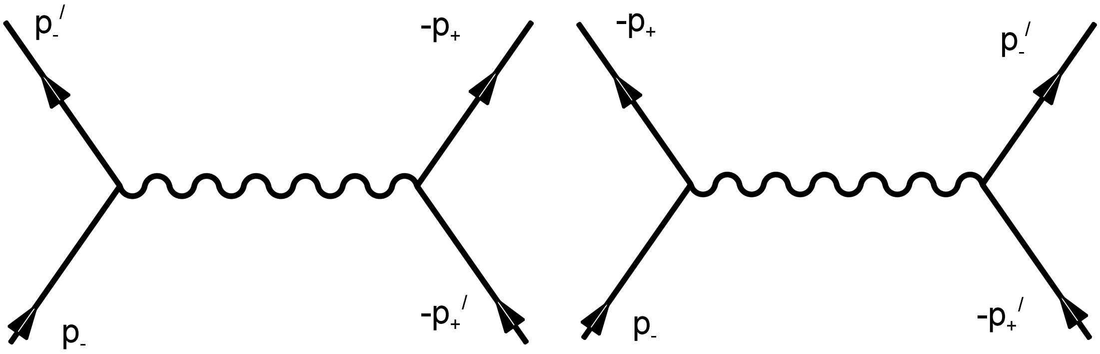
$$\overline{u}(-p_+)\,\gamma^{\mu}\,u(p_-)\,\overline{u}(p_-^/)\,\gamma^{\nu}\,u(-p_+^/)\,e^{-i(p_-+p_++p_-^/+p_+^/)\frac{x-x^/}{2}}\Big)\;e^{-i(p_-+p_+-p_-^/-p_+^/)\frac{x+x^/}{2}}\quad .$$

Po integraci dostáváme konečný tvar pro element *M* matice

$$\langle f|\,\hat{M}\,|\,i\rangle \;=\; -\,e^{2}\Big(\overline{u}(-p_+)\,\gamma^{\mu}\,u(-p_+^/)\,D_{\mu\nu}(p_--p_-^/)\,\overline{u}(p_-^/)\,\gamma^{\nu}\,u(p_-)\;-$$

$$\overline{u}(-p_+)\,\gamma^{\mu}\,u(p_-)\,D_{\mu\nu}(p_-+p_+)\,\overline{u}(p_-^/)\,\gamma^{\nu}\,u(-p_+^/)\Big)\quad .$$

Levý diagram je obyčejný rozptyl, pravý diagram je anihilace a opětná kreace páru.



7.5. Feynmanovy diagramy pro rozptyl fotonu.

Uvažujme nyní rozptyl fotonu na volném elektronu, tedy počítejme maticový element

$$ {}_{ph}\langle 0 \,|\, \hat{c}_2 \;\; {}_{el}\langle 0 \,|\, \hat{a}_2 \, \hat{S}^{(2)} \, \hat{a}_1^{+} \,|\, 0\rangle_{el} \, \hat{c}_1^{+} \,|\, 0\rangle_{ph} \; = $$

$$ -\frac{e^2}{2} \int\!\!\int F_{\mu\nu}(x,x') \, H^{\mu\nu}(x,x') \, \mathrm{d}^4x \, \mathrm{d}^4x' \quad , $$

$$ F_{\mu\nu}(x,x') \; = \; {}_{ph}\langle 0 \,|\, c_2 \, \hat{T} \{ \hat{A}_\mu(x) \, \hat{A}_\nu(x') \} \; c_1^{+} \,|\, 0\rangle_{ph} \quad , $$

$$ H^{\mu\nu}(x,x') \; = \; {}_{el}\langle 0 \,|\, \hat{a}_2 \, \hat{T} \{ \hat{\bar{\psi}}(x) \, \gamma^\mu \, \psi(x) \, \hat{\bar{\psi}}(x') \, \gamma^\nu \, \psi(x') \} \; \hat{a}_1^{+} \,|\, 0\rangle_{el} \quad . $$

Každý z vnějších kreačních operátorů sdružíme s vnitřním anihilačním operátorem a každý z vnějších anihilačních operátorů sdružíme s vnitřním kreačním operátorem

$$F_{\mu\nu} = {}_{ph}\langle 0|\hat{c}_2\hat{A}_\mu\hat{A}^{/}_\nu\hat{c}_1^{+} + \hat{c}_2\hat{A}_\mu\hat{A}^{/}_\nu\hat{c}_1^{+}|0\rangle_{ph} \quad ,$$

$$H^{\mu\nu} = \Theta(t-t^{/})\ {}_{el}\langle 0|\hat{a}_2\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi^{/}\hat{a}_1^{+} + \hat{a}_2\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi^{/}\hat{a}_1^{+}|0\rangle_{el} +$$

$$\Theta(t^{/}-t)\ {}_{el}\langle 0|\hat{a}_2\hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi^{/}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{a}_1^{+} + \hat{a}_2\hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi^{/}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi\hat{a}_1^{+}|0\rangle_{el} \quad .$$

Všechny operátory c komutují (odpovídají různým stavům), takže můžeme vynechat operátor chronologického uspořádání. Je tedy

$$F_{\mu\nu}(x,x^{/}) = A^{*}_{2\mu}(x)A_{1\nu}(x^{/}) + A_{1\mu}(x)A^{*}_{2\nu}(x^{/}) \quad .$$

Úpravou elektronové části dostáváme

$$H^{\mu\nu} =$$

$${}_{el}\langle 0|\Theta(t-t^{/})(\hat{a}_2\hat{a}_2^{+}\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi_1^{/}\hat{a}_1\hat{a}_1^{+} + \hat{a}_2\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi_1\hat{a}_1\hat{a}_2^{+}\bar{\psi}_2^{/}\gamma^\nu\psi^{/}\hat{a}_1^{+}) +$$

$$\Theta(t^{/}-t)(\hat{a}_2\hat{a}_2^{+}\bar{\psi}_2^{/}\gamma^\nu\psi^{/}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi_1\hat{a}_1\hat{a}_1^{+} + \hat{a}_2\hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi_1^{/}\hat{a}_1\hat{a}_2^{+}\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi\hat{a}_1^{+})|0\rangle_{el} =$$

$${}_{el}\langle 0|\Theta(t-t^{/})(\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi\hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi_1^{/} - \hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi_1\bar{\psi}_2^{/}\gamma^\nu\psi^{/}) +$$

$$\Theta(t^{/}-t)(\bar{\psi}_2^{/}\gamma^\nu\psi^{/}\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi_1 - \hat{\bar{\psi}}^{/}\gamma^\nu\psi_1^{/}\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi)|0\rangle_{el} \quad .$$

S využitím operátoru chronologického uspořádání (tentokráte působícího na operátory s antikomutačními vlastnostmi) můžeme dále psát

$$H^{\mu\nu} =$$

$$\bar{\psi}_2\gamma^\mu\ {}_{el}\langle 0|\hat{T}\{\psi\hat{\bar{\psi}}^{/}\}|0\rangle_{el}\gamma^\nu\psi_1^{/} + \bar{\psi}_2^{/}\gamma^\nu\ {}_{el}\langle 0|\hat{T}\{\psi^{/}\hat{\bar{\psi}}\}|0\rangle_{el}\gamma^\mu\psi_1 \quad ,$$

a tedy

$$H^{\mu\nu}(x,x^{/}) =$$

$$i\bar{\psi}_2(x)\gamma^\mu K(x-x^{/})\gamma^\nu\psi_1(x^{/}) + i\bar{\psi}_2(x^{/})\gamma^\nu K(x^{/}-x)\gamma^\mu\psi_1(x) \quad .$$

Po dosazení konečně dostáváme

$${}_{ph}\langle 0|c_2\ {}_{el}\langle 0|\hat{a}_2\hat{S}^{(2)}\hat{a}_1^{+}|0\rangle_{el}c_1^{+}|0\rangle_{ph} = -ie^2\iint \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x^{/}$$

$$\bar{\psi}_2(x)\gamma^\mu K(x-x^{/})\gamma^\nu\psi_1(x^{/})(A^{*}_{2\mu}(x)A_{1\nu}(x^{/}) + A_{1\mu}(x)A^{*}_{2\nu}(x^{/})) \quad .$$

Rovinné vlny nám dají

$$4\pi\bar{u}(p_2)\gamma^\mu e^*_{2\mu}K(x-x')\gamma^\nu e_{1\nu}u(p_1)e^{i(p_2+k_2)x-i(p_1+k_1)x'} +$$

$$4\pi\bar{u}(p_2)\gamma^\mu e_{1\mu}K(x-x')\gamma^\nu e^*_{2\nu}u(p_1)e^{i(p_2-k_1)x-i(p_1-k_2)x'} =$$

$$4\pi\bar{u}(p_2)\Bigg(\gamma^\mu e^*_{2\nu}K(x-x')\gamma^\nu e_{1\nu}e^{i(p_1+p_2+k_1+k_2)\frac{x-x'}{2}} +$$

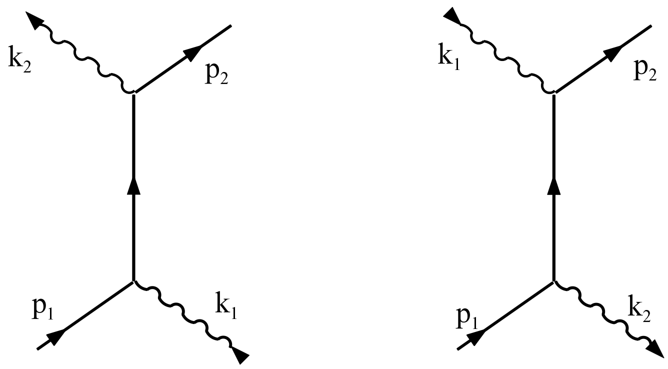
$$\gamma^\mu e_{1\mu}K(x-x')\gamma^\nu e^*_{2\nu}e^{i(p_1+p_2-k_1-k_2)\frac{x-x'}{2}}\Bigg)u(p_1)\,e^{-i(p_1+k_1-p_2-k_2)\frac{x+x'}{2}} .$$

Po integraci dostáváme konečný tvar pro element M matice

$$\langle f|\hat{M}|i\rangle = -4\pi e^2\,\bar{u}(p_2)\Big(\gamma^\mu e^*_{2\mu}G(p_1+k_1)\gamma^\nu e_{1\nu} +$$

$$\gamma^\mu e_{1\mu}G(p_1-k_2)\gamma^\nu e^*_{2\nu}\Big)u(p_1) .$$

Diagram vypadá takto



7.6. Pravidla pro výpočet Feynmanových diagramů.

1. n-té aproximaci teorie poruch odpovídají diagramy s n vrcholy, v každém z nich se potkávají jedna vstupující a jedna vystupující elektronová čára a jedna fotonová čára. K amplitudě pravděpodobnosti přechodu přispívají diagramy, jejichž počet vnějších (volných) čar je roven počtu počátečních a konečných částic.
2. Vnější vstupní elektronové čáře se přiřadí amplitudy částic počátečního stavu: elektronu v minulosti $u(p)$ nebo positronu v budoucnosti $u(-p)$. Vnější výstupní elektronové čáře se přiřadí amplitudy částic v koncovém stavu: elektronu v budoucnosti $\bar{u}(p)$ nebo

positronu v minulosti $\bar{u}(-p)$.

3. Každému vrcholu se přiřadí matice γ^μ.
4. Vnější vstupní fotonové čáře se přiřadí amplituda počátečního fotonu $(4\pi)^{1/2} e_\mu$ a vnější výstupní fotonové čáře se přiřadí amplituda konečného fotonu $(4\pi)^{1/2} e_\mu^*$. Index μ je stejný jako index matice γ^μ příslušného vrcholu, vytváří se výrazy $\underline{e} = e_\mu \gamma^\mu$ a $\underline{e}^* = e_\mu^* \gamma^\mu$.
5. Každé vnitřní elektronové čáře se přiřadí propagátor $iG(p)$
$$G(p) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\delta}$$
a každé vnitřní fotonové čáře se přiřadí propagátor $-iD_{\mu\nu}(k)$
$$D_{\mu\nu}(k) = \lim_{\delta \to 0} \frac{4\pi}{k_\mu k^\mu + i\delta} \, g_{\mu\nu} \quad .$$
Indexy μ a ν jsou shodné s indexy matic γ^μ a γ^ν příslušných vrcholů (na pořadí nezáleží).
6. Podél spojité posloupnosti elektronových čar se směr šipky nemění a sčítání přes bispinorové indexy odpovídá psaní matic zleva doprava při postupu proti směru šipky. Uzavřené elektronové smyčce pak odpovídá stopa součinu příslušných matic.
7. V každém vrcholu splňují 4-impulsy zákon zachování, podle kterého součet impulsů vstupních čar se rovná součtu impulsů výstupních čar. Impulsy vnějších čar jsou zadané (positrony -p), musí však splňovat zákon zachování (součet impulsů částic v počátečním stavu je roven součtu impulsů částic v koncovém stavu). Přes impulsy vnitřních čar t neurčené zákony zachování se integruje
$$\int \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} \quad .$$
8. Vnějšímu elektromagnetickému poli se přiřadí faktor $\underline{A}(q)$
$$\underline{A}(q) = \gamma^\mu A_\mu(q) \quad , \quad A_\mu(q) = \int A_\mu(x)\, e^{iq_\mu x^\mu} \, d^4 x \quad .$$
9. Diagramu n - tého řádu přísluší společný součinitel
$$\left(-i(e^2)^{1/2}\right)^n = \left(-i\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\right)^{1/2}\right)^n$$
a doplňující součinitel *-1* pro každou uzavřenou elektronovou čáru a pro každou spojitou positronovou čáru s oběma volnými konci. Při více elektronech nebo positronech přibývá ještě znaménko parity permutací identických částic. Jsou-li diagramy po odstranění fotonových čar stejné, musí mít stejné znaménko.

8. Exaktní propagátory.

8.1. Operátory pole v interakční a Heisenbergově representaci.

Operátory v interakční representaci

$$\psi^{int}(x) = e^{i\hat{H}_0 t}\,\psi(\vec{r})\,e^{-i\hat{H}_0 t} \quad ,$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{int}(x) = e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{\bar{\psi}}(\vec{r})\,e^{-i\hat{H}_0 t} \quad ,$$

$$\hat{A}_\mu^{int}(x) = e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{A}_\mu(\vec{r})\,e^{-i\hat{H}_0 t}$$

a podobně operátory v Heisenbergově representaci

$$\psi(x) = e^{i\hat{H}t}\,\psi(\vec{r})\,e^{-i\hat{H}t} \quad ,$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = e^{i\hat{H}t}\,\hat{\bar{\psi}}(\vec{r})\,e^{-i\hat{H}t} \quad ,$$

$$\hat{A}_\mu(x) = e^{i\hat{H}t}\,\hat{A}_\mu(\vec{r})\,e^{-i\hat{H}t} \quad .$$

Pohybové rovnice v interakční representaci jsou

$$\left[\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m\right]\psi^{int} = 0 \quad ,$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{int}\left[\gamma^\mu \hat{p}_\mu + m\right] = 0 \quad ,$$

$$\partial_\nu \partial^\mu A_\mu^{int} - \partial^\mu \partial_\mu A_\nu^{int} = 0 \quad .$$

V Heisenbergově representaci pak

$$\left[\gamma^\mu (\hat{p}_\mu - e\hat{A}) - m\right]\psi = 0 \quad ,$$

$$\hat{\bar{\psi}}\left[\gamma^\mu (\hat{p}_\mu + e\hat{A}) + m\right] = 0 \quad ,$$

$$\partial_\nu \partial^\mu A_\mu - \partial^\mu \partial_\mu A_\nu = -e\,\hat{\bar{\psi}}\,\gamma_\nu\,\psi \quad .$$

Vezmeme-li Hamiltonián

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{p},\sigma} \epsilon_{\vec{p}}\left(\hat{a}^+_{\vec{p},\sigma}\hat{a}_{\vec{p},\sigma} + \hat{b}^+_{\vec{p},\sigma}\hat{b}_{\vec{p},\sigma}\right) + \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_{\vec{k}}\,\hat{c}^+_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda} \quad ,$$

dostáváme vzhledem k antikomutačním a komutačním relacím z obecného vztahu pro operátory v interakční reprezentaci

$$\hat{A}_{int} = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}\,e^{-i\hat{H}_0 t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}_{int} = -i\,e^{i\hat{H}_0 t}[\hat{A},\hat{H}_0]\,e^{-i\hat{H}_0 t}$$

vyjádření

$$\hat{a}_{\vec{p},\sigma\,int} = \hat{a}_{\vec{p},\sigma}\,e^{-i\epsilon_{\vec{p}}t} \quad , \quad \hat{b}_{\vec{p},\sigma\,int} = \hat{b}_{\vec{p},\sigma}\,e^{-i\epsilon_{\vec{p}}t} \quad , \quad \hat{c}_{\vec{k},\lambda\,int} = \hat{c}_{\vec{k},\lambda}\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \quad ,$$

$$\hat{a}^+_{\vec{p},\sigma\,int} = \hat{a}^+_{\vec{p},\sigma}\,e^{i\epsilon_{\vec{p}}t} \quad , \quad \hat{b}^+_{\vec{p},\sigma\,int} = \hat{b}^+_{\vec{p},\sigma}\,e^{i\epsilon_{\vec{p}}t} \quad , \quad \hat{c}^+_{\vec{k},\lambda\,int} = \hat{c}^+_{\vec{k},\lambda}\,e^{i\omega_{\vec{k}}t} \quad .$$

8.2. Přechod od interakční k Heisenbergově reprezentaci.

Operátor S - matice máme zaveden jako

$$\hat{S}(t_2,t_1) = \hat{T}\left\{\exp\left(-i\int_{t_1}^{t_2} \hat{H}_{int}(t')\,\mathrm{d}t' \right)\right\} \quad ,$$

$$\hat{S}(t,t')\,\hat{S}(t',t_0) = \hat{S}(t,t_0) \quad , \quad \hat{S}^{-1}(t_2,t_1) = \hat{S}^{+}(t_2,t_1) = \hat{S}(t_1,t_2) \quad .$$

Stavové vektory v Heisenbergově a interakční reprezentaci jsou v daleké minulosti (interakci adiabaticky zapínáme) stejné, tedy

$$|\Phi_{int}(t=-\infty)\rangle = |\Phi\rangle \quad , \quad |\Phi_{int}(t)\rangle = \hat{S}(t,-\infty)\,|\Phi_{int}(t=-\infty)\rangle = \hat{S}(t,-\infty)\,|\Phi\rangle \quad ,$$

$$\langle\Phi_{int}(t)\,|\,\hat{A}_{int}\,|\,\Phi_{int}(t)\rangle = \langle\Phi\,|\,\hat{S}^{+}(t,-\infty)\,\hat{A}_{int}\,\hat{S}(t,-\infty)\,|\,\Phi\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\hat{A} = \hat{S}(-\infty,t)\,\hat{A}_{int}\,\hat{S}(t,-\infty) \quad .$$

Vakuový stav se může v interakční reprezentaci lišit jen fázovým faktorem. Zejména máme pro S - matici $\hat{S} = \hat{S}(\infty,-\infty)$

$$|\Phi_{int}^{vac}(-\infty)\rangle = |0\rangle \quad , \quad |\Phi_{int}^{vac}(\infty)\rangle = \hat{S}\,|\Phi_{int}^{vac}(-\infty)\rangle = \hat{S}\,|0\rangle \quad ,$$

$$e^{i\alpha} = \langle\Phi_{int}^{vac}(-\infty)\,|\,\Phi_{int}^{vac}(\infty)\rangle = \langle 0\,|\,\hat{S}\,|\,0\rangle \quad .$$

8.3. Exaktní fotonový propagátor.

Je definován analogicky k propagátoru volných fotonů

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0\,|\,\hat{T}\hat{A}_{\mu}^{int}(x)\,\hat{A}_{\nu}^{int}(x')\,|\,0\rangle \quad ,$$

tedy jako

$$\boldsymbol{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0\,|\,\hat{T}\hat{A}_{\mu}(x)\,\hat{A}_{\nu}(x')\,|\,0\rangle \quad ,$$

Uvažujme nejprve $t>t'$. Máme pak

$$\boldsymbol{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0\,|\,\hat{T}\hat{A}_{\mu}(x)\,\hat{A}_{\nu}(x')\,|\,0\rangle =$$

$$i\langle 0\,|\,\hat{S}(-\infty,t)\,\hat{A}_{\mu}^{int}(x)\,\hat{S}(t,-\infty)\,\hat{S}(-\infty,t')\,\hat{A}_{\nu}^{int}(x')\,\hat{S}(t',-\infty)\,|\,0\rangle \quad .$$

S využitím vztahů

$$\hat{S}(t,-\infty)\,\hat{S}(-\infty,t') = \hat{S}(t,t') \quad ,$$

$$\hat{S}(-\infty,t) = \hat{S}(-\infty,\infty)\,\hat{S}(\infty,t) = \hat{S}^{-1}\,\hat{S}(\infty,t)$$

a

$$\hat{S}(\infty,t)\,\hat{A}^{int}_{\mu}(x)\,\hat{S}(t,t')\,\hat{A}^{int}_{\nu}(x')\,\hat{S}(t',-\infty) =$$

$$\hat{T}\{\hat{S}(\infty,t)\,\hat{A}^{int}_{\mu}(x)\,\hat{S}(t,t')\,\hat{A}^{int}_{\nu}(x')\,\hat{S}(t',-\infty)\} =$$

$$\hat{T}\{\hat{A}^{int}_{\mu}(x)\,\hat{A}^{int}_{\nu}(x')\hat{S}(\infty,t)\,\hat{S}(t,t')\,\hat{S}(t',-\infty)\} = \hat{T}\{\hat{A}^{int}_{\mu}(x)\,\hat{A}^{int}_{\nu}(x')\,\hat{S}\}$$

můžeme exaktní propagátor zapsat jako

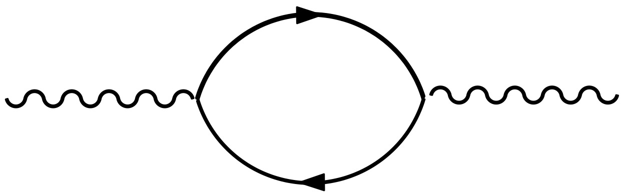
$$\boldsymbol{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|\hat{S}^{-1}\,\hat{T}\{\hat{A}^{int}_{\mu}(x)\,\hat{A}^{int}_{\nu}(x')\,\hat{S}\}|0\rangle \quad .$$

Podobně dopadne i výpočet pro $t<t'$. Ještě využijeme toho, jak působí operátor S - matice na vakuový stav a dostaneme konečný výraz

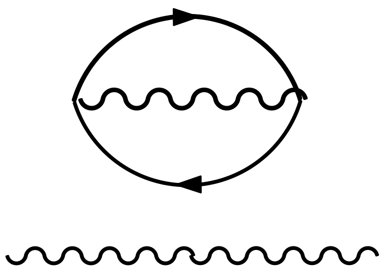
$$\boldsymbol{D}_{\mu\nu}(x-x') = \frac{i\langle 0|\hat{T}\{\hat{A}^{int}_{\mu}(x)\,\hat{A}^{int}_{\nu}(x')\,\hat{S}\}|0\rangle}{\langle 0|\hat{S}|0\rangle} \quad .$$

V diagramech máme v čitateli jako členy druhého řádu kromě (a) také (b), takové členy odstraní jmenovatel.

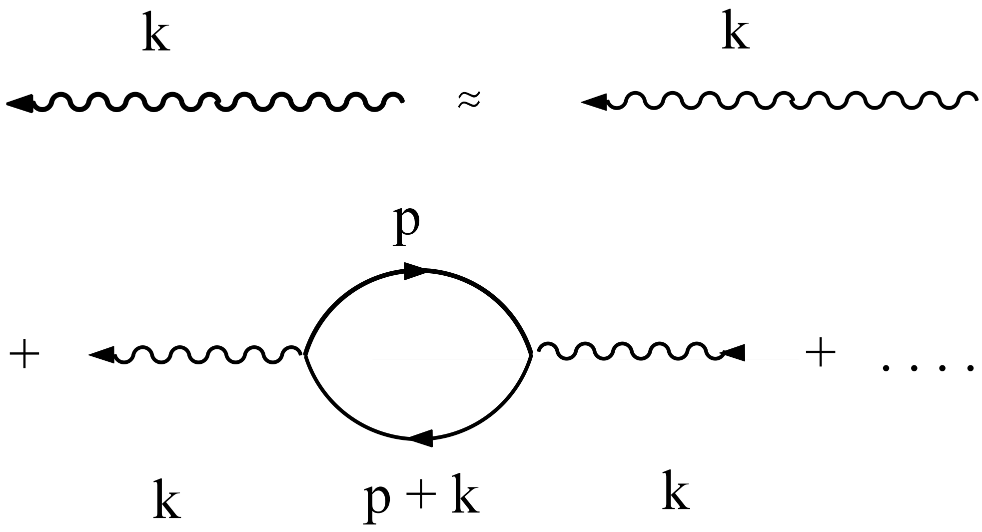
(a)



(b)



Při výpočtu do druhého řádu je tedy v diagramu



V zápisu potom

$$\boldsymbol{D}_{\mu\nu}(k) \approx D_{\mu\nu}(k) + i e^2 D_{\mu\nu}(k) \int \mathrm{Tr}\{\gamma^\lambda G(p+k)\gamma^\rho G(p)\} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} D_{\rho\nu}(k) \quad .$$

8.4. Exaktní elektronový propagátor.

Stejnými úvahami jako u fotonového propagátoru dojdeme od výrazu pro propagátor volných elektronů

$$K(x - x') = -i \langle 0 | \hat{T}\{ \hat{\psi}^{int}(x) \hat{\bar{\psi}}^{int}(x') \} | 0 \rangle$$

k exaktnímu propagátoru

$$\boldsymbol{K}(x - x') = \frac{-i \langle 0 | \hat{T}\{ \hat{\psi}^{int}(x) \hat{\bar{\psi}}^{int}(x') \hat{S}\} | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle} \quad .$$

9. Hmotový a polarizační operátor.

9.1. Operátory.

Fotonový polarizační operátor

$$\frac{iP^{\mu\nu}(k)}{4\pi} \approx e^2 \int \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\mu G(p)\gamma^\nu G(p+k)\}\, \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}$$

a elektronový hmotový operátor

$$M(p) \approx -i\,e^2 \int \gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(k)\, \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}$$

jsou singulárními výrazy. Obecně ve Feynmanově diagramu n -tého řádu mějme N_e vnějších elektronových čar a N_γ vnějších fotonových čar. Číslo N_e je sudé, a elektrony tvoří $N_e/2$ spojitých linií. Na každé linii je určitý počet vrcholů, a počet vnitřních čar linie je o jedničku menší než počet vrcholů. Celkem tedy (sečteme pro všechny linie) je n-N_e vnitřních elektronových čar. Každý vrchol obsahuje jednu fotonovou čáru, N_γ je vnějších fotonových čar a vnitřní čára je zakončena dvěma vrcholy, je tedy $(n-N_\gamma)/2$ vnitřních fotonových čar. Propagátor $D(k)$ obsahuje k ve druhé mocnině ve jmenovateli, propagátor $G(p)$ obsahuje (pro velká p) p v první mocnině ve jmenovateli. Celkově je tedy stupeň 4-impulsu ve jmenovateli

$$2n - \frac{N_e}{2} - N_\gamma \quad .$$

Počet integrací podle d^4p resp. d^4k je roven počtu vnitřních čar zmenšenému o n-1 (zákony zachování ve vrcholech, n-tý zákon svazuje impulsy počátečního a koncového stavu, tedy máme v čitateli stupeň 4-impulsu, který je čtyřnásobkem tohoto počtu

$$2\,(n - N_e - N_\gamma + 2) \quad .$$

Celkový stupeň je pak

$$r = 4 - \frac{3N_e}{2} - N_\gamma \quad .$$

Při $r<0$ pro diagram (a všechny jeho podčásti) integrály konvergují, pro $r=2$ divergují kvadraticky, pro $r=1$ a $r=0$ logaritmicky.

10. Teorie β- rozpadu.

10.1. Interakční členy v Lagrangiánu.

Nejznámějším projevem β-rozpadu je reakce $n \to p + e + \overline{\nu}$. Fermi 1934 předpokládal, že ve výrazu pro amplitudu pravděpodobnosti nejsou obsaženy derivace polí. Jsou pak tyto možnosti vazeb: skalární, pseudoskalární, vektorová polární a axiální a tensorová

$$G_S(\overline{\psi}_p\psi_n)(\overline{\psi}_e\psi_\nu) \quad , \quad G_P(\overline{\psi}_p\gamma^5\psi_n)(\overline{\psi}_e\gamma^5\psi_\nu) \quad ,$$

$$G_V(\overline{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\overline{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu) \quad , \quad G_A(\overline{\psi}_p\gamma^\mu\gamma^5\psi_n)(\overline{\psi}_e\gamma_\mu\gamma^5\psi_\nu) \quad ,$$

$$G_T(\overline{\psi}_p\sigma^{\mu\nu}\psi_n)(\overline{\psi}_e\sigma_{\mu\nu}\psi_\nu) \quad , \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad .$$

Všechny tyto výrazy jsou invariantní vzhledem k rotaci, Lorentzově transformaci a prostorové inversi. Přidání matice γ^5 v jednom součiniteli vede k narušení symetrie vzhlem k prostorové inversi. Toto narušení je experimentálně potvrzeno (K^+ mesony se rozpadají na dva ale také tři π mesony, při rozpadu Co^{60} vyletují elektrony polarizovány více proti směru orientace jaderného spinu). Lee a Yang, a také Landau a Salam předpokládali, že jev nezachování parity je způsoben tím, že neutrino je pouze levotočivé. Tedy ze dvou možných relativisticky invariantních rovnic pro částici s nulovou klidovou hmotností a spinem ½ platí pro neutrino pouze

$$(E + \vec{\sigma}\vec{p})\, v_\nu = 0 \quad ,$$

zatímco pro antineutrino je

$$(E - \vec{\sigma}\vec{p})\, u_{\overline{\nu}} = 0 \quad .$$

Připomeňme, že pro elektrony platí

$$(E - \vec{\sigma}\vec{p})\, u = mv \quad , \quad (E + \vec{\sigma}\vec{p})\, v = mu \quad \Rightarrow$$

$$(E - \vec{\sigma}\vec{p})(E + \vec{\sigma}\vec{p})\, v = m^2 v \quad .$$

Gell-Mann s Feynmanem a Marshak se Sudarshanem pak uvažovali, že se v interakčním lagrangiánu objeví také jen elektronový bispinor v_e, a jedinou relativisticky invariantní kombinací je

$$G(v_p^+\sigma^\mu v_n)(v_e^+\sigma_\mu v_\nu) \quad .$$

Pro zápis ve tvaru bispinorů zavedeme pomocí matice γ^5 (spinorová representace)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

projekční matice a jako

$$a = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{a} = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$a^2 = a \quad , \quad \overline{a}^2 = \overline{a} \quad , \quad a\overline{a} = \overline{a}a = 0 \quad , \quad a + \overline{a} = 1 \quad , \quad \overline{a}\gamma^\mu = \gamma^\mu a \quad ,$$

takže platí

$$a\psi = a\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{a}\psi = \overline{a}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Interakční lagrangián má pak tvar

$$G(\overline{a\psi_p}\gamma^\mu a\psi_n)(\overline{a\psi_e}\gamma_\mu a\psi_\nu) = G(\overline{\psi}_p\gamma^\mu a\psi_n)(\overline{\psi}_e\gamma_\mu a\psi_\nu) \quad .$$

Počítejme pravděpodobnost rozpadu neutronu polarizovaného podél osy z, sečítáme přes spinové stavy protonu

$$\sum M^* M = G^2\, Tr\{\gamma^\rho a(\underline{p_p} + M)\gamma^\mu a(\underline{p_n} + M)\frac{1}{2}(1 - \gamma^5 \underline{w_n})\}\,.$$

$$Tr\{\gamma_\rho a(\underline{p_e} + m)\frac{1}{2}(1 - \gamma^5 \underline{w_e})\gamma_\mu a\underline{p_\nu}\} \quad .$$

S využitím vztahů pro matici a dostaneme jejím přesouváním (a využitím toho, že stopa součinu lichého počtu γ matic je rovna nule)

$$\sum M^* M = \frac{G^2}{16}\, Tr\{\gamma^\rho \underline{p_p}\gamma^\mu(\underline{p_n} - M\underline{w_n})(1 - \gamma^5)\}\,.$$

$$Tr\{\gamma_\rho \underline{p_\nu}\gamma_\mu(\underline{p_e} - m\underline{w_e})(1 - \gamma^5)\} \quad .$$

V první stopě ponecháme pouze členy obsahující M, tedy

$$\sum M^* M = \frac{G^2 M^2}{16}\, Tr\{\gamma^\rho \gamma^0 \gamma^\mu(\gamma^0 + \gamma^3)(1 - \gamma^5)\}\,.$$

$$Tr\{\gamma_\rho \underline{p_\nu}\gamma_\mu(\underline{p_e} - m\underline{w_e})(1 - \gamma^5)\} \quad .$$

Po výpočtu stopy máme

$$\sum M^* M = G^2 M^2(\epsilon_\nu + p_\nu^z)(\epsilon_e - m w_e^0) \quad ,$$

a po zavedení spirality elektronu σ pak máme

$$\sum M^* M = G^2 M^2 \epsilon_\nu \epsilon_e (1 + \cos\theta_\nu)(1 - \sigma v_e) \quad .$$

Antineutrina vyletují především ve směru spinové orientace neutronu, elektrony isotropně, ovšem převážně se spinem proti směru impulsu.

11. Lorentzova grupa.

S obvyklým značením

$$G = \left(\eta_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \left(x^\mu\right) = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

můžeme definovat skalární součin dvou čtyřrozměrných vektorů jako

$$(x,y) = x^T G\, y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad .$$

Lorentzova transformace je lineární zobrazení, které zobrazuje prostoročas sám na sebe a které zachovává skalární součin

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho \quad , \quad x \rightarrow x' = \Lambda x \quad .$$

Pro skalární součin je

$$(\Lambda x)^T G \Lambda y = x^T \Lambda^T G \Lambda y = x^T G y \quad \Rightarrow \quad \Lambda^T G \Lambda = G \quad ,$$

a uvážíme-li

$$\Lambda^{T\ \nu}_{\ \mu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu} \quad ,$$

máme pro zápis ve složkách

$$\eta_{\rho\sigma} \Lambda^{\rho}_{\ \mu} \Lambda^{\sigma}_{\ \nu} = \eta_{\mu\nu} \quad .$$

Jsou-li Λ a M Lorentzovy transformace, jsou také Λ^{-1} a ΛM Lorentzovy transformace, což snadno ověříme

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^{\rho}_{\ \mu} \Lambda^{\sigma}_{\ \nu} \Lambda^{-1\ \mu}_{\ \ \ \alpha} \Lambda^{-1\ \nu}_{\ \ \ \beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{-1\ \mu}_{\ \ \ \alpha} \Lambda^{-1\ \nu}_{\ \ \ \beta} \quad ,$$

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} M^{\rho}_{\ \mu} M^{\sigma}_{\ \nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\ \rho} \Lambda^{\beta}_{\ \sigma} M^{\rho}_{\ \mu} M^{\sigma}_{\ \nu} = \eta_{\alpha\beta} (\Lambda M)^{\alpha}_{\ \mu} (\Lambda M)^{\beta}_{\ \nu} \quad .$$

Lorentzovy transformace tvoří grupu. Grupa ma čtyři podgrupy, charakterizované hodnotou determinantu a $\Lambda^0_{\ 0}$, neboť

$$(\det\Lambda)^2 = 1 \quad , \quad (\Lambda^0_{\ 0})^2 - \sum_{j=1}^{3} (\Lambda^j_{\ 0})^2 = 1 \quad .$$

Vlastní Lorentzova grupa je tvořena transformacemi s $\det\Lambda=1$ a $\mathrm{sgn}\Lambda^0_{\ 0}=1$. Máme

$$L^{+}_{+} \ : \ \det\Lambda = 1 \quad , \quad \mathrm{sgn}\Lambda^0_{\ 0} = 1 \quad , \quad 1 \in L^{+}_{-} \quad ,$$

$$L^{+}_{-} \ : \ \det\Lambda = -1 \quad , \quad \mathrm{sgn}\Lambda^0_{\ 0} = 1 \quad , \quad I_s \in L^{+}_{-} \quad ,$$

$$L^{-}_{+} \ : \ \det\Lambda = 1 \quad , \quad \mathrm{sgn}\Lambda^0_{\ 0} = -1 \quad , \quad I_{st} \in L^{-}_{+} \quad ,$$

$$L^{-}_{-} \ : \ \det\Lambda = -1 \quad , \quad \mathrm{sgn}\Lambda^0_{\ 0} = -1 \quad , \quad I_t \in L^{-}_{-} \quad .$$

Lorentzovy transformace I_s (prostorová inverse), I_t (časová inverse) a I_{st} (časoprostorová inverse) jsou definovány pomocí vztahů

$$(I_s x)^0 = x^0 \quad , \quad (I_s x)^j = -x^j \quad ,$$
$$(I_t x)^0 = -x^0 \quad , \quad (I_s x)^j = x^j \quad ,$$
$$(I_{st} x)^0 = -x^0 \quad , \quad (I_s x)^j = -x^j \quad .$$

Se speciální Lorentzovou grupou je spojena grupa komplexních matic druhého řádu s determinantem, rovným jedné, platí $SO(3,1)=SL(2,C)/Z_2$.

12. Grupa SL(2,C).

Čtyřvektoru x přiřadíme komplexní matici $2x2\,\hat{x}$ vztahem

$$\hat{x} = \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu}\sigma^{\mu} \quad ,$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

takže

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad .$$

Platí

$$\det\hat{x} = x^{\mu}x_{\mu} \quad , \quad x^{\mu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\hat{x}\sigma^{\mu}) \quad .$$

Každé dvojici matic $\{\hat{\lambda}\,,\ -\hat{\lambda}\} \in SL(2,C)$ lze přiřadit Lorentzovu transformaci přiřazením

$$\hat{x}' = \hat{\lambda}\,\hat{x}\,\hat{\lambda}^{+} \quad , \quad x' = \Lambda x \quad .$$

Matici λ lze zapsat jako součin hermiteovské matice a unitární matice

$$\lambda(\vec{u},\vec{\omega}) = e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}}\, e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\vec{\omega}} \quad .$$

Důkaz: zapišme $\lambda\lambda^{+} = e^{1/2\,\vec{\sigma}.\vec{u}}$, potom

$$\left[e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}}\lambda\right]\left[e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}}\lambda\right]^{+} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}}\lambda = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\vec{\omega}} \quad .$$

Jiný způsob zápisu

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\varphi\vec{n}_{\varphi}.\vec{\sigma}}\, e^{\frac{i}{2}\theta\vec{n}_{\theta}.\vec{\sigma}} = \left(\cosh\frac{\varphi}{2} - \vec{n}_{\varphi}.\vec{\sigma}\sinh\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\vec{n}_{\theta}.\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad .$$

Protože pro Pauliho matice platí

$$(\vec{\sigma}.\vec{a})(\vec{\sigma}.\vec{b}) = \vec{a}.\vec{b} + i\vec{\sigma}.(\vec{a}\times\vec{b}) \quad ,$$

můžeme poslední vztah přepsat na

$$\lambda = \cosh\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - i\vec{n}_{\varphi}.\vec{n}_{\vartheta}\sinh\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} +$$

$$\left(-\vec{n}_{\varphi}\sinh\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + i\vec{n}_{\theta}\cosh\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2} - i\vec{n}_{\varphi}\times\vec{n}_{\vartheta}\sinh\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\right).\vec{\sigma} \quad .$$

13. Spinorová representace Lorentzovy grupy.

Spinor ξ je dvoukomponentová veličina, která se transformuje při transformacích Lorentzovy grupy jako

$$\xi'^{A} = \lambda^{A}{}_{B}\,\xi^{B} \quad , \quad \eta'^{\dot{A}} = \lambda^{*\dot{A}}{}_{\dot{B}}\,\eta^{\dot{B}} \quad .$$

Pro pohodlnost zápisu zavádíme kromě “kovariantních” také “kontravariantní” spinory

$$\xi_A = g_{AB}\,\xi^B \quad , \quad \eta_{\dot A} = g_{\dot A \dot B}\,\eta^{\dot B} \quad ,$$

$$(g_{AB}) = (g_{\dot A \dot B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Spinor druhého řádu ς

$$\varsigma'^{A\dot B} = \lambda^A{}_C\,\lambda^{*\dot B}{}_{\dot D}\,\varsigma^{C\dot D}$$

je ekvivalentní čtyřvektoru

$$\vec a = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\varsigma\vec\sigma) \quad , \quad a^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\varsigma \quad ,$$

$$\varsigma = a^0 + \vec a . \vec\sigma \quad .$$

Relativisticky invariantní rovnice pak je

$$\hat p^{A\dot B}\,\eta_{\dot B} = m\,\xi^A \quad , \quad \hat p_{\dot A B}\,\xi^B = m\,\eta_{\dot A} \quad ,$$

$$\hat p^{1\dot 1} = \hat p_{2\dot 2} = \hat p_0 - \hat p_3 \quad , \quad \hat p^{2\dot 2} = \hat p_{1\dot 1} = \hat p_0 + \hat p_3 \quad ,$$

$$\hat p^{1\dot 2} = -\hat p_{2\dot 1} = -\hat p_1 + i\hat p_2 \quad , \quad \hat p^{2\dot 1} = -\hat p_{1\dot 2} = -\hat p_1 - i\hat p_2 \quad .$$

Poněvadž platí

$$\hat p^{A\dot C}\,\hat p_{B\dot C} = \hat p^2\,\delta^A{}_B \quad , \quad \hat p_{C\dot A}\,\hat p^{C\dot B} = \hat p^2\,\delta^{\dot B}{}_{\dot A} \quad ,$$

můžeme psát

$$(\hat p^2 - m^2)\,\xi^A = 0 \quad , \quad (\hat p^2 - m^2)\,\eta_{\dot A} = 0 \quad .$$

14. Representace Lorentzovy grupy pomocí representace SU(2).

Pro infinitezimální matice ireducibilních representací Lorentzovy grupy můžeme psát

$$B_i^{(+)} = M_i \times E_T + E_M \times T_i \quad , \quad B_i^{(-)} = i(M_i \times E_T - E_M \times T_i) \quad ,$$

kde M_i a T_i jsou infinitesimální matice iredicibiliních representací grupy rotací, E_M a E_T příslušné jednotkové matice. Dimense M_i je $2j+1$ a dimense T_i je $2j'+1$, representaci značíme $D^{(j\,j')}$.

Kreační a anihilační operátory

$$[\hat a, \hat a^+] = [\hat b, \hat b^+] = 1 \quad , \quad [\hat a, \hat b] = [\hat a, \hat b^+] = 0 \quad ,$$

$$\hat a\,|\,0\rangle = \hat b\,|\,0\rangle = 0 \quad .$$

Pomocí těchto operátorů se vytvoří operátory infinitesimálních rotací

$$\hat J_3 = \frac{1}{2}(\hat a^+\hat a - \hat b^+\hat b) \quad , \quad \hat J_1 + i\hat J_2 = \hat a^+\hat b \quad , \quad \hat J_1 - i\hat J_2 = \hat b^+\hat a \quad ,$$

$$\hat J = \frac{1}{2}(\hat a^+\hat a + \hat b^+\hat b) \quad ,$$

takže platí komutační relace

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad , \quad [\hat{J},\hat{J}_i] = 0 \quad .$$

Vytvoříme stavové vektory

$$|j,m\rangle = \frac{\hat{a}^{+j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{\hat{b}^{+j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle \quad .$$

Nenulové maticové elementy operátorů a a b jsou

$$\langle j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}|\hat{a}^{+}|j,m\rangle = \sqrt{j+m+1} \ , \ \langle j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}|\hat{b}^{+}|j,m\rangle = \sqrt{j-m+1} \ ,$$

$$\langle j-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}|\hat{a}|j,m\rangle = \sqrt{j+m} \quad , \quad \langle j-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}|\hat{b}|j,m\rangle = \sqrt{j-m} \quad ,$$

a nenulové maticové elementy operátorů J_i jsou

$$\langle j,m|\hat{J}|j,m\rangle = j \quad , \quad \langle j,m|\hat{J}_3|j,m\rangle = m \quad ,$$

$$\langle j,m+1|\hat{J}_1 + i\hat{J}_2|j,m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \quad ,$$

$$\langle j,m-1|\hat{J}_1 - i\hat{J}_2|j,m\rangle = \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \quad .$$

15. Matice γ v D-rozměrném prostoru.

V D-rozměrném prostoru mějme soubor γ-matic $\gamma^0,\gamma^1,\ldots,\gamma^{D-1}$ a matici γ_5 dimenze 4x4 splňující vztahy

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad \gamma_5^2 = 1 \quad , \quad \mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 0 \quad ,$$

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad \mu\neq\nu \quad , \quad g^{00} = 1 \quad , \quad g^{ii} = -1 \quad i = 1,2,..D-1 \quad .$$

Platí

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu} \ , \ \mathrm{Tr}\{\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 0 \ , \ \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\} = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right) \ ,$$

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = D \ , \ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = (2-D)\gamma^\alpha \ , \ \gamma_\mu\gamma_5\gamma^\mu = -D\gamma_5 \ , \ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta} + (D-4)\gamma^\alpha\gamma^\beta$$

a

$$\underline{a}\,\underline{b} + \underline{b}\,\underline{a} = 2a_\mu b^\mu \quad , \quad \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a} = -a_\mu a^\mu \underline{b} + 2a_\mu b^\mu \underline{a} \quad .$$

16. Hmotový a polarizační operátor.

16.1. Operátory.

Fotonový polarizační operátor

$$\frac{iP^{\mu\nu}(k)}{4\pi} \approx e^2 \int \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\mu G(p)\gamma^\nu G(p+k)\}\,\frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}$$

a elektronový hmotový operátor

$$M(p) \approx -i\,e^2 \int \gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(k)\,\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \quad .$$

Přitom elektronový propagátor *G(p)* je

$$G(p) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\not p + m}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\delta}$$

a fotonový propagátor $D_{\mu\nu}(k)$ je

$$D_{\mu\nu}(k) = \lim_{\delta\to 0} \frac{4\pi}{k_\mu k^\mu + i\delta}\, g_{\mu\nu} \quad .$$

17. Invariantní účinný průřez.

Mějme dva svazky částic, které se srážejí. Počítejme v klidové soustavě částice *2* počet srážek v objemu $\mathrm{d}V$ za čas $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}\nu = n_1\,\sigma\, v_{rel}\,\mathrm{d}t\, n_2\,\mathrm{d}V \quad , \quad \mathrm{d}\nu = A\, n_1\, n_2\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t \quad ,$$

kde v_{rel} je velikost rychlosti částice *1* v klidové soustavě částice *2*, n_1 a n_2 jsou hustoty a konečně σ je účinný průřez. Veličiny $\mathrm{d}\nu$ a $\mathrm{d}V\mathrm{d}t$ jsou invarianty, musí tedy být invariantem také veličina $A\,n_1 n_2$, přičemž A musí v klidové soustavě jedné z částiv přejít na $v_{rel}\sigma$. Máme

$$n\,\mathrm{d}V = n_0\,\mathrm{d}V_0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2}} = n_0\,\frac{\epsilon}{m}$$

a tedy

$$A\,n_1\,n_2 = inv^{//} \quad \Rightarrow \quad A\,\epsilon_1\,\epsilon_2 = inv^{/} \quad \Rightarrow \quad A\,\frac{\epsilon_1\,\epsilon_2}{p_{1\mu}p_2^\mu} = inv \quad .$$

V klidové soustavě částice *2* je

$$A = v_{rel}\,\sigma \quad , \quad p_2^\mu = (\epsilon_2 = m_2, \vec{p}_2 = 0) \quad \Rightarrow \quad p_{1\mu}p_2^\mu = \epsilon_1\,\epsilon_2 \quad \Rightarrow \quad inv = v_{rel}\,\sigma$$

$$p_{1\mu}p_2^\mu = \frac{m_1}{\sqrt{1-v_{rel}^2}}\, m_2 \quad \Rightarrow \quad v_{rel} = \left(1 - \frac{m_1^2\, m_2^2}{(p_{1\mu}p_2^\mu)^2}\right)^{1/2} \quad .$$

Spojením vztahů dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{dt} = \sigma\, n_1\, n_2\,\mathrm{d}V\,\frac{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1\, m_2}}{\epsilon_1\,\epsilon_2} \quad .$$

Účinný průřez dostaneme tedy z pravděpodobnosti přechodu za jednotku času

$$d\sigma = \frac{dw}{j} \quad , \quad j = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1 m_2}}{V \epsilon_1 \epsilon_2} \quad .$$

V těžišťové soustavě je $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, a tedy

$$j = \frac{|\vec{p}|}{V} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) = \frac{v_1 + v_2}{V} \quad ,$$

v souladu s obvyklou definicí hustoty toku.

18. Spinová matice hustoty.

Spinory vyhovují řešitelným (determinant je roven nule) soustavám algebraických rovnic

$$\left(\underline{p} - m\right) u(p) = 0 \quad , \quad \left(\underline{p} + m\right) u(-p) = 0 \quad .$$

Normujeme je tak, aby platilo

$$\bar{u}(p)\, u(p) = 2m \quad , \quad \bar{u}(-p)\, u(-p) = -2m \quad .$$

Ve standardní representaci máme

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + m}\, w(p) \\ \sqrt{\epsilon - m}\, (\vec{n}.\vec{\sigma})\, w(p) \end{pmatrix} \quad , \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon - m}\, (\vec{n}.\vec{\sigma})\, w(-p) \\ \sqrt{\epsilon + m}\, w(-p) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{p} \quad , \quad w(p)^{+} w(p) = w(-p)^{+} w(-p) = 1 \quad .$$

V těchto výrazech jsou $w(p)$ a $w(-p)$ libovolné normované dvoukomponentové veličiny. Pro relativisticky sdružené výrazy dostáváme

$$\bar{u}(p) = \left(\sqrt{\epsilon + m}\, w(p)^{+} \quad , \quad -\sqrt{\epsilon - m}\, w(p)^{+} (\vec{n}.\vec{\sigma}) \right) \quad ,$$

$$\bar{u}(-p) = \left(\sqrt{\epsilon - m}\, w(-p)^{+} (\vec{n}.\vec{\sigma}) \quad , \quad -\sqrt{\epsilon + m}\, w(-p)^{+} \right) \quad .$$

Této volnosti můžeme užít pro vhodnou volbu vlnové funkce. Možnou volbou je

$$w(p)^{(\sigma = \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad w(-p)^{(\sigma = \frac{1}{2})} = -\sigma_y\, w(p)^{(\sigma = -\frac{1}{2})\, *} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$w(p)^{(\sigma = -\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad w(-p)^{(\sigma = -\frac{1}{2})} = -\sigma_y\, w(p)^{(\sigma = \frac{1}{2})\, *} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \quad .$$

Platí

$$\sum_{\sigma} w(p)^{\sigma} w(p)^{\sigma +} = \sum_{\sigma} w(-p)^{\sigma} w(-p)^{\sigma +} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Potom je

$$\sum_{\sigma} u(p)^{\sigma} u(p)^{\sigma +} = \underline{p} + m \quad , \quad \sum_{\sigma} u(-p)^{\sigma} u(-p)^{\sigma +} = \underline{p} - m \quad .$$

Spinová matice hustoty v čistém stavu je

$$\rho_{AB}(p) = u(p)_A \, \bar{u}(p)_B \quad ,$$

$$\mathrm{Tr}\{\rho(p)\} = \sum_A u(p)_A \, \bar{u}(p)_A = \bar{u}(p)\, u(p) = 2m \quad .$$

Poněkud odlišně oproti běžné matici hustoty zde stopa není rovna 1. Matice hustoty v čistém i smíšeném stavu bude tedy splňovat rovnice

$$(\underline{p} - m)\,\rho(p) = 0 \quad , \quad \rho(p)\,(\underline{p} - m) = 0 \quad .$$

V čistém stavu je střední hodnota spinu

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \int \psi^* \, \vec{\Sigma} \, \psi \, \mathrm{d}^3 x = \frac{1}{4\epsilon} u(p)^* \, \vec{\Sigma} \, u(p) = \frac{1}{4\epsilon} \bar{u}(p) \, \gamma^0 \, \vec{\Sigma} \, u(p) =$$

$$\frac{1}{4\epsilon} \sum_A \sum_B \bar{u}(p)_A \, (\gamma^0 \, \vec{\Sigma})_{AC} \, u(p)_C = \frac{1}{4\epsilon} \mathrm{Tr}\{\rho(p) \gamma^0 \, \vec{\Sigma}\} = \frac{1}{4\epsilon} \mathrm{Tr}\{\rho(p) \gamma^5 \, \vec{\gamma}\} \quad .$$

Polarizační vektor v klidové soustavě označme $\vec{\zeta}$, platí tedy pro čistý stav $|\vec{\zeta}| = 1$, pro smíšený stav $|\vec{\zeta}| < 1$. Čtyřvektory v klidové soustavě jsou

$$p^\mu = (m, \vec{0}) \quad , \quad a^\mu = (0, \vec{\zeta})$$

a obecně tedy musí platit

$$p^\mu p_\mu = m^2 \quad , \quad a^\mu a_\mu = -|\vec{\zeta}|^2 \quad , \quad a^\mu p_\mu = 0 \quad .$$

Lorentzova transformace do laboratorní soustavy dává

$$a^0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{\epsilon} = \frac{\vec{\zeta} \cdot \vec{p}}{m} \quad , \quad \vec{a} = \vec{\zeta} + \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{p})\, \vec{p}}{m\,(\epsilon + m)} \quad .$$

Matice hustoty pro nepolarizovaný svazek bude mít tvar (musí obsahovat pouze impulz jako jedinou charakteristiku a splňovat dané rovnice)

$$\rho_n(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m) \quad .$$

Pro obecný smíšený stav bude mít tvar

$$\rho(p) = \frac{1}{4m}(\underline{p} + m)\, \tilde{\rho}(\underline{a})\, (\underline{p} + m) \quad ,$$

$$\tilde{\rho}(\underline{a} = 0) = 1 \quad , \quad (\underline{p} + m)^2 = 2m(\underline{p} + m) \quad .$$

Matice $\tilde{\rho}$ má linerně záviset na čtyřvektoru $\underline{a}$. Napišme tedy

$$\tilde{\rho} = 1 - A \gamma^5 \underline{a} \quad .$$

Konstantu A určíme výpočtem střední hodnoty spinu v klidové soustavě

$$\rho(p) = \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)(1 + A \gamma^5 \vec{\gamma} \cdot \vec{\zeta})(1 + \gamma^0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma^0)(1 + A \gamma^5 \vec{\gamma} \cdot \vec{\zeta}) \quad ,$$

$$\vec{\zeta} \equiv 2 \langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2m} Tr\{\rho \gamma^5 \vec{\gamma}\} = -\frac{A}{4} Tr\{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\zeta}) \vec{\gamma}\} = A \vec{\zeta} \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Z obecného vztahu

$$\underline{a}\,\underline{p} + \underline{p}\,\underline{a} = 2ap \quad (= 2a^{\mu} p_{\mu})$$

plyne (protože $ap = 0$) možnost upravit matici hustoty na konečný tvar

$$\rho(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad .$$

Zcela obdobně se odvodí

$$\rho(-p) = \frac{1}{2}(\underline{p} - m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad .$$

19. Polarizační matice hustoty.

V daném bodě prostoru je pro kvasimonochromatickou vlnu

$$\vec{E} = \vec{E}_0(t)\, e^{-i\omega t} \quad , \quad \vec{k} \,.\, \vec{E}_0(t) = 0 \quad , \quad J_{\alpha\beta} = \langle E_{0\alpha} E^{*}_{0\beta} \rangle \quad ,$$

$$\vec{k} = (0,0,k) \quad , \quad J_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix} \quad , \quad J_{xx} + J_{yy} = J \quad .$$

Definujeme polarizační matici $\rho_{\alpha\beta}$ jako

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J} \quad , \quad \rho_{\alpha\beta} = \rho^{*}_{\beta\alpha} \quad , \quad \rho_{11} + \rho_{22} = 1 \quad .$$

Jako každou hermiteovskou matici dimenze 2 můžeme i polarizační matici zapsat jako

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(1 + \vec{\xi} \cdot \vec{\sigma}) \quad .$$

Čtyřrozměrnou matici vytvoříme pomocí polarizačních vektorů jako

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^{2} \tilde{\rho}_{ab}\, e^{(a)}_{\mu}\, e^{(b)*}_{\nu} \quad .$$

Ve vhodné kalibraci bude platit jednoduchý vztah

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} + \vec{\xi} \cdot \sum_{a,b=1}^{2} \vec{\sigma}_{ab}\, e^{(a)}_{\mu}\, e^{(b)*}_{\nu} \quad .$$

Polarizační matice se totiž při kalibrační transformaci změní jako

$$\rho_{\mu\nu} \to \rho_{\mu\nu} + k_{\mu}\, \chi_{\nu}(k) + k_{\nu}\, \chi^{*}_{\mu}(k) \quad .$$

Začneme-li třeba s vektory

$$k_{\mu} = (k,0,0,-k) \quad , \quad e^{(1)}_{\mu} = (0,-1,0,0) \quad , \quad e^{(2)}_{\mu} = (0,0,-1,0)$$

jsou potřebné funkce

$$\chi_0 = -\frac{1}{4k} \quad , \quad \chi_1 = \chi_2 = 0 \quad , \quad \chi_3 = -\frac{1}{4k} \quad .$$

Poznamenejme, že tento výhodný tvar polarizační matice hustoty neodpovídá příčné kalibraci. Obecně máme pro rozvoj potenciálu

$$\hat{A}_\mu(x) = \hat{A}_\mu^+(x) = \sqrt{4\pi} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\, e_\mu^{(\lambda)}\, e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{c}_{\vec{k},\lambda}^{+}\, e_\mu^{(\lambda)*}\, e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad ,$$

$$k_\mu k^\mu = \omega_{\vec{k}}^2 - |\vec{k}|^2 = 0 \quad ,$$

kde polarizační vektory jsou

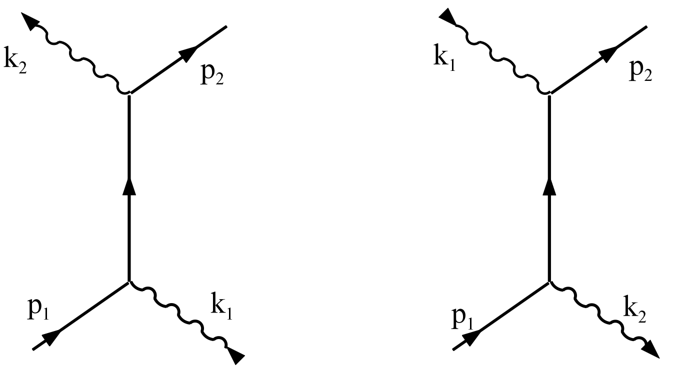
$$e_\mu^{(0)} = (1,0,0,0) \quad , \quad e_\mu^{(i)} = (0,-\vec{n}_i) \quad , \quad \vec{n}_i \cdot \vec{n}_i = \delta_{ij} \quad , \quad \vec{n}_3 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad .$$

Aby byla splněna Lorentzova podmínka, uvažujeme pak jen ty stavy, kdy skutečně

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \hat{A}^\mu(x) \,|\Phi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{c}_{\vec{k},0} - \hat{c}_{\vec{k},3} \right) |\Phi\rangle = 0 \quad .$$

20. Comptonův rozptyl.

Příslušné Feynmanovy diagramy jsou

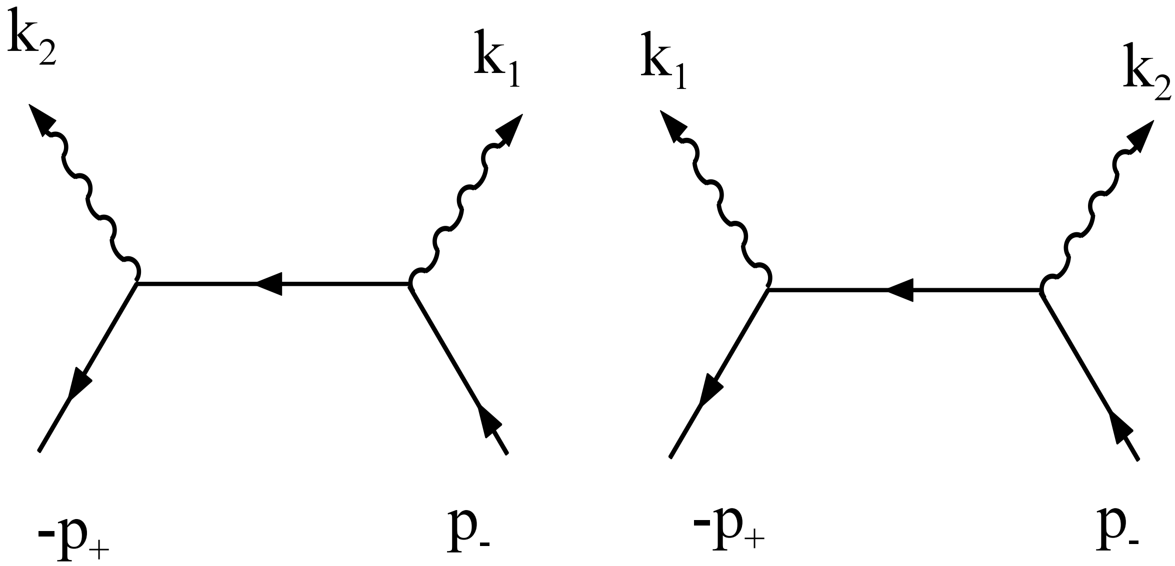


Z nich dostáváme pro element M matice výraz

$$\langle f|\hat{M}|i\rangle = -4\pi e^2\, \bar{u}(p_2) \Big(\underline{e_2}^* G(p_1+k_1) \underline{e_1} + \underline{e_1} G(p_1-k_2) \underline{e_2}^* \Big) u(p_1) \quad .$$

21. Anihilace páru.

Feynmanovy diagramy jsou



Odpovídající výraz pro element M matice je pak

$$\langle f|\,\hat{M}\,|i\rangle = -4\pi e^2\, \bar{u}(-p_+)\Big(\underline{e_2^*}\, G(p_- - k_1)\, \underline{e_1^*} + \underline{e_1^*}\, G(p_- - k_2)\, \underline{e_2^*}\Big) u(p_-) \quad .$$

22. Spinové středování pro Comptonův rozptyl a anihilaci.

V obou případech je možno psát maticový element ve tvaru

$$M_{fi} = \sum_{A,B} \bar{u}_{fA}\, Q_{AB}\, u_{iB} = \bar{u}_f\, Q\, u_i \quad .$$

Potom máme

$$M_{fi}^* = \big(\sum_{AB} \bar{u}_{fA}\, Q_{AB}\, u_{iB}\big)^* = \sum_{ABC} u_{fC}\, \gamma^{0*}_{CA}\, Q^*_{AB}\, u^*_{iB} =$$

$$\sum_{ABCDE} u^*_{iB}\, \gamma^0_{BD}\, \gamma^0_{DE}\, Q^+_{BA}\gamma^0_{AC}\, u_{fC} = \bar{u}_i\, \bar{Q}\, u_f \quad ,$$

kde jsme využili vlastností $\gamma^0\gamma^0 = 1$, $\gamma^{0+} = \gamma^0$ a označili $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$. Můžeme teď psát

$$|\,M_{fi}|^2 = \bar{u}_f Q\, u_i\, \bar{u}_i\, \bar{Q}\, u_f = \mathrm{Tr}\{u_f \bar{u}_f Q\, u_i\, \bar{u}_i\, \bar{Q}\} \quad .$$

Při Comptonově rozptylu bereme střední hodnotu přes spiny elektronu v počátečním stavu a součet přes spiny elektronu v koncovém stavu

$$\frac{1}{2}\sum |\,M_{fi}|^2 = 2\,\mathrm{Tr}\{\rho_f Q\, \rho_i\, \bar{Q}\} \quad ,$$

při anihilaci střední hodnotu přes spiny elektronu a střední hodnotu přes spiny positronu, je výsledný výraz dvakrát menší.

Přidejme výrazům indexy. Pro Comptonův rozptyl bude

$$Q = -4\pi e^2 e^*_{2\mu} e_{1\nu}\left(\gamma^\mu G(p_1+k_1)\gamma^\nu + \gamma^\nu G(p_1-k_2)\gamma^\mu\right)$$

a pro anihlilaci

$$Q = -4\pi e^2 e^*_{2\mu} e^*_{1\nu}\left(\gamma^\mu G(p_- - k_1)\gamma^\nu + \gamma^\nu G(p_- - k_2)\gamma^\mu\right) \quad .$$

Provedeme-li u Comptonova rozptylu střední hodnotu pro polarizaci fotonu v počátečním stavu a součet přes polarizace fotonu v koncovém stavu a u anihilace součet přes polarizace fotonů v koncovém vztahu, dostáváme pro oba případy stejný vztah

$$\langle\, |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4}\sum\sum |M_{fi}|^2 = \rho_{1\nu\tau}\,\rho_{2\sigma\mu}\,\mathrm{Tr}\{\rho_f Q^{\mu\nu}\rho_i \bar{Q}^{\sigma\tau}\} \quad ,$$

kde pro Comptonův rozptyl bude

$$Q^{\mu\nu} = -4\pi e^2\left(\gamma^\mu G(p_1+k_1)\gamma^\nu + \gamma^\nu G(p_1-k_2)\gamma^\mu\right)$$

a pro anihlilaci

$$Q^{\nu\mu} = -4\pi e^2\left(\gamma^\mu G(p_- - k_1)\gamma^\nu + \gamma^\nu G(p_- - k_2)\gamma^\mu\right) \quad .$$

Dále budeme uvažovat nepolarizované svazky, tedy

$$\langle\, |M_{fi}|^2 \rangle = \left[\frac{\pi e^2}{(p_1 k_1)(p_1 k_2)}\right]^2 \mathrm{Tr}\left\{(\underline{p_2}+m)A_{\mu\nu}(\underline{p_1}+m)\bar{A}^{\mu\nu}\right\} \quad ,$$

$$A_{\mu\nu} = (p_1 k_2)\gamma_\mu(\underline{p_1}+\underline{k_1}+m)\gamma_\nu - (p_1 k_1)\gamma_\nu(\underline{p_1}-\underline{k_2}+m)\gamma_\mu$$

pro Comptonův rozptyl a

$$\langle\, |M_{fi}|^2 \rangle = \left[\frac{\pi e^2}{(p_- k_1)(p_- k_2)}\right]^2 \mathrm{Tr}\left\{(\underline{p_+}-m)A_{\mu\nu}(\underline{p_-}+m)\bar{A}^{\mu\nu}\right\} \quad ,$$

$$A_{\mu\nu} = (p_- k_2)\gamma_\mu(\underline{p_-}-\underline{k_1}+m)\gamma_\nu + (p_- k_1)\gamma_\nu(\underline{p_-}-\underline{k_2}+m)\gamma_\mu$$

pro anihilaci páru. Dále platí

$$\overline{\gamma^\mu\gamma^\nu\ldots\gamma^\rho} = \gamma^\rho\ldots\gamma^\nu\gamma^\mu \quad\Rightarrow\quad \bar{A}^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \quad .$$

Uvážíme-li ještě zákony zachování $p_2 = p_1 + k_1 - k_2$ a $p_+ = -(p_- - k_1 - k_2)$, zvýší se ještě podobnost obou výrazů. Pro Comptonův rozptyl

$$\langle\, |M_{fi}|^2 \rangle = \left[\frac{\pi e^2}{(p_1 k_1)(p_1 k_2)}\right]^2 \mathrm{Tr}\left\{(\underline{p_1}+\underline{k_1}-\underline{k_2}+m)A_{\mu\nu}(\underline{p_1}+m)A^{\nu\mu}\right\} \quad ,$$

$$A_{\mu\nu} = (p_1 k_2)\gamma_\mu(\underline{p_1}+\underline{k_1}+m)\gamma_\nu - (p_1 k_1)\gamma_\nu(\underline{p_1}-\underline{k_2}+m)\gamma_\mu$$

a pro anihilaci

$$\langle\, |M_{fi}|^2 \rangle = -\left[\frac{\pi e^2}{(p_- k_1)(p_- k_2)}\right]^2 \mathrm{Tr}\left\{(\underline{p_-}-\underline{k_1}-\underline{k_2}+m)A_{\mu\nu}(\underline{p_1}+m)A^{\nu\mu}\right\} \quad ,$$

$$A_{\mu\nu} = (p_- k_2)\gamma_\mu(\underline{p_-}-\underline{k_1}+m)\gamma_\nu + (p_- k_1)\gamma_\nu(\underline{p_-}-\underline{k_2}+m)\gamma_\mu$$

Výraz pro anihilaci dostaneme z výrazu pro Comptonův rozptyl záměnami $p_1 \to p_-$ a $k_1 \to -k_1$.

Budeme teď upravovat výraz pro stopu:

$$\mathrm{Tr}\left\{(\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\, A_{\mu\nu}\, (\underline{p_1} + m)\, A^{\nu\mu}\right\} =$$

$$(p_1 k_2)^2\, \mathrm{Tr}A_1 - (p_1 k_2)\,(p_1 k_1)\left(\mathrm{Tr}A_2 + \mathrm{Tr}A_3\right) + (p_1 k_1)^2\, \mathrm{Tr}A_4 \quad ,$$

kde

$$A_1 = (\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma_\mu\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} + m)\,\gamma_\nu\,(\underline{p_1} + m)\,\gamma^\nu\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} + m)\,\gamma^\mu \quad ,$$

$$A_2 = (\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma_\mu\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} + m)\,\gamma_\nu\,(\underline{p_1} + m)\,\gamma^\mu\,(\underline{p_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma^\nu \quad ,$$

$$A_3 = (\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma_\nu\,(\underline{p_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma_\mu\,(\underline{p_1} + m)\,\gamma^\nu\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} + m)\,\gamma^\mu \quad ,$$

$$A_4 = (\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma_\nu\,(\underline{p_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma_\mu\,(\underline{p_1} + m)\,\gamma^\mu\,(\underline{p_1} - \underline{k_2} + m)\,\gamma^\nu \quad .$$

S využitím vztahů

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \quad , \quad \gamma_\mu \underline{a}\, \gamma^\mu = -2\underline{a} \quad , \quad \gamma_\mu \underline{a}\, \underline{b}\, \gamma^\mu = 4\,(ab) \quad ,$$

$$\gamma_\mu \underline{a}\, \underline{b}\, \underline{c}\, \gamma^\mu = -2\, \underline{c}\, \underline{b}\, \underline{a}$$

můžeme výrazy zjednodušit na

$$A_1 = 4\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,(4m^3 + 4m k_1 \cdot p_1 - 2m^2 \underline{p_1} - 2m^2 \underline{k_1} + \underline{k_1}\,\underline{p_1}\,\underline{k_1}) \quad ,$$

$$A_4 = 4\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,(4m^3 - 4m k_2 \cdot p_1 - 2m^2 \underline{p_1} + 2m^2 \underline{k_2} + \underline{k_2}\,\underline{p_1}\,\underline{k_2})$$

a

$$A_2 = 4\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,(m^3 + m^2 \underline{k_1} - m^2 \underline{k_2} +$$

$$(m^2 + 2k_2 \cdot p_1 - 2k_1 \cdot p_1 + 2k_1 \cdot k_2)\,\underline{p_1} - m\underline{k_2}\,\underline{k_1} + 2m\underline{p_1}\,\underline{k_1} - 2m\underline{k_2}\,\underline{p_1}) \quad ,$$

$$A_3 = 4\,(\underline{p_1} + \underline{k_1} - \underline{k_2} + m)\,(m^3 + m^2 \underline{k_1} - m^2 \underline{k_2} +$$

$$(m^2 + 2k_2 \cdot p_1 - 2k_1 \cdot p_1 + 2k_1 \cdot k_2)\,\underline{p_1} - m\underline{k_1}\,\underline{k_2} - 2m\underline{p_1}\,\underline{k_2} + 2m\underline{k_1}\,\underline{p_1}) \quad .$$

Dále po roznásobení využijeme vztahů pro stopy

$$\mathrm{Tr}\{1\} = 4 \quad , \quad \mathrm{Tr}\{\underline{a}\} = 0 \quad , \quad \mathrm{Tr}\{\underline{a}\underline{b}\} = 4(a \cdot b) \quad , \quad \mathrm{Tr}\{\underline{a}\underline{b}\underline{c}\} = 0 \quad ,$$

$$\mathrm{Tr}\{\underline{a}\underline{b}\underline{c}\underline{d}\} = 4\left[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)\right]$$

a dojdeme k výrazům

$$\mathrm{Tr}\{A_1\} = 32\left[m^4 + m^2(k_1\cdot p_1) + (k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_1)\right] \ ,$$

$$\mathrm{Tr}\{A_2\} = 16\left[2\,m^4 + m^2(k_1\cdot p_1) - m^2(k_2\cdot p_1)\right] \ ,$$

$$\mathrm{Tr}\{A_3\} = 16\left[2\,m^4 + m^2(k_1\cdot p_1) - m^2(k_2\cdot p_1)\right] \ ,$$

$$\mathrm{Tr}\{A_4\} = 32\left[m^4 - m^2(k_2\cdot p_1) + (k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_1)\right] \ .$$

Celkový výsledek pro Comptonův rozptyl je tedy

$$\langle\,|M_{fi}|^2\,\rangle =$$

$$2\left[4\pi e^2\right]^2\left[\left(\frac{m^2}{(k_1\cdot p_1)} - \frac{m^2}{(k_2\cdot p_1)}\right)^2 + 2\left(\frac{m^2}{(k_1\cdot p_1)} - \frac{m^2}{(k_2\cdot p_1)}\right) + \frac{(k_1\cdot p_1)}{(k_2\cdot p_1)} + \frac{(k_2\cdot p_1)}{(k_1\cdot p_1)}\right] \ .$$

a záměnou proměnných pro anihilaci

$$\langle\,|M_{fi}|^2\,\rangle =$$

$$2\left[4\pi e^2\right]^2\left[-\left(\frac{m^2}{(k_1\cdot p_-)} + \frac{m^2}{(k_2\cdot p_-)}\right)^2 + 2\left(\frac{m^2}{(k_1\cdot p_-)} + \frac{m^2}{(k_2\cdot p_-)}\right) + \frac{(k_1\cdot p_-)}{(k_2\cdot p_-)} + \frac{(k_2\cdot p_-)}{(k_1\cdot p_-)}\right] \ .$$

Pro Comptonův rozptyl píšeme pro pravděpodobnost přechodu za jednotku času

$$\mathrm{d}w =$$

$$(2\pi)^4\,V\,\delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)\,\frac{\langle\,|M_{fi}|^2\rangle}{(2\epsilon_1 V)(2\omega_1 V)(2\epsilon_2 V)(2\omega_2 V)}\,\frac{V\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3}\,\frac{V\mathrm{d}^3\vec{k}_2}{(2\pi)^3}$$

a pro anihilaci

$$\mathrm{d}w =$$

$$(2\pi)^4\,V\,\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_+ - p_-)\,\frac{\langle\,|M_{fi}|^2\rangle}{(2\epsilon_+ V)(2\epsilon_- V)(2\omega_1 V)(2\omega_2 V)}\,\frac{V\mathrm{d}^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\,\frac{V\mathrm{d}^3\vec{k}_2}{(2\pi)^3}$$

Pro diferenciální účinný průřez máme

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{32\pi^2}\,\delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)\,\frac{\langle\,|M_{fi}|^2\rangle}{\epsilon_2\,\omega_2(p_1\cdot k_1)}\,\mathrm{d}^3\vec{p}_2\,\mathrm{d}^3\vec{k}_2$$

pro Comptonův rozptyl a

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{32\pi^2}\,\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_+ - p_-)\,\frac{\langle\,|M_{fi}|^2\rangle}{\omega_1\,\omega_2\sqrt{(p_-\cdot p_+)^2 - m^4}}\,\mathrm{d}^3\vec{k}_1\,\mathrm{d}^3\vec{k}_2$$

pro anihilaci.

Pro výpočet zvolíme klidovou soustavu elektronu a impulz dopadající částice bude udávat směr osy z, bude tedy pro Comptonův rozptyl

$$p_1^\mu = (m,0,0,0) \ , \quad k_1^\mu = (\omega_1,0,0,\omega_1) \ , \quad (k_1\cdot k_2) = \omega_1\,\omega_2\,(1 - \cos\vartheta)$$

a pro anihilaci

$$p_-^\mu = (m,0,0,0) \quad , \quad p_+^\mu = ((m^2+p^2)^{1/2},0,0,p) \quad ,$$

$$(p_+ \cdot k_2) = (m^2+p^2)^{1/2}\,\omega_2 - p\,\omega_2 \cos\vartheta \quad .$$

Pro účinný průřez Comptonova rozptylu dostáváme

$$d\sigma = e^4 \delta(\epsilon_2 + \omega_2 - m - \omega_1)$$

$$\left[\left(\frac{m}{\omega_1} - \frac{m}{\omega_2}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{\omega_1} - \frac{m}{\omega_2}\right) + \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right] \frac{\omega_2\, d\omega_2}{m\,\omega_1\,\epsilon_2}\, d\Omega \quad ,$$

$$\epsilon_2 = \left(m^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\,\omega_1\omega_2 \cos\vartheta\right)^{1/2} \quad .$$

Pro účinný průřez dvoufotonové anihilace páru dostáváme

$$d\sigma = e^4 \delta(\omega_1 + \omega_2 - m - (m^2+p^2)^{1/2})$$

$$\left[-\left(\frac{m}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_2}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_2}\right) + \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right] \frac{\omega_2\, d\omega_2}{m\,p\,\omega_1}\, d\Omega \quad ,$$

$$\omega_1 = \left(p^2 + \omega_2^2 - 2p\,\omega_2 \cos\vartheta\right)^{1/2} \quad .$$

Diracova funkce dává

$$\omega_2 = \frac{m\,\omega_1}{m + \omega_1(1-\cos\vartheta)} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 - \lambda_1 = 2\pi \frac{\hbar}{mc}(1-\cos\vartheta)$$

a

$$\omega_2 = m\, \frac{m + (p^2+m^2)^{1/2}}{m + (p^2+m^2)^{1/2} - p\cos\vartheta} \quad .$$

Při integraci delta funkce potřebujeme dále výrazy

$$\epsilon_2 \frac{d(\epsilon_2 + \omega_2)}{d\omega_2} = \epsilon_2 + \omega_2 - \omega_1 \cos\vartheta = m + \omega_1(1-\cos\vartheta) = m\,\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

a

$$\omega_1 \frac{d(\omega_1 + \omega_2)}{d\omega_2} = \omega_1 + \omega_2 - p\cos\vartheta = m + (p^2+m^2)^{1/2} - p\cos\vartheta =$$

$$m\,\frac{m + (p^2+m^2)^{1/2}}{\omega_2} \quad .$$

Takto dostáváme pro účinný průřez Comptonova rozptylu

$$d\sigma = r_e^2 \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2\vartheta\right]\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 d\Omega \quad , \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{mc^2}{mc^2 + \hbar\omega_1(1-\cos\vartheta)} \quad .$$

a pro účinný průřez dvoufotonové anihilace páru

$$\mathrm{d}\sigma = r_e^2 \left[\left(\frac{p}{\omega_1} \right)^2 \sin^2\vartheta + \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] \frac{\omega_2^2}{p\,(m + (p^2 + m^2)^{1/2})} \, \mathrm{d}\Omega \quad ,$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{(p^2 + m^2)^{1/2} - p\cos\vartheta} \quad .$$

Klasický poloměr elektronu je

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \quad .$$