# 1 Princip relativity.

**Princip relativity** říká, že fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech inerciálních souřadných soustavách. **Inerciální soustava** je definována tak, že se v ní volná částice pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, musí tedy být vzájemný pohyb dvou různých inerciálních soustav rovnoměrný přímočarý. **Galileiho princip relativity** předpokládá vztah mezi časem a prostorovými souřadnicemi v soustavě $K$ a $K'$

$$t = \tau + t' \quad , \quad \vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}\,' + \vec{V}\,t' \quad , \tag{1.1}$$

přitom obvykle ztotožníme počátek odečítání času a prostorových souřadnic, tj. pokládáme $\tau = 0$ , $\vec{\rho} = \vec{0}$ . Porovnání druhého Newtonova pohybového zákona v soustavách $K$ a $K'$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, t\right) \quad , \quad m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2} = \vec{F}'\left(\vec{r}\,', t'\right) \tag{1.2}$$

vede (dosazení (1.1) do druhé rovnice v (1.2)) na

$$\vec{F}\left(\vec{r}, t\right) = \vec{F}'\left(\vec{r} - \vec{V}\,t, t\right) \quad . \tag{1.3}$$

Jestliže síla splňuje podmínku (1.3), vyhovuje pohybová rovnice daná druhým Newtonovým zákonem Galileiho principu relativity. Je tomu tak například vždy, závisí-li síla na vzdálenosti částice od nějakého silového centra (nebo od jiné částice). Ale také například Lorentzova síla v homogenním elektrickém a magnetickém poli by vyhovovala Galileovu principu relativity, pokud by se pole transformovala podle vztahu

$$\vec{E}_0' = \vec{E}_0 + \vec{V} \times \vec{B}_0 \quad , \quad \vec{B}_0' = \vec{B}_0 \quad . \tag{1.4}$$

Pole se ale ve skutečnosti (jako řešení Maxwellových rovnic) transformují jako

$$\begin{gathered}
\vec{E}_{0\parallel}' = \vec{E}_{0\parallel} \quad , \quad \vec{B}_{0\parallel}' = \vec{B}_{0\parallel} \quad , \\
\vec{E}_{0\perp}' = \frac{\left(\vec{E}_0 + \vec{V} \times \vec{B}_0\right)_\perp}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad \vec{B}_{0\perp}' = \frac{\left(\vec{B}_0 - \dfrac{\vec{V} \times \vec{E}_0}{c^2}\right)_\perp}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \quad .
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Podívejme se, jak se při Galileiho transformaci chová vlnová rovnice

$$\Box\psi \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = 0 \quad . \tag{1.6}$$

Ze vztahu (1.1) platí

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\
&\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \left(-V\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right) \\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} \quad .
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Máme tedy pro d´Alembertův operátor v pohybující se soustavě jiný výraz než v původní soustavě, a mohli bychom tedy principiálně odlišit privilegovanou inerciální soustavu v klidu.

# 2 Lorentzova transformace.

## 2.1 Události, interval.

Základním pojmem je **událost** (pro jednoduchost na chvíli dvě prostorové dimenze potlačíme), charakterizovaná časem $t$ a bodem na ose $x$, kdy a kde k události došlo. Hodnoty samozřejmě závisí na volbě souřadné soustavy. Připomeňme si známou situaci, kdy poloha bodu v rovině je charakterizována kartézskými souřadnicemi $x$ a $y$. Hodnoty závisí na poloze počátku a na orientaci os souřadné soustavy. Vezmeme-li však čtverec vzdálenosti dvou bodů

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad , \tag{2.1}$$

zjistíme snadno, že je ve všech kartézských soustavách stejný. Transformační rovnice mezi soustavami $K$ a $K'$ jsou

$$x = a + \cos\varphi\, x' + \sin\varphi\, y' \quad , \quad y = b - \sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y' \quad . \tag{2.2}$$

Einstein předpokládal, že rychlost šíření světla ve vakuu $c = 299\,792\,458\, m\, s^{-1}$ je ve všech inerciálních souřadných soustavách stejná. Potom pro dvě události, spojené šířením světla ve vakuu (např. první událostí je emise nějakého fotonu, druhou událostí absorpce tohoto fotonu) platí (první člen je čtverec součinu rychlosti a doby šíření, ten musí být přirozeně roven čtverci vzdálenosti, kterou světlo urazilo)

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = 0 \quad . \tag{2.3}$$

V zobecnění pak nazveme veličinu

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \tag{2.4}$$

**čtvercem intervalu** mezi (libovolnými) dvěma událostmi.

Všimněme si, že invariance (2.1) vzhledem k transformaci (2.2) vychází ze vztahu $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Vztah (2.4) se od (2.2) odlišuje znaménkem minus místo plus, budeme tedy hledat transformaci, která vychází ze vztahu $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$, tedy

$$c\,t = c\,\tau + \cosh\psi\, c\,t' + \sinh\psi\, x' \quad , \quad x = \xi + \sinh\psi\, c\,t' + \cosh\psi\, x' \quad . \tag{2.5}$$

Snadno vidíme, že transformace (2.5) ponechává výraz pro čtverec intervalu (2.4) invariantní.

## 2.2 Lorentzova transformace.

Zatímco úhel $\varphi$ v (2.2) má jasný geometrický význam, musíme fyzikální význam úhlu $\psi$ teprve najít. Téměř vždy předpokládáme ztotožnění počátku odečítání času i prostorových souřadnic ve všech inerciálních soustavách, tedy položíme v (2.5) $c\,\tau = \xi = 0$. Ať se nyní pohybuje soustava $K'$ (a tedy i její počátek $x' = 0$) vůči soustavě $K$ rychlostí $V$. Potom máme z (2.5)

$$V = \frac{x}{t} = c\tanh\psi \quad \Rightarrow \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad \sinh\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.6}$$

a výsledný vztah pro Lorentzovu transformaci (přidáme dva dosud potlačené rozměry geometrického prostoru)

$$ct=\frac{ct'+\frac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\quad,\quad x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\quad,\quad y=y'\quad,\quad z=z'\quad. \tag{2.7}$$

Pro infinitezimálně blízké události můžeme psát

$$ds^2=c^2\,dt^2-\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \tag{2.8}$$

a Lorentzovu transformaci

$$c\,dt=\frac{c\,dt'+\frac{V}{c}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\quad,\quad dx=\frac{dx'+V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\quad,\quad dy=dy'\quad,\quad dz=dz'\quad. \tag{2.9}$$

Požadavek, aby rovnice vyjadřující fyzikální zákony, byly invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci nazýváme **Einsteinovým principem relativity**.

Vždy jsou uváděny dva klasické příklady na použití vztahu (2.7).

(a) V soustavě $K$ je podél osy $x$ v klidu měřítko, jehož dvě rysky mají v této soustavě souřadnice $x_1, x_2$. Vzdálenost (klidová) rysek je tedy $\Delta x_0=x_2-x_1$. Vzdálenost v soustavě $K'$ je (souřadnice jsou určovány ve stejném čase $t_1'=t_2'$)

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\Delta x_0\sqrt{1-V^2/c^2}\quad. \tag{2.10}$$

Mluvíme o **kontrakci délky**.

(b) V soustavě $K'$ se v časech $t_1'$ a $t_2'$ odehrají dvě události v jediném místě $x_1'=x_2'$, $y_1'=y_2'$, $z_1'=z_2'$ (interval mezi událostmi je tedy $\Delta t_0=t_2'-t_1'$. V soustavě $K$ je interval mezi těmito událostmi

$$\Delta t=t_2-t_1=\Delta t_0\Big/\sqrt{1-V^2/c^2}\quad. \tag{2.11}$$

Mluvíme pak o **dilataci času**.

## 2.3 Relativistická kinematika

Pro rychlost ($\vec{v}=d\vec{r}/dt$, $\vec{v}'=d\vec{r}'/dt'$) dostaneme z rovnice (2.9) transformační vztahy

$$v_x=\frac{v_x'+V}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}\quad,\quad v_y=\frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}\quad,\quad v_z=\frac{v_z'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}\quad. \tag{2.12}$$

Vztah pro transformaci rychlosti odvodíme také následující úvahou. Mějme v soustavě K´ částici, která se pohybuje rychlostí $u$, tedy platí pro ni $x'=ut'$. Z hlediska vnějšího pozorovatele v soustavě $K$ dostaneme podle (2.7)

$$x=\frac{ut'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\quad\text{a}\quad t=\frac{t'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{t'+uVt'/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{2.13}$$

Pro rychlost v soustavě $K$ máme pak

$$v_x=\frac{x}{t}=\frac{V+u}{1+\frac{uV}{c^2}}\quad. \tag{2.14}$$

Velikost této rychlosti už nemůže překročit velikost rychlosti světla, tj. $|V|/c<1, |u|/c<1 \Rightarrow |v_x|/c<1$.

## 2.4 Relativistická dynamika

Nyní prozkoumáme vztahy pro zákony mechaniky při Lorentzově transformaci. Klasicky je hybnost rovna $p = mv$. Tento vztah musí platit i v soustavě, v níž je částice v klidu. Pokud se částice pohybuje, máme pro relativistickou hybnost vztah

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{2.15}$$

Často se proto poslední vztah chápe jako nárůst hmotnosti částice s rychlostí. Vhodnější je ale považovat hmotnost za charakteristickou vlastnost částice a poslední vztah prostě říká, že vztah mezi rychlostí a hybností je složitější než v nerelativistické aproximaci. Snad nejslavnějším fyzikálním vztahem je (uvažujme částici v klidu)

$$E = mc^2 \quad . \tag{2.16}$$

Představme si nějaké atomové jádro hmotnosti *M*, jako celek v klidu. Oddělíme-li postupně jednotlivé nukleony a vzdálíme tak, že jejich interakci lze zanedbat, zjistíme, že rozdíl energií

$$\Delta E = \left( M - \sum_a m_a \right) c^2 \quad , \tag{2.17}$$

kde sčítáme hmotnosti všech volných nukleonů, je obecně nenulový. Je-li rozdíl kladný, lze rozštěpením jádra energii získat, je-li záporný, lze složením lehčích jader do těžšího energii získat. Používáme-li pro popis jevů důsledně fyzikální terminologie, nemůže dojít k filosofickým diskusím o přeměně hmoty na energii či naopak.

S pomocí veličin energie a vektoru hybnosti vyjádříme celkovou energii $E$ a kinetickou energii $T$ a limitní případy pro $T$ jako

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad , \quad T = E - mc^2 = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad . \tag{2.18}$$

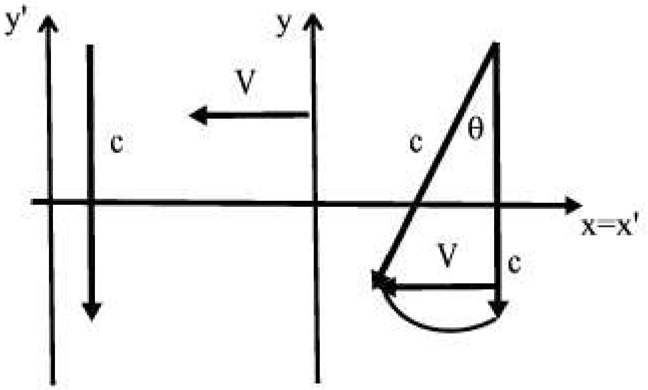
$$T \ll mc^2 \quad \Rightarrow \quad T \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad , \quad T \gg mc^2 \quad \Rightarrow \quad T \approx |\vec{p}|c \quad . \tag{2.19}$$

# 3 Příklady.

## 3.1 Aberace světla.

Pro transformaci složek vektoru rychlosti máme vztah (2.12)

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad , \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad , \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad . \tag{3.1}$$




Obrázek: pro případ $\theta' = 0$ vidíme, že v pohybujícím se systému pozorujeme světlo pod jiným úhlem. Pro případ Země je velikost aberace rovná 20,5". Odtud pak můžeme určit rychlost pohybu Země a poloměr její dráhy.

Sledujeme-li šíření světelného paprsku v rovině *xy* ($v_z = v'_z = 0$ při vhodné volbě úhlů $\theta$ resp. $\theta'$, tj. $v_x = c\sin\theta$, $v_y = -c\cos\theta$ resp. $v'_x = c\sin\theta'$, $v'_y = -c\cos\theta'$), dostaneme po malé úpravě vztah mezi úhly v soustavě spojené se zdrojem vysílajícím paprsek $K'$ a soustavě spojené s detektorem přijímajícím paprsek *K* (tubus dalekohledu), která se vůči $K'$ pohybuje rychlostí $-V$ podél osy *x*

$$\tan\theta = \frac{\frac{V}{c} + \sin\theta'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\cos\theta'} \quad . \tag{3.2}$$

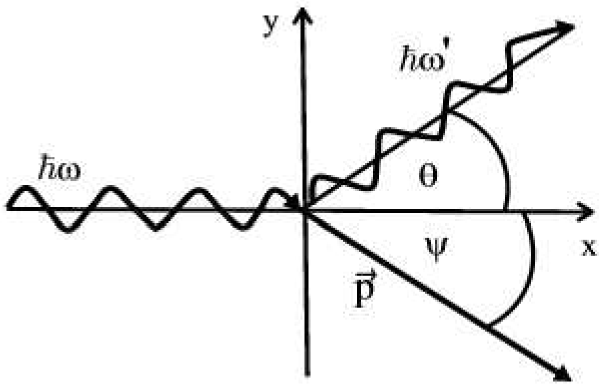
Pro $\theta' = 0$ dostaneme z (3.2) $\tan\theta = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,(V/c)$ a pro $V/c \ll 1$ ponecháním jen nejnižšího členu Taylorova rozvoje obvykle uváděný vztah

$$\tan\theta = \frac{V}{c} \quad . \tag{3.3}$$

## 3.2 Comptonův rozptyl.

Podél osy $x$ dopadá foton rentgenového záření s energií $\hbar\omega$ na elektron v klidu, po rozptylu pokračuje odchýlen od původního směru o úhel $\theta$ a s nižší energií $\hbar\omega'$. Zákony zachování nám dají (pohyb se děje v rovině)

$$\begin{gathered} \hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad , \\ \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar\omega'}{c}\cos\theta + p\cos\psi \quad , \quad 0 = \frac{\hbar\omega'}{c}\sin\theta - p\sin\psi \quad . \end{gathered} \tag{3.4}$$




Po kratším výpočtu (vyloučením „nepotřebných“ neznámých $p$ a $\psi$) dojdeme k výslednému známému vztahu ( $\lambda = (2\pi c)/\omega$ )

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad , \quad \lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc} \quad , \tag{3.5}$$

kde $\lambda_c$ je konstanta – Comptonova vlnová délka.

## 3.3 Dopplerův jev.

Dopplerův jev je pozorovaná změna energie fotonu (frekvence vlnění $\omega'$), emitovaného zdrojem, který se sám pohybuje rychlostí $V$ podél osy $x$ vůči laboratorní soustavě ("pozorovateli") $K$ (v ní je pozorována frekvence vlnění $\omega$). Soustava spojená se zdrojem je $K'$. Uvažujme rovinnou vlnu s vlnovým vektorem v rovině $xy$. Například polohy míst s danou intensitou vlny musí určit stejně pozorovatelé v obou soustavách, pouze jim přiřadí různé souřadnice a frekvence, ale fáze vlny je **relativistický invariant**. V našem případě píšeme rovnost fází jako

$$\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\cos\theta' - \frac{y'}{c}\sin\theta'\right) = \omega\left(t - \frac{x}{c}\cos\theta - \frac{y}{c}\sin\theta\right) \quad . \tag{3.6}$$

Úhel mezi směrem šíření vlny a směrem pohybu zdroje (tj. osou $x$) jsme označili $\theta$. Dosadíme-li do (3.6) ze vztahu pro Lorentzovu transformaci (2.7), dostáváme

$$\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\cos\theta' - \frac{y'}{c}\sin\theta'\right) = \omega\left(\frac{1-\frac{V}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}t' - \frac{\cos\theta-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{x'}{c} - \frac{y'}{c}\sin\theta\right) \quad . \tag{3.7}$$

Porovnáním členů u $t'$ dostaneme vztah vyjadřující Dopplerův jev

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta} \approx \omega'\left[1+\frac{V}{c}\cos\theta + \frac{V^2}{2c^2}\cos 2\theta\right] \quad . \tag{3.8}$$

Klasický Dopplerův jev (bez člene u $V^2/c^2$) je rozdíl ve frekvenci přibližujícího se ($\theta=0$) a vzdalujícího se ($\theta=\pi$) zdroje, relativistický Dopplerův jev (člen u $V^2/c^2$) pozorujeme pro $\theta=\pi/2$.

Porovnáním členů u $x'$ dostaneme vztah vyjadřující aberaci světla, ale sjiným značením a jinou situací (zde se pohybuje soustava spojená se zdrojem, v 3.1. se pohybovala laboratorní soustava).

## 3.4 Vstřícné svazky.

Při srážce dvou částic (řekněme elektronu a positronu) může vzniknout nová částice. Spočtěme maximální hmotnost vzniklé částice.

(a) Na elektron v klidu dopadá positron s kinetickou energií $T=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}-mc^2$. Zákony zachování dávají

$$mc^2 + \sqrt{m^2c^4+p^2c^2} = \sqrt{M^2c^4+P^2c^2} \quad , \quad 0+p=P \quad , \tag{3.9}$$

takže (pro $T \gg mc^2$)

$$Mc^2 \approx \sqrt{2mc^2T} \quad . \tag{3.10}$$

(b) Čelně se srážejí elektron a positron stejné energie. Ze zákonů zachování pak

$$\sqrt{m^2c^4+p^2c^2} + \sqrt{m^2c^4+p^2c^2} = \sqrt{M^2c^4+P^2c^2} \quad , \quad p-p=P \quad , \tag{3.11}$$

takže (opět pro $T \gg mc^2$)

$$Mc^2 \approx 2T \quad . \tag{3.12}$$

Pro kinetické energie v LEP $T \approx 200$ $GeV$ a klidové energie elektronu $mc^2 \approx 500$ $keV$ jde o vskutku propastný rozdíl.

## 3.5 Paradox kontrakce délek

Uvažujme laboratorní soustavu $K$ s délkovým měřítkem, vůči které se pohybuje rychlostí $v$ soustava $\bar{K}$ s identickým měřítkem. Pravá ryska měřítka spojeného s $\bar{K}$ o souřadnici $\bar{x}_{\bar{P}}=0$ míjí levou rysku měřítka spojeného s $K$ o souřadnici $x_L=0$ v čase $\bar{t}_{\bar{P}}=t_L=0$. Dále můžeme pro zbývající rysky psát $\bar{x}_{\bar{L}}=-d$ a $x_P=d$ . Lorentzova transformace je

$$\begin{aligned} ct &= \gamma\left(c\bar{t}+\frac{v\bar{x}}{c}\right) \quad , \quad x=\gamma\left(\bar{x}+v\bar{t}\right) \quad , \\ c\bar{t} &= \gamma\left(ct-\frac{vx}{c}\right) \quad , \quad \bar{x}=\gamma\left(x-vt\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Platí

$$\begin{aligned} 0=ct-ct &= \gamma\left(c\left(\bar{t}_{\bar{P}}-\bar{t}_{\bar{L}}\right)+\frac{v\left(\bar{x}_{\bar{P}}-\bar{x}_{\bar{L}}\right)}{c}\right)=\gamma\left(c\left(\bar{t}_{\bar{P}}-\bar{t}_{\bar{L}}\right)+\frac{vd}{c}\right) \quad , \\ x_{\bar{P}}-x_{\bar{L}} &= \gamma\left(\left(\bar{x}_{\bar{P}}-\bar{x}_{\bar{L}}\right)+v\left(\bar{t}_{\bar{P}}-\bar{t}_{\bar{L}}\right)\right)=\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)d=\frac{1}{\gamma}d \quad . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Obdobně

$$\begin{aligned} 0=c\bar{t}-c\bar{t} &= \gamma\left(c\left(t_P-t_L\right)-\frac{v\left(x_P-x_L\right)}{c}\right)=\gamma\left(c\left(t_P-t_L\right)-\frac{vd}{c}\right) \quad , \\ \bar{x}_P-\bar{x}_L &= \gamma\left(\left(x_P-x_L\right)-v\left(t_P-t_L\right)\right)=\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)d=\frac{1}{\gamma}d \quad . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Máme tedy v soustavě $K$

$$x_P=d \quad , \quad x_L=0 \quad , \quad x_{\bar{P}}=vt \quad , \quad x_{\bar{L}}=vt-\frac{1}{\gamma}d \tag{3.16}$$

a v soustavě $\bar{K}$

$$\bar{x}_P=\frac{1}{\gamma}d-v\bar{t} \quad , \quad \bar{x}_L=-v\bar{t} \quad , \quad \bar{x}_{\bar{P}}=0 \quad , \quad \bar{x}_{\bar{L}}=-d \quad . \tag{3.17}$$

Jaký je popis v soustavě $K$? V čase $T=d/v$, kdy se setkají pravé rysky, má levá ryska pohybujícího se měřítka souřadnici $X=\left(1-1/\gamma\right)d\geq 0$ a „pohybující se měřítko se zkrátilo“. V soustavě $\bar{K}$ se setkají pravé rysky v čase $\bar{T}=d/\left(\gamma v\right)$ a levá ryska laboratorního měřítka má souřadnici $\bar{X}=-d/\gamma\geq -d$ a „laboratorní měřítko se zkrátilo“. Nesouhlas těchto dvou tvrzení je nazýván paradoxem kontrakce délek.

Není obtížné tento nesouhlas vysvětlit. Uvažujme lépe definovaný pokus: V laboratorní soustavě se vyšlou ke středu pohybujícího se měřítka světelné signály v okamžicích, kdy jeho pravá ryska potkává levou a pravou rysku laboratorního měřítka, tedy

$$x_{PL}=-ct \quad , \quad x_{PP}=d-c\left(t-\frac{d}{v}\right) \quad , \quad x_S=vt-\frac{d}{2\gamma} \quad . \tag{3.18}$$

Máme tak

$$t_{PLS}=\frac{1}{c+v}\frac{d}{2\gamma} \quad , \quad t_{PPS}=\frac{d}{v}+\frac{1}{c+v}\frac{d}{2\gamma} \quad , \quad t_{PPS}-t_{PLS}=\frac{d}{v} \quad . \tag{3.19}$$

V pohybující se soustavě

$$\bar{x}_{PL}=-c\bar{t} \quad , \quad \bar{x}_{PP}=-c\left(\bar{t}-\frac{d}{\gamma v}\right) \quad , \quad \bar{x}_S=-\frac{d}{2} \tag{3.20}$$

a tedy

$$\bar{t}_{PLS} = \frac{d}{2c} \quad , \quad \bar{t}_{PPS} = \frac{d}{2c} + \frac{d}{\gamma v} \quad , \quad \bar{t}_{PPS} - \bar{t}_{PLS} = \frac{d}{\gamma v} \quad . \tag{3.21}$$

Výsledky pro časové rozdíly v soustavě $K$ (3.19) a soustavě $\bar{K}$ (3.21) jsou kompatibilní. Vraťme se k vysvětlení paradoxu. Je-li v soustavě $K$ vyslán současně z bodů

$$t_{\bar{P}'} = \frac{d}{v} \, , \, x_{\bar{P}'} = d \quad ; \quad t_{\bar{L}'} = \frac{d}{v} \, , \, x_{\bar{L}'} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) d \tag{3.22}$$

světelný signál, je v soustavě $\bar{K}$ pozorován v bodech

$$\begin{aligned} \bar{t}_{\bar{P}'} &= \frac{d}{\gamma v} \quad , \quad \bar{x}_{\bar{P}'} = 0 = \bar{x}_{\bar{P}} \quad ; \\ \bar{t}_{\bar{L}'} &= \frac{d}{\gamma v}\left(1 + \gamma - \frac{1}{\gamma}\right) \quad , \quad \bar{x}_{\bar{L}'} = -d = \bar{x}_{\bar{L}} \quad . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pozorovatel v pohybující se soustavě $\bar{K}$ si nyní tvrzení pozorovatele v $K$ vysvětlí snadno: polohu levé rysky měřil v pozdějším čase než polohu pravé rysky a naměřil tak kratší „vzdálenost“ mezi ryskami.