

Poznámky k přednášce Elektrodynamika a teorie relativity

PřF MU v Brně, únor 2001 - květen 2001

Michal Lenc

1	Maxwellovy rovnice.	6
2	Coulombův a Newtonův zákon.	7
2.1	Coulombův zákon.	7
2.2	Newtonův zákon.	7
3	Poissonova rovnice.	8
3.1	Greenova funkce.	8
3.2	Greenova věta.	9
4	Elektrostatická energie nábojů.	10
5	Multipólový rozklad pole.	11
5.1	Laplaceova rovnice ve sférických souřadnicích.	11
5.2	Legendreovy polynomy.	12
5.3	Kulové funkce.	13
5.4	Pole bodových nábojů ve vakuu.	14
6	Magnetostatika.	15
6.1	Analogie mezi elektrostatikou a magnetostatikou.	15
6.2	Magnetické pole kruhové smyčky.	16
7	Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí.	17
7.1	Mikroskopické Maxwellovy rovnice.	17
7.2	Makroskopické Maxwellovy rovnice.	19
7.3	Maxwellovy rovnice pro prostředí s triviálními materiálovými vztahy.	19
7.4	Energie a impuls elektromagnetického pole.	20
7.5	Prostředí s dispersí.	22
8	Kvasistacionární pole.	24
8.1	Skin-efekt.	24

8.2	Vzájemná indukčnost a vlastní indukčnost.....	26
8.3	Komplexní odpor.	27
9	Časově proměnná elektromagnetická pole.	28
9.1	Rovinná a kulová vlna.....	28
9.2	Obecné řešení nehomogenní rovnice pro potenciály.	29
9.3	Pole časově proměnného dipólu.	30
9.4	Lienardův - Wiechertův potenciál.....	32
10	Základy teorie relativity.	35
10.1	Principy.	35
10.2	Interval, vlastní čas.	35
10.3	Lorentzova transformace.....	37
10.4	Čtyřvektory.	38
10.5	Čtyřrychlost a čtyřzrychlení.....	40
10.6	Princip nejmenšího účinku.....	41
10.7	Jiná formulace principu nejmenšího účinku.	42
11	Náboj v elektromagnetickém poli.....	44
11.1	Variační princip.....	44
11.2	Tenzor elektromagnetického pole.....	45
12	Synchrotronové záření.	47
12.1	Lienardův-Wiechertův potenciál.....	47
12.2	Intenzita záření.....	49
13	Rovnice elektromagnetického pole.....	51
13.1	Čtyřrozměrný vektor proudu, rovnice kontinuity.	51
13.2	První pár Maxwellových rovnic.....	53
13.3	Druhý pár Maxwellových rovnic.	53

13.4	Tensor energie-impulsu.....	54
13.5	Tensor energie-impulsu makroskopického tělesa.....	57
14	Elektromagnetické vlny.....	58
14.1	Vlnová rovnice.....	58
14.2	Rovinná monochromatická vlna.....	59
14.3	Rozklad elektrostatického pole bodového náboje.....	60
14.4	Vlastní kmity pole.....	61
15	Brzdění pohybu vyzařováním.....	62
15.1	Rozklad potenciálu.....	62
15.2	Lagrangeova funkce soustavy nábojů.....	64
15.3	Brzdění pohybu vyzařováním.....	65
15.4	Hranice platnosti klasické elektrodynamiky.....	66
16	Záření rychle se pohybujícího náboje.....	66
16.1	Intenzita dipólového záření.....	66
17	Rozptyl záření volnými náboji.....	68
17.1	Thomsonův vzorec.....	68
17.2	Modifikace Thomsonova vzorce.....	69
18	Index lomu.....	69
19	Elektromagnetické pole v dispersním prostředí.....	71
19.1	Maxwellovy rovnice.....	71
19.2	Kramersovy - Kronigovy relace.....	73
20	Chování vlny na rovinném rozhraní.....	74
20.1	Fázová a grupová rychlost.....	74
20.2	Sommerfeldovo – Brilluinovo řešení.....	75
20.3	Odraz a lom na rovinném rozhraní.....	77

20.4	Zastavené a urychlené světlo.	77
21	Matematické doplňky.....	78
21.1	Lorentzova grupa.	78
21.2	Grupa $SL(2,C)$	79
21.3	Zápis Maxwellových rovnic pomocí diferenciálních forem.	80
21.4	Teorém Noetherové.....	82

1 Maxwellovy rovnice.

V prostředí s hustotou náboje a hustotou proudu je

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad .$$

Pro statické jevy můžeme zvlášť studovat elektrostatiku a zvlášť magnetostatiku. Pro elektrostatiku je

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.2)$$

a pro magnetostatiku

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \quad (1.3)$$

Substituce

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (1.4)$$

vede k tomu, že rovnice s rotací je splněna identicky a rovnice s divergencí dává

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad . \quad (1.5)$$

Substituce

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.6)$$

vede k tomu, že rovnice s divergencí je splněna identicky a rovnice s rotací vede na

$$\Delta \vec{A} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j} \quad . \quad (1.7)$$

2 Coulombův a Newtonův zákon.

2.1 Coulombův zákon.

Síla, kterou působí náboj q_2 (nacházející se v místě 2) na náboj q_1 v místě 1 je

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad , \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad , \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad (2.1)$$

a síla, kterou působí náboj q_1 (nacházející se v místě 1) na náboj q_2 v místě 2 je

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad , \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad r_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad , \quad (2.2)$$

je tedy

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \quad (2.3)$$

2.2 Newtonův zákon.

Síla, kterou působí hmotnost m_2 (nacházející se v místě 2) na hmotnost m_1 v místě 1 je

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad , \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad r_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (2.4)$$

a síla, kterou působí hmotnost m_1 (nacházející se v místě 1) na hmotnost m_2 v místě 2 je

$$\vec{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad , \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad , \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad , \quad (2.5)$$

je tedy samozřejmě opět $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

3 Poissonova rovnice.

3.1 Greenova funkce.

Poissonovu rovnici pro elektrostatické pole

$$-\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

i rovnici pro gravitační pole

$$\Delta \phi = 4\pi G \mu \quad (3.2)$$

budeme psát jednotným způsobem jako

$$\hat{H}|\psi\rangle = |J\rangle, \quad (3.3)$$

kde $\hat{H} = -\Delta$ a $|J\rangle = \rho/\epsilon_0$ nebo $|J\rangle = -4\pi G \mu$. Předpokládejme, že známe vlastní funkce a vlastní hodnoty operátoru \hat{H}

$$\langle x|\hat{H}|x'\rangle = \langle x|\left(\sum_m \lambda_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)|x'\rangle = \sum_m \lambda_m \psi_m^*(x')\psi_m(x) \quad (3.4)$$

Předpokládejme dále, že žádná z vlastních hodnot není rovna nule. Položíme pak Greenovu funkci rovnu

$$\langle x|\hat{G}|x'\rangle = \langle x|\left(\sum_m \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)|x'\rangle = \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \psi_m^*(x')\psi_m(x) \quad (3.5)$$

a platí

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{G}\hat{H}|x'\rangle &= \langle x|\left(\sum_m \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)\left(\sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|x'\rangle = \\ \langle x|\left(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|x'\rangle &= \langle x|\hat{1}|x'\rangle = \delta(x-x') \quad (3.6) \end{aligned}$$

Řešení Poissonovy rovnice dostáváme ve tvaru

$$\langle x|\psi\rangle = \langle x|\hat{G}|J\rangle = \int \langle x|\hat{G}|x'\rangle \langle x'|J\rangle dx' \quad (3.7)$$

nebo

$$\psi(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \psi_n(x) \int \psi_n^*(x') J(x') dx' \quad . \quad (3.8)$$

Připomeňme vyjádření jednotkového operátoru v ortonormální bázi

$$\int |x\rangle \langle x| dx = \hat{1} \quad . \quad (3.9)$$

3.2 Greenova věta.

Všimněme si nejprve působení laplaciánu na funkci $1/r$. Máme

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (3.10)$$

všude, kde je tato funkce dobře definována, tedy s výjimkou bodu $r=0$. Použitím Gaussovy věty na kouli se středem v počátku máme

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) dV = -4\pi \quad , \quad (3.11)$$

je tedy chování funkce $\Delta(1/r)$ neobvyklé a zapisujeme je pomocí Diracovy delta funkce jako

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \quad (3.12)$$

Z Gaussovy věty plyne Greenova věta. Mějme identity

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v) &= u \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} v) + (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v) \quad , \\ \vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} u) &= v \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) + (\vec{\nabla} v) \cdot (\vec{\nabla} u) \quad . \end{aligned}$$

Po odečtení rovnic a užití Gaussovy věty dostáváme Greenovu větu

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot \vec{n} dS \quad . \quad (3.13)$$

Máme teď

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \quad (3.14)$$

Rozšíříme-li integrační oblast na celý prostor a předpokládáme-li dostatečně rychlý pokles v nekonečnu, dostáváme

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad . \quad (3.15)$$

Ve dvourozměrném případě je postup podobný. Všimněme si nejprve působení laplaciánu na funkci $\ln r$.

Máme

$$\vec{\nabla} \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \ln r) = 0 \quad (3.16)$$

všude, kde je dobře definována, tedy s výjimkou bodu $r=0$. Použitím Gaussovy věty na kružnici se středem v počátku máme

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \ln r) dS = 2\pi \quad , \quad (3.17)$$

je tedy chování funkce $\Delta(\ln r)$ neobvyklé. Zapisujeme je pomocí Diracovy delta funkce jako

$$\Delta \ln r = 2\pi \delta^{(2)}(\vec{r}) \quad . \quad (3.18)$$

Z Greenovy věty potom dostáváme (pozor na podmínky v nekonečnu a “rozměr” $\ln r$)

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \sigma(\vec{r}') \ln|\vec{r} - \vec{r}'| d^2\vec{r}' \quad . \quad (3.19)$$

4 Elektrostatická energie nábojů.

Elektrostatickou energii spojitého rozložení náboje

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV \quad (4.1)$$

můžeme pro soustavu bodových nábojů $\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a)$ zdánlivě napsat jako důsledek prostého

dosazení

$$U' = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi_a \quad , \quad \phi_a = \phi(\vec{r}_a) \quad . \quad (4.2)$$

Z Coulombova zákona máme

$$\phi_a = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_b \frac{e_b}{r_{ab}} \quad , \quad r_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b| \quad . \quad (4.3)$$

Musíme tedy vyloučit působení pole vytvořeného daným bodovým nábojem na tento náboj, abychom mohli psát konečný výraz pro energii

$$U = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{r_{ab}} \quad . \quad (4.4)$$

5 Multipólový rozklad pole.

5.1 Laplaceova rovnice ve sférických souřadnicích.

Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích je

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad . \quad (5.1)$$

Separací proměnných

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (5.2)$$

dojdeme ke třem obyčejným diferenciálním rovnicím

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) &= 0 \quad , \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \lambda^2 R(r) &= 0 \quad , \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Jednoduše odvodíme, že (požadavek periodicity v proměnné φ) m musí být celé číslo a

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos m \varphi + S_m \sin m \varphi \quad . \quad (5.4)$$

Dále pak, že řešením radiální rovnice je (píšeme $\lambda^2 = l(l+1)$)

$$R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \quad (5.5)$$

Nejobtížnější je rovnice pro axiální souřadnici. Substituce $\cos \theta = x$ vede k Legendreově rovnici

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0 \quad (5.6)$$

kteřá má jako regulární řešení polynomy v proměnných $\cos \theta$ a $\sin \theta$.

5.2 Legendreovy polynomy.

Snadno vidíme, že pro $m=0$ můžeme rovnici (5.6) přepsat na

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \right] + l(l+1)P_l(x) = 0 \quad (5.7)$$

Integrací rozdílu vynásobených rovnic dostaneme vztah

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (5.8)$$

odkud plyne ortogonalita Legendreových polynomů $P_l(x)$ na intervalu $(-1,1)$. Z mnoha důležitých vlastností Legendreových polynomů uveďme dvě: vyjádření polynomu pomocí Rodriguesova vzorce

$$P_l(x) = \frac{1}{l!2^l} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \quad (5.9)$$

a výraz pro vytvářející funkci

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \quad (5.10)$$

Použitím Leibnitzova pravidla

$$\frac{d^m [f(x)g(x)]}{dx^m} = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^{m-k} f(x)}{dx^{m-k}} \frac{d^k g(x)}{dx^k} \quad (5.11)$$

dostaneme m – násobným derivováním rovnice (5.7) rovnici

$$(1-x^2)f''(x) - 2x(m+1)f'(x) + (n-m)(n+m+1)f(x) = 0 \quad , \quad (5.12)$$

kde $f(x) = d^m P_l(x) / dx^m$. Substituce $f(x) = (1-x^2)^{-m/2} g(x)$ vede k tomu, že funkce $g(x)$ musí splňovat rovnici (5.6), je tedy konečně

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad . \quad (5.13)$$

Využijeme-li ještě (5.9), můžeme (5.13) rozšířit i na oblast záporných m , tedy

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^l}{l!2^l} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (1-x^2)^l \quad , \quad -l \leq m \leq l \quad . \quad (5.14)$$

Polynomy (5.14) se nazývají přidružené Legendreovy polynomy. Námi definované polynomy $P_l^m(x)$ nebo $P_l(x)$ nejsou na intervalu $(-1,1)$ normované na jedničku. Ostatně různé drobné i větší odchylky v definicích speciálních funkcí jsou díky historickému vývoji bohužel zcela běžné.

5.3 Kulové funkce.

Pomocí přidružených Legendreových polynomů definujeme úplný ortonormální soubor kulových funkcí (tj. každou funkci úhlových proměnných ve sférických souřadnicích můžeme napsat pomocí (nekonečné) řady těchto funkcí)

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \exp(im\varphi) \quad . \quad (5.15)$$

Platí tedy

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l_1}^{m_1*}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (5.16)$$

a

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} f_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) \quad , \quad f_l^m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta f(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) \quad . \quad (5.17)$$

Několik prvních kulových funkcí je

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
Y_1^{-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(-i\varphi) \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(i\varphi) \\
Y_2^{-2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \exp(-2i\varphi) \quad Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \exp(2i\varphi) \\
Y_2^{-1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \exp(-i\varphi) \quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \exp(i\varphi)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Velmi důležitým speciálním případem rozkladu (5.17) je vztah pro Legendreův polynom obecného úhlu mezi dvěma vektory $\vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ a $\vec{n}' = (\sin\alpha \cos\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha)$, tedy

$$\begin{aligned}
\cos\gamma &= \vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha \cos(\varphi - \beta) \quad , \\
P_l(\cos\gamma) &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_l^{m*}(\alpha, \beta) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad .
\end{aligned} \tag{5.19}$$

5.4 Pole bodových nábojů ve vakuu.

Víme, že pole bodového náboje ve vakuu je dáno Coulombovým potenciálem. Je-li náboj q umístěn mimo počátek souřadné soustavy, např. na ose z (v bodě $z=R$), je tento potenciál dán vztahem

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-R)^2]^{1/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta]^{1/2}} \quad . \tag{5.20}$$

Vztah (5.10) nám umožní zapsat potenciál (5.20) ve tvaru multipólového rozkladu

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^l \quad , \quad r \leq R \quad , \\
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{R}{r}\right)^l \quad , \quad r \geq R \quad .
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Pro $r \gg R$ převažuje rotačně souměrná (vzhledem k počátku souřadnic, nikoliv poloze náboje) složka $l=0$. Umístíme-li však na ose z ještě náboj opačné velikosti do $z=-R$, vyruší se identické příspěvky členů s $l=0$ a pro $r \gg R$ převažuje pak dipólová složka ($l=1$)

$$\phi_{dip} \approx \frac{2qR}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} = \frac{D}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad (5.22)$$

kde $D=2qR$ označuje dipólový moment. Podobně, umístíme-li v rovině $z=0$ náboje q ve vzdálenosti R od počátku na osu x a náboje $-q$ ve vzdálenosti R od počátku na osu y , vyruší se identické příspěvky členů s $l=0$ a $l=1$ (při výpočtu využíváme (5.19)) a pro $r \gg R$ převažuje pak kvadrupólová složka ($l=2$)

$$\phi_{quad} \approx -\frac{2qR^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}, \quad (5.23)$$

kde $Q=qR^2$ je kvadrupólový moment.

6 Magnetostatika.

6.1 Analogie mezi elektrostatikou a magnetostatikou.

Viděli jsme, že řešením Poissonovy rovnice (3.1) v elektrostatice je potenciál (3.15)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (6.1)$$

a tedy intenzita

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' . \quad (6.2)$$

Řešením základní rovnice magnetostatiky (volíme kalibraci $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$)

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (6.3)$$

je analogicky

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' . \quad (6.4)$$

Pro magnetickou indukci pak je

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 \vec{r}' \quad . \quad (6.5)$$

Pro bodový náboj napíšeme $\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}' = e \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0) d^3 \vec{r}'$ a z obecného vztahu (6.2) dostáváme

Coulombovo pole

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad . \quad (6.6)$$

Obdobně pro lineární vodič napíšeme $\vec{j}(\vec{r}') d^3 \vec{r}' = J \delta^{(2)}(\vec{r}'_{\perp} - \vec{r}_0) d^2 \vec{r}'_{\perp} d \vec{r}'_0$

a z obecného vztahu (6.5) dostáváme Biotovo-Savartovo pole

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d \vec{r}'_0 \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad . \quad (6.7)$$

Gaussova věta

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6.8)$$

má analogii v Ampérově zákonu

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot \vec{t} d\ell = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 J \quad . \quad (6.9)$$

6.2 Magnetické pole kruhové smyčky.

Do vztahu pro vektorový potenciál (6.4) dosadíme $\vec{j}(\vec{r}') d^3 \vec{r}' = J \delta(\rho' - a) \delta(z') \vec{e}_{\varphi} \rho' d \rho' d z' d \varphi'$,

kde $\vec{e}_{\varphi'} = -\sin(\varphi' - \varphi) \vec{e}_{\rho} + \cos(\varphi' - \varphi) \vec{e}_{\varphi}$, a dostaneme

$$\vec{A}(\rho, z) = A_{\varphi}(\rho, z) \vec{e}_{\varphi} \quad , \quad A_{\varphi}(\rho, z) = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a \cos \varphi d \varphi}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi)^{1/2}} \quad , \quad (6.10)$$

$$A_{\varphi}(\rho, z) = \frac{\mu_0 J}{\pi k} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] \quad ,$$

kde

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2} \quad , \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} \quad , \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi} d\xi \quad . \quad (6.11)$$

Při výpočtu indukce potřebujeme identity

$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{E(k) - K(k)}{k} \quad , \quad \frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k} \quad . \quad (6.12)$$

Potom máme pro složky indukce ($B_\varphi = 0$)

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{z}{\rho \sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right] \quad , \quad (6.13)$$

$$B_z(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right] \quad . \quad (6.14)$$

7 Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí.

7.1 Mikroskopické Maxwellovy rovnice.

Náboje a proudy rozdělíme na vázané na prostředí a vnější, mikroskopické Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí tedy budou

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{e} &= \frac{\rho + \rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \quad , \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{h} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \rho \vec{v} + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{h} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.1)$$

Středováním dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\langle \rho \rangle + \rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \langle \rho \vec{v} \rangle + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (7.2)$$

kde jsme označili

$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E} \quad , \quad \langle \vec{h} \rangle = \vec{B} \quad . \quad (7.3)$$

Celkový náboj vázaný na prostředí, které je plně uzavřeno uvnitř oblasti V je roven nule

$$\int_V \langle \rho \rangle dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \rho \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad , \quad (7.4)$$

přičemž $\vec{P}=0$ vně materiálu. Potom je totiž

$$\int_V \langle \rho \rangle dV = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \int_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad . \quad (7.5)$$

Uvažujme dipólový moment

$$\int_V \vec{r} \langle \rho \rangle dV = -\int_V \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV = -\int_S \vec{r} (\vec{n} \cdot \vec{P}) dS + \int_V (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} dV = \int_V \vec{P} dV \quad . \quad (7.6)$$

Proveďme nyní řez materiálem plně uvnitř nějaké plochy S . Celkový proud touto plochou vázaný na prostředí je dán celkovou hodnotou časové změny průmětu vektoru polarizace

$$\int_S \langle \rho \vec{v} \rangle \cdot \vec{n} dS = \int_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad \Rightarrow \quad \langle \rho \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad , \quad (7.7)$$

přičemž $\vec{M}=0$ vně materiálu. Potom je totiž

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS dt \approx \int_{\ell} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_S \frac{\vec{P}(T) - \vec{P}(0)}{T} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad . \quad (7.8)$$

Uvažujme magnetický moment

$$\frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \langle \rho \vec{v} \rangle dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) dV = \frac{1}{2} \int_S \vec{r} \times (\vec{n} \times \vec{M}) dS - \frac{1}{2} \int_V (\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{r} dV = \int_V \vec{M} dV \quad . \quad (7.9)$$

Definice vektorů polarizace \vec{P} a magnetizace \vec{M} pomocí momentů je důležitá pro jednoznačnost, jinak by vyhovovaly také $\vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{f}$ a $\vec{M} + \vec{\nabla} f$.

Povšimněme si, že spojení rovnic (7.4) a (7.7) dává

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \langle \rho \vec{v} \rangle = 0 \quad . \quad (7.10)$$

7.2 Makroskopické Maxwellovy rovnice.

Zavedeme vektory indukce elektrického pole a intenzity magnetického pole jako

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M}) \quad (7.11)$$

a dostáváme ze (7.2), (7.4) a (7.7) makroskopické Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.12)$$

Rovnice (7.12) jsou konsistentní s rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad . \quad (7.13)$$

7.3 Maxwellovy rovnice pro prostředí s triviálními materiálovými vztahy.

V homogenním isotropním lineárním prostředí bez disperse máme jednoduché materiálové vztahy

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{B} \quad . \quad (7.14)$$

Zavedeme-li pro popis elektromagnetického pole vektorový a skalární potenciál

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad (7.15)$$

máme po dosazení do Maxwellových rovnic

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} , \quad (7.16)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_r \mu_0 \vec{j} .$$

S využitím kalibrační transformace

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi , \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (7.17)$$

můžeme mít

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (7.18)$$

a dostáváme tak pro potenciály nehomogenní vlnovou rovnici

$$\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} , \quad (7.19)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_r \mu_0 \vec{j} .$$

Označili jsme rychlost světla ve vakuu c a index lomu n

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} , \quad n^2 = \epsilon_r \mu_r . \quad (7.20)$$

7.4 Energie a impuls elektromagnetického pole.

Mějme testovací částici s energií \mathcal{E} a impulsem \vec{p} . Při přechodu ke spojitému rozložení náboje a proudu je

$$\Delta\mathcal{E} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{1}{\rho} \vec{F} \cdot \vec{j} \Delta t , \quad \vec{F} = \rho \vec{E} \Delta V + \vec{j} \times \vec{B} \Delta V \Rightarrow \frac{1}{\Delta V} \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} = \vec{j} \cdot \vec{E} . \quad (7.21)$$

S využitím vztahu

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) \quad (7.22)$$

odvodíme z Maxwellových rovnic výraz

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad . \quad (7.23)$$

Na pravé straně vystupuje vykonaná práce a tok, výraz na levé straně můžeme tedy interpretovat jako časovou změnu hustoty energie. Po zavedení veličin hustoty energie W a Poyntingova vektoru \vec{S}

$$W = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad , \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (7.24)$$

můžeme (7.23) psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV + \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \quad . \quad (7.25)$$

Obdobnou úvahu můžeme provést pro impuls. Při přechodu ke spojitému rozložení náboje je

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t \quad , \quad \vec{F} = \rho \vec{E} \Delta V + \vec{j} \times \vec{B} \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad . \quad (7.26)$$

Z Maxwellových rovnic odvodíme výraz

$$\vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} = \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) + \vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{j} \times \vec{B} - \rho \vec{E} \quad . \quad (7.27)$$

Poslední dva členy na pravé straně popisují Lorentzovu sílu, můžeme tedy výraz na levé straně interpretovat jako časovou změnu hustoty impulsu

$$\vec{G} = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} = \frac{n^2}{c^2} \vec{S} \quad . \quad (7.28)$$

Po úpravě, kdy předpokládáme, že permitivita ani permeabilita nezávisí na prostorových souřadnicích můžeme psát

$$\begin{aligned} \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) - \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) \quad , \\ \left[\vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right]_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.29)$$

a zákon zachování má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V G_i dV + \int_V [\rho E_i + (\vec{j} \times \vec{B})_i] dV + \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j d\Sigma = 0 \quad . \quad (7.30)$$

Definovali jsme Maxwellův tensor napětí T_{ij} jako

$$T_{ij} = -(E_i D_j + H_i B_j) + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad . \quad (7.31)$$

Takto definovaný Maxwellův tensor určuje tok impulsu z uvažovaného objemu. Jeho stopa je rovna hustotě energie

$$W - \sum_{i=1}^3 T_{ii} = 0 \quad . \quad (7.32)$$

7.5 Prostředí s dispersí.

V prostředí s dispersí musíme psát

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \frac{1}{2} [\vec{e}(t) + \vec{e}^*(t)] \quad , \quad \vec{D}(t) = \frac{1}{2} [\vec{d}(t) + \vec{d}^*(t)] \quad , \\ \vec{B}(t) &= \frac{1}{2} [\vec{b}(t) + \vec{b}^*(t)] \quad , \quad \vec{H}(t) = \frac{1}{2} [\vec{h}(t) + \vec{h}^*(t)] \quad , \end{aligned} \quad (7.33)$$

kde

$$\begin{aligned} \vec{e}(t) &= \vec{e}_0(t) \exp\{-i\omega t\} = \int \vec{e}_0(\alpha) \exp\{-i(\alpha + \omega)t\} \frac{d\alpha}{2\pi} \quad , \\ \vec{d}(t) &= \vec{d}_0(t) \exp\{-i\omega t\} = \epsilon_0 \int \epsilon(\alpha + \omega) \vec{e}_0(\alpha) \exp\{-i(\alpha + \omega)t\} \frac{d\alpha}{2\pi} \quad , \\ \vec{h}(t) &= \vec{h}_0(t) \exp\{-i\omega t\} = \int \vec{h}_0(\alpha) \exp\{-i(\alpha + \omega)t\} \frac{d\alpha}{2\pi} \quad , \\ \vec{b}(t) &= \vec{b}_0(t) \exp\{-i\omega t\} = \mu_0 \int \mu(\alpha + \omega) \vec{h}_0(\alpha) \exp\{-i(\alpha + \omega)t\} \frac{d\alpha}{2\pi} \quad . \end{aligned} \quad (7.34)$$

Předpokládáme, že $\vec{e}_0(t)$ a $\vec{h}_0(t)$ jsou pomalu se měnící funkce a že pro hodnoty integrálů jsou tedy podstatné pouze příspěvky z okolí $\alpha=0$. Pro výpočet zobecněného vztahu (7.23) nebo (7.27) potřebujeme znát přibližné vyjádření pro $\partial \vec{d} / \partial t$ a $\partial \vec{b} / \partial t$. Rozvoj příslušných integrandů kolem $\alpha=0$ napíšeme jako

$$\begin{aligned}
(\alpha + \omega) \varepsilon(\alpha + \omega) &= \omega \varepsilon(\omega) + \frac{d \omega \varepsilon(\omega)}{d \omega} \alpha + \frac{1}{2!} \frac{d^2 \omega \varepsilon(\omega)}{d \omega^2} \alpha^2 + \dots \approx \\
& - \omega^2 \frac{d \varepsilon(\omega)}{d \omega} + \frac{d \omega \varepsilon(\omega)}{d \omega} (\omega + \alpha)
\end{aligned} \tag{7.35}$$

nebo

$$\begin{aligned}
(\alpha + \omega) \mu(\alpha + \omega) &= \omega \mu(\omega) + \frac{d \omega \mu(\omega)}{d \omega} \alpha + \frac{1}{2!} \frac{d^2 \omega \mu(\omega)}{d \omega^2} \alpha^2 + \dots \approx \\
& - \omega^2 \frac{d \mu(\omega)}{d \omega} + \frac{d \omega \mu(\omega)}{d \omega} (\omega + \alpha) .
\end{aligned} \tag{7.36}$$

To nám umožní získat hledané vyjádření

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{d}(t)}{\partial t} &\approx i \varepsilon_0 \omega^2 \frac{d \varepsilon(\omega)}{d \omega} \vec{e}(t) + \varepsilon_0 \frac{d \omega \varepsilon(\omega)}{d \omega} \frac{\partial \vec{e}(t)}{\partial t} , \\
\frac{\partial \vec{b}(t)}{\partial t} &\approx i \mu_0 \omega^2 \frac{d \mu(\omega)}{d \omega} \vec{h}(t) + \mu_0 \frac{d \omega \mu(\omega)}{d \omega} \frac{\partial \vec{h}(t)}{\partial t} .
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Pro hustotu energie pak máme konečný výraz

$$W = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \frac{d \omega \varepsilon(\omega)}{d \omega} E^2 + \frac{1}{\mu_0 \mu^2(\omega)} \frac{d \omega \mu(\omega)}{d \omega} B^2 \right) . \tag{7.38}$$

Řešení vlnové rovnice pro vektorový potenciál ve tvaru rovinné vlny dává

$$\begin{aligned}
\phi &= 0 , \quad \vec{A} = 2 N \vec{a} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}) , \\
\vec{E} &= 2 N \omega \vec{a} \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) , \quad \vec{B} = 2 N (\vec{k} \times \vec{a}) \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) , \\
\vec{a} \cdot \vec{k} &= 0 , \quad |\vec{k}| = \frac{n \omega}{c} .
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Normovací podmínku pro vektorový potenciál odpovídající jednomu fotonu napíšeme jako

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_V W dV dt = \hbar \omega . \tag{7.40}$$

Po dosazení dostaneme pro normovací konstantu N

$$N = \left[\frac{\hbar}{2 \varepsilon_0 \omega V (\varepsilon(\omega)/n(\omega)) (\partial(\omega n(\omega))/\partial \omega)} \right]^{1/2} . \tag{7.41}$$

S uvedenou hodnotou normovací konstanty N je impuls fotonu střední hodnotou veličiny úměrné Poyntingovu vektoru

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\omega n(\omega))}{\partial \omega} \vec{E} \times \vec{H} dV dt = \frac{\hbar \omega \vec{k}}{c k} . \quad (7.42)$$

8 Kvasistacionární pole.

Poznámka: normála k ploše je dána pravidlem pravé ruky, tedy ve směru vektorového součinu tečny a vnitřní normály k orientované (proti směru hodinových ručiček) uzavřené křivce na ploše.

8.1 Skin-efekt.

Maxwellovy rovnice v přiblížení kvasistacionárního pole

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \sigma \vec{E} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (8.1)$$

vedou na

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (8.2)$$

Uvažujme nekonečný přímý drát kruhového průřezu. V důsledku symetrie má elektrické i magnetické pole jedinou složku

$$\vec{E} = E(r) \exp\{-i\omega t\} \vec{e}_z \quad , \quad \vec{B} = B(r) \exp\{-i\omega t\} \vec{e}_\varphi \quad (8.3)$$

a máme tedy

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) + k^2 E = 0 \quad , \quad i\omega B = -\frac{dE}{dr} \quad , \quad (8.4)$$

kde jsme označili

$$k = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta} \quad , \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}} . \quad (8.5)$$

Řešením rovnice (8.4) konečným na ose je

$$E(r) = K J_0(kr) \quad , \quad B(r) = -i \frac{k}{\omega} K J_1(kr) \quad . \quad (8.6)$$

Konstantu úměrnosti získáme pomocí jedné nebo druhé následující podmínky (proud protékající drátem musí mít danou hodnotu resp. tok magnetického pole plochou protínanou drátem musí mít danou hodnotu

$$2\pi\sigma \int_0^R E(r) r dr = I \quad , \quad 2\pi R B(R) = \mu_0 I \quad . \quad (8.7)$$

Máme tedy uvnitř vodiče

$$E(r) = \frac{I}{\sigma\pi R^2} \frac{k R J_0(kr)}{2J_1(kR)} \quad , \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{J_1(kr)}{J_1(kR)} \quad . \quad (8.8)$$

Pro malé hodnoty frekvence je

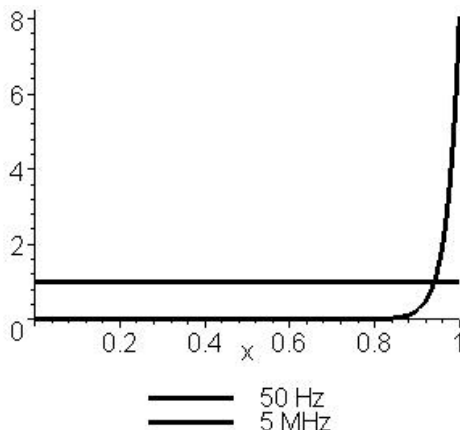
$$E(r) \approx \frac{I}{\sigma\pi R^2} \quad , \quad B(r) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{r}{R} \quad , \quad (8.9)$$

zatímco pro velké hodnoty máme v blízkosti $r \approx R$

$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx \frac{I}{\sqrt{2}\pi\sigma R\delta} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{R-r}{\delta}\right\} \exp\left\{i\left(\frac{R-r}{\delta} - \frac{\pi}{4} - \omega t\right)\right\} \vec{e}_z \quad , \\ \vec{B} &\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{R-r}{\delta}\right\} \exp\left\{i\left(\frac{R-r}{\delta} - \omega t\right)\right\} \vec{e}_\varphi \quad . \end{aligned} \quad (8.10)$$

Vztahy (8.10) získáváme z asymptotického rozvoje Besselových funkcí

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \quad . \quad (8.11)$$



Průběh relativní hodnoty hustoty proudu pro měděný drát poloměru 1 mm ($1/\sigma=1,555 \cdot 10^{-8} \Omega m$) při dvou různých frekvencích ($f=50 \text{ Hz}$ a $f=5 \text{ MHz}$) je

ukázán na obrázku. Je vidět, že při síťové frekvenci je skin-efekt zanedbatelný.

8.2 Vzájemná indukčnost a vlastní indukčnost.

Uvažujme dvě geometricky pevné cívky s proměnným proudem v cívce 2. Indukované napětí v cívce 1 vyvolané změnou pole buzeného cívkou 2 je

$$U_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(1)} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1 dS_1, \quad \int_{(1)} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \oint_{(1)} \vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_1, \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(2)} \frac{d\vec{\ell}_2}{r_{12}}. \quad (8.12)$$

Po dosazení dostáváme

$$U_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (8.13)$$

Pokud by tekla proměnný proud cívkou 1, bylo by indukované napětí v cívce 2

$$U_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad M_{21} = M_{12} = M. \quad (8.14)$$

Ale také změna magnetického toku cívkou 1 vytvoří indukované napětí v této cívce, stejně platí pro cívku

2. Obecně tedy můžeme psát

$$U_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}, \quad U_2 = M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}. \quad (8.15)$$

Časová změna energie magnetického pole je rovna záporně vzaté práci

$$\frac{dW}{dt} = -U_1 I_1 - U_2 I_2 = L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} - M \left(I_1 \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dI_1}{dt} \right), \quad (8.16)$$

takže pro energii magnetického pole je

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2, \quad L_1 L_2 \geq M^2. \quad (8.17)$$

Energii magnetického pole máme ovšem také vyjádřenu jako

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV \quad . \quad (8.18)$$

Při odvození rovnosti obou výrazů v (8.18) je postupně využito vztahů

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad . \quad (8.19)$$

Vztahu pro energii využijeme pro výpočet vlastní indukčnosti

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_V B^2 dV \quad . \quad (8.20)$$

Uvažujme dvě solenoidální cívky každou o N závitů těsně na sobě. Průřez cívek je S a jejich délka ℓ .

Pole první a druhé cívky jsou tedy přibližně

$$B_1 \approx \frac{\mu_0 N I_1}{\ell} \quad , \quad B_2 \approx \frac{\mu_0 N I_2}{\ell} \quad (8.21)$$

a pro indukčnosti máme

$$L_1 \approx L_2 \approx -M \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \quad . \quad (8.22)$$

Pro energii magnetického pole pak

$$W \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{2\ell} (I_1 + I_2)^2 \quad . \quad (8.23)$$

8.3 Komplexní odpor.

Pro obvod s odporem, kondensátorem a indukčností v seriovém zapojení máme

$$U = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} \quad , \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad , \quad (8.24)$$

tedy pro harmonický průběh

$$U = U_0 \exp\{-i\omega t\} \quad , \quad I = I_0 \exp\{-i\omega t\} \quad (8.25)$$

dostáváme vztah

$$U = Z I \quad , \quad Z = R - i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad . \quad (8.26)$$

Vezmeme-li reálnou část (8.26), dostáváme

$$I = \frac{U_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad , \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \quad . \quad (8.27)$$

Pro soustavu induktivně vázaných obvodů má zobecnění rovnice (8.24) tvar

$$U_a = R_a I_a + \frac{Q_a}{C_a} + \sum_b L_{ab} \frac{d I_b}{d t} \quad , \quad I_a = \frac{d Q_a}{d t} \quad , \quad (8.28)$$

kteřé pro periodické děje dává

$$U_a = \sum_b Z_{ab} I_b \quad , \quad Z_{ab} = \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) \delta_{ab} - i \omega L_{ab} \quad . \quad (8.29)$$

Vlastní frekvence dostaneme z podmínky řešitelnosti soustavy rovnic pro proudy při všech $U_a = 0$, tedy

$$\det(Z_{ab}) = 0 \quad . \quad (8.30)$$

Rovnice (8.28) lze formálně získat dosazením lagrangiánu L a disipativní funkce R

$$L = \sum_{a,b} \frac{1}{2} L_{ab} \frac{d Q_a}{d t} \frac{d Q_b}{d t} - \sum_a \frac{1}{2} \frac{Q_a^2}{C_a} + \sum_a Q_a U_a \quad , \quad R = \sum_a \frac{1}{2} R_a \left(\frac{d Q_a}{d t} \right)^2 \quad . \quad (8.31)$$

do obecného vztahu

$$\frac{d}{d t} \frac{\partial L}{\partial \frac{d Q_a}{d t}} - \frac{\partial L}{\partial Q_a} = - \frac{\partial R}{\partial \frac{d Q_a}{d t}} \quad . \quad (8.32)$$

9 Časově proměnná elektromagnetická pole.

9.1 Rovinná a kulová vlna.

Vlnová rovnice v jednorozměrném případě a vlnová rovnice pro sféricky symetrické řešení v trojrozměrném případě jsou

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (9.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \psi(r,t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Obecné řešení těchto rovnic je

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad , \quad (9.2)$$

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad .$$

Na tato řešení se můžeme dívat jako na rovinnou vlnu jdoucí ve směru nebo proti směru osy x respektive na rozbíhavou nebo sbíhavou kulovou vlnu.

9.2 Obecné řešení nehomogenní rovnice pro potenciály.

První řešení z řešení (9.2) se sférickou symetrií je velmi důležité, neboť nám umožní zapsat obecně zpožděné potenciály, způsobené zadaným rozložením náboje a proudu. Připomeňme si, že platí

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \quad (9.3)$$

Obecné řešení nehomogenních rovnic pro potenciály

$$\begin{aligned} \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (9.4)$$

můžeme tedy získat jako

$$\phi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{r_{12}} d^3 \vec{r}_2 \quad (9.5)$$

a

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{r_{12}} d^3 \vec{r}_2, \quad (9.6)$$

kde $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

9.3 Pole časově proměnného dipólu.

Uvažujme všechny náboje soustředěny kolem počátku souřadnic. Pak můžeme pro vektorový potenciál psát

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) d^3 \vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a e_a \vec{v}_a\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (9.7)$$

neboli

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \vec{p}(t) = \sum_a e_a \vec{r}_a(t). \quad (9.8)$$

Skalární potenciál spočteme integrací vztahu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (9.9)$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right), \quad (9.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right).$$

Skalární potenciál je tedy

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \left(\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right) \quad (9.11)$$

Pro intenzity dostaneme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3}{r^2} \left(\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{r} \right) \vec{r} - \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t^2} \times \vec{r} \right) \times \vec{r} \right], \quad (9.12)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{\partial \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t} \times \vec{r}, \quad \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \frac{\partial \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t}.$$

Dostatečně daleko od dipólu máme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \vec{D}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \vec{D}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (9.13)$$

kde jsme označili

$$\vec{D}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\partial^2 \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t^2} \times \vec{n}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (9.14)$$

Pro hustotu energie a Poyntingův vektor je

$$W = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{1}{16\pi^2 c^4 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} D^2, \quad (9.15)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} D^2 \vec{n}.$$

Je přirozeně

$$\frac{\vec{S}}{W} = c \vec{n}. \quad (9.16)$$

Příklad: Vezměme rozložení proudu ve tvaru

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = J \delta(x) \delta(y) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{e}_z, \quad 0 \leq z \leq L. \quad (9.17)$$

Podle (9.7) a (9.8) spočteme snadno

$$\vec{p}(t) = \frac{2LJ}{\pi\omega} \sin(\omega t) \vec{e}_z \quad (9.18)$$

a podle (9.14)

$$\vec{D}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{2LJ\omega}{\pi} \sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{e}_\varphi \quad . \quad (9.19)$$

Příklad: V kvantové teorii vezmeme místo integrálu z proudové hustoty maticový element operátoru proudu mezi počátečním a koncovým stavem elektronu v atomu. Ze Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \psi_i \quad , \quad -i\hbar \frac{\partial \psi_f^*}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \psi_f^* \quad (9.20)$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_i \psi_f^*) + \frac{\hbar}{2mi} \vec{\nabla} \cdot (\psi_f^* \vec{\nabla} \psi_i - \psi_i \vec{\nabla} \psi_f^*) = 0 \quad . \quad (9.21)$$

Vztah (9.21) umožňuje zapsat „rovnici kontinuity“

$$\frac{\partial \rho_{fi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{fi} = 0 \quad , \quad (9.22)$$

kde hustota náboje a hustota proudu odpovídající přechodu $i \rightarrow f$ jsou

$$\rho_{fi} = e\psi_i \psi_f^* \quad , \quad \vec{j}_{fi} = \frac{e\hbar}{2mi} \psi_f^* \vec{\nabla} \psi_i - \psi_i \vec{\nabla} \psi_f^* \quad . \quad (9.23)$$

Jinou úpravou rovnic (9.20) získáme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \psi_i \psi_f^*) = \vec{j}_{fi} + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{r} j_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{r} j_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{r} j_z) \quad . \quad (9.24)$$

Pro stacionární stavy

$$\psi_i(\vec{r}, t) = u_i(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_i t\right) \quad , \quad \psi_f^*(\vec{r}, t) = u_f^*(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_f t\right) \quad (9.25)$$

a s označením $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ můžeme psát

$$\vec{p}_{fi}(t) = \exp(i\omega_{fi} t) e \int \vec{r} u_f^*(\vec{r}) u_i(\vec{r}) d^3 \vec{r} \quad . \quad (9.26)$$

9.4 Lienardův - Wiechertův potenciál.

Ať se nabitá částice pohybuje po zadané trajektorii $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$. Hustota náboje je pak

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad . \quad (9.27)$$

Vzorec pro skalární potenciál přepíšeme jako

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dt' d^3\vec{r}' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R(t')} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dt' \quad , \end{aligned} \quad (9.28)$$

kde jsme označili $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$, $R(t') = |\vec{R}(t')|$. S pomocí vztahu

$$\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) = \frac{\delta(t' - t_r)}{1 - \frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{cR(t_r)}} \quad , \quad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad (9.29)$$

napišeme výraz pro skalární potenciál jako

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t_r) - \frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{c}} \quad , \quad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad . \quad (9.30)$$

Výraz pro vektorový potenciál je pak obdobně

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}(t_r)}{R(t_r) - \frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{c}} \quad , \quad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad . \quad (9.31)$$

Vezměme teď jednoduchý případ pohybu s konstantní rychlostí podél osy x . Podmínku pro nalezení časového zpoždění přepíšeme na

$$c^2(t - t_r)^2 = (x - vt_r)^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad (9.32)$$

odkud

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t_r = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \left[(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2) \right]^{1/2} \quad . \quad (9.33)$$

Jmenovatel výrazů (9.30) a (9.31) pro potenciály můžeme psát jako

$$c(t - t_r) - \frac{v(x - vt_r)}{c} = c \left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t_r \right] \quad . \quad (9.34)$$

Po malé úpravě pak dostáváme

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} r^*} \quad (9.35)$$

pro skalární potenciál a

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = (A_x(\vec{r}, t), 0, 0) \quad , \quad A_x(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{v}{r^*} \quad (9.36)$$

pro vektorový potenciál, kde jsme označili

$$r^* = \left[\frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 \right]^{1/2} . \quad (9.37)$$

Vektor intenzity elektrického pole je

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{r^{*3}} (x - vt, y, z) \quad (9.38)$$

a vektor indukce magnetického pole je

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{v}{r^{*3}} (0, -z, y) . \quad (9.39)$$

Pro vektor hustoty impulsu pole $\vec{G} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ dostáváme

$$\vec{G}(\vec{r}, t) = \frac{e^2 \mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v}{r^{*6}} (y^2 + z^2, -y(x - vt), -z(x - vt)) \quad (9.40)$$

a pro hustotu energie $W = (\epsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0)/2$ výraz

$$W(\vec{r}, t) = \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{(x - vt)^2 + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{r^{*6}} . \quad (9.41)$$

10 Základy teorie relativity.

10.1 Principy.

Princip relativity: všechny přírodní zákony jsou stejné ve všech inerciálních souřadných soustavách.

Inerciální soustavy jsou takové, kde se volný pohyb děje s konstantní rychlostí.

Interakce částic se v obyčejné mechanice popisuje pomocí interakční potenciální energie, která je funkcí polohy interagujících částic. Tento způsob popisu v sobě obsahuje předpoklad o okamžitém působení.

Rychlost šíření interakce je konečná. Z principu relativity je tato rychlost (často “rychlost šíření signálu”) ve všech inerciálních soustavách stejná. Z Maxwellových rovnic je vidět, že jde o rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} . \quad (10.1)$$

Toto je exaktní hodnota, určující tak délkovou jednotku jednotkou času.

Sjednocení principu relativity s principem konečné rychlosti šíření signálu je nazýváno *Einsteinovým principem relativity*.

10.2 Interval, vlastní čas.

Uvažujme dvě události: emise a absorpci fotonu. V soustavě K je

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = 0 , \quad (10.2)$$

v soustavě K' pak

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2 = 0 . \quad (10.3)$$

Zavedeme obecně kvadrát intervalu mezi dvěma událostmi (dvěma body čtyřrozměrného prostoročasu) jako

$$s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad , \quad (10.4)$$

popřípadě pro infinitesimálně blízké události

$$d s^2 = c^2 d t^2 - d x^2 - d y^2 - d z^2 \quad . \quad (10.5)$$

Je-li interval roven nule v nějaké inerciální souřadné soustavě K , je roven nule i v libovolné jiné soustavě K' . Potom tedy musí být

$$d s^2 = k(V) d s'^2 \quad . \quad (10.6)$$

Vzhledem k homogenitě prostoru a času nemůže faktor úměrnosti záviset na souřadnicích, vzhledem k isotropii prostoru může pak tento faktor záviset pouze na velikosti relativní rychlosti uvažovaných inerciálních soustav. Uvažujeme-li tři soustavy K, K_1 a K_2 , dostáváme

$$d s^2 = k(V_1) d s_1^2 \quad , \quad d s^2 = k(V_2) d s_2^2 \quad , \quad d s_1^2 = k(V_{12}) d s_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k(V_2)}{k(V_1)} = k(V_{12}) \quad , \quad (10.7)$$

a protože levá strana poslední rovnice nezávisí na úhlu mezi vektory rychlostí \vec{V}_1 a \vec{V}_2 , zatímco pravá strana může, musí být

$$k(V) = 1 \quad . \quad (10.8)$$

Kvadrát intervalu mezi dvěma událostmi (10.4) nebo mezi dvěma infinitesimálně blízkými událostmi (10.5) je stejný ve všech inerciálních souřadných soustavách.

Označme si v soustavě K

$$t_{12} = t_2 - t_1 \quad , \quad \ell_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad \Rightarrow \quad s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 \quad . \quad (10.9)$$

Zkoumejme, existuje-li taková soustava K' , kde by se obě události odehrály v jednom bodě prostoru, tedy že platí $\ell'_{12} = 0$. Máme tak podmínku $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 > 0$, tj. interval musí být *časupodobný*. Naopak požadavek na to, aby existovala soustava, ve které obě události nastanou současně ($t'_{12} = 0$), vede

k podmínice $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = -\ell_{12}'^2 < 0$, tj. interval musí být *prostorupodobný*. V soustavě, která se pohybuje s daným hmotným bodem ($\ell_{12}'^2 = 0$), můžeme tedy definovat vlastní čas jako

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{c} \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt \quad . \quad (10.10)$$

10.3 Lorentzova transformace.

Soustava K' se pohybuje vůči inerciální soustavě K rychlostí V podél osy x . Z elementárních úvah je zřejmé, že čtverec intervalu $s^2 = c^2 t^2 - x^2$ se nezmění při transformaci

$$ct = x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi \quad , \quad x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi \quad , \quad (10.11)$$

podobně jako se nezmění čtverec vzdálenosti $l^2 = x^2 + y^2$ při transformaci

$$x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \quad , \quad y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \quad . \quad (10.12)$$

Pro počátek soustavy K' (bod $x'=0$) máme v soustavě K z definice $x/t=V$, jednak z (10.11) $x/t=c \tanh \psi$, máme tedy $\tanh \psi = V/c$ a vztah (10.11) můžeme zapsat jako Lorentzovu transformaci

$$ct = \frac{ct' + \frac{V}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad . \quad (10.13)$$

Vždy jsou uváděny dva klasické příklady na použití vztahu (10.13). (a) V soustavě K je podél osy x v klidu měřítko, jehož dvě rysky mají v této soustavě souřadnice x_1, x_2 . Vzdálenost (klidová) rysek je tedy $\Delta x_0 = x_2 - x_1$. Vzdálenost v soustavě K' je (souřadnice jsou určovány ve stejném čase $t_1' = t_2'$) je $\Delta x = x_2' - x_1' = \Delta x_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$. Mluvíme o kontrakci délky. (b) V soustavě K' se v časech t_1' a t_2' odehrají

dvě události v jediném místě $x'_1=x'_2, y'_1=y'_2, z'_1=z'_2$ (interval mezi událostmi je tedy $\Delta t_0=t'_2-t'_1$). V soustavě K je interval mezi těmito událostmi $\Delta t=t_2-t_1=\Delta t_0/\sqrt{1-V^2/c^2}$. Mluvíme pak o dilataci času.

Vztah (10.13) můžeme zapsat i v diferenciálním tvaru

$$c dt = \frac{cdt' + \frac{V}{c} dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'. \quad (10.14)$$

Pro transformaci složek vektoru rychlosti ($\vec{v}=d\vec{r}/dt, \vec{v}'=d\vec{r}'/dt'$) dostaneme z (10.14) vztah

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (10.15)$$

Sledujeme-li šíření světelného paprsku v rovině ($v_x=c \cos \theta, v_y=c \sin \theta, v_z=0$ resp. $v'_x=c \cos \theta', v'_y=c \sin \theta', v'_z=0$), dostaneme vztah (aberrace světla)

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'} \sin \theta'. \quad (10.16)$$

Pro $V/c \ll 1$ položíme $\theta = \theta' - \Delta \theta$ a porovnáním nejnižšího členu Taylorova rozvoje dostaneme obvykle uváděný vztah

$$\Delta \theta = \frac{V}{c} \sin \theta'. \quad (10.17)$$

10.4 Čtyřvektory.

Nejprve definujeme podstatné tenzory. Metrický tenzor a jednotkový tenzor jsou

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.18)$$

Úplný antisymetrický pseudotenzor 4. řádu je definován pomocí vztahů

$$\varepsilon^{iklm} (\varepsilon^{0123} = 1), \quad \varepsilon_{iklm} (\varepsilon_{0123} = -1). \quad (10.19)$$

Čtyřvektor souřadnic události (kontravariantní a kovariantní) zapisujeme jako

$$x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r}), \quad x_i = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\vec{r}). \quad (10.20)$$

Platí přirozeně (s Einsteinovou sumační konvencí)

$$x_i = g_{ik} x^k, \quad x^i = g^{ik} x_k. \quad (10.21)$$

Interval můžeme psát jako

$$s^2 = x^i x_i = g_{ik} x^i x^k = g^{ik} x_i x_k = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \quad (10.22)$$

Věnujme se na chvíli trojrozměrnému eukleidovskému prostoru. Tam máme polární a axiální vektory. Při záměně orientace kartézských souřadných os se změní zápis vektoru průvodiče

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (-x)(-\vec{i}) + (-y)(-\vec{j}) + (-z)(-\vec{k}). \quad (10.23)$$

Definujeme operaci zrcadlení jako

$$\vec{r}' = \hat{P}\vec{r} = -\vec{r}. \quad (10.24)$$

Pro vektor rychlosti máme tedy

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v}' \left(= \hat{P}\vec{v} = \frac{d\hat{P}\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d\vec{r}'}{dt} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v}. \quad (10.25)$$

Pro vektor úhlové rychlosti ale

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{\omega}' = \hat{P}\vec{\omega} = \vec{r}' \times \vec{v}' = (-\vec{r}) \times (-\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{\omega}. \quad (10.26)$$

Vektory, které se při zrcadlení transformují jako průvodič se nazývají polární, vektory, které se transformují jako úhlová rychlost se nazývají axiální. Obecně zavádíme ve trojrozměrném prostoru axiální vektor jako pseudovektor duální k antisymetrickému tenzoru

$$C_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma} \quad , \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad . \quad (10.27)$$

Ve čtyřrozměrném prostoročase jsou duálními antisymetrický tenzor 2. řádu s antisymetrickým pseudotenzorem 2. řádu a antisymetrický pseudotenzor 3. řádu s vektorem

$${}^*A^{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} A_{lm} \quad , \quad {}^*A^{ikl} = \varepsilon^{iklm} A_m \quad . \quad (10.28)$$

10.5 Čtyřrychlost a čtyřzrychlení.

Definujeme čtyřvektor rychlosti přirozeným způsobem jako

$$u^i = \frac{d x^i}{d s} \quad , \quad u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad , \quad u^i u_i = 1 \quad . \quad (10.29)$$

Obdobně čtyřvektor zrychlení

$$w^i = \frac{d u^i}{d s} = \frac{d^2 x^i}{d s^2} \quad , \quad u^i w_i = 0 \quad . \quad (10.30)$$

Podívejme se na relativistický popis pohybu s konstantním zrychlením. V souřadné soustavě, kde rychlost částice $v=0$ máme

$$u_K^i = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad w_K^i = \left(0, \frac{a}{c^2}, 0, 0 \right) \quad , \quad (10.31)$$

kde a je obyčejné zrychlení. V obecné souřadné soustavě je rychlost a zrychlení

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right) \quad , \quad w^i = \left(\frac{\frac{v}{c^3} \frac{d v}{d t}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \frac{\frac{d v}{d t}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, 0, 0 \right) \quad . \quad (10.32)$$

Po malé úpravě (z rovnosti $w^i w_i = w_K^i w_{K_i}$) dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = a \quad . \quad (10.33)$$

S počátečními podmínkami $v_0 = 0$, $x_0 = 0$ dostáváme řešení

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} \quad , \quad x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right) \quad . \quad (10.34)$$

10.6 Princip nejmenšího účinku.

Účinek musí být invariantní a co nejjednodušší. Nabízí se integrál podél světočáry. Abychom dostali pro účinek známý nerelativistický výraz, musíme konstantu úměrnosti zvolit rovnu $-mc$, tedy

$$S = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad . \quad (10.35)$$

Lagrangeova funkce a impuls jsou

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad (10.36)$$

Hamiltonova funkce je pak

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad . \quad (10.37)$$

Pohybové rovnice dostaneme z variačního principu

$$\delta S = -m c \delta \int_a^b ds \quad , \quad \delta ds = \delta (g_{ik} dx^i dx^k)^{1/2} = \frac{g_{ik} dx^i \delta dx^k}{ds} = u_k \delta dx^k \quad , \quad (10.38)$$

$$\delta S = -m c \int_a^b u_k \delta dx^k = -m c u_k \delta x^k \Big|_a^b + m c \int_a^b \delta x^k \frac{du_k}{ds} ds \quad .$$

Odsud pak

$$\frac{du^i}{ds} = 0 \quad , \quad p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = m c u_i \quad . \quad (10.39)$$

Čtyřvektor energie-impulsu definujeme jako časupodobný vektor

$$p^i = \left(\frac{H}{c}, \vec{p} \right) \quad , \quad p^i p_i = m^2 c^2 \quad (10.40)$$

a čtyřvektor síly jako prostorupodobný vektor

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = \left(\frac{\vec{f} \cdot \vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{f}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad , \quad g^i p_i = 0 \quad . \quad (10.41)$$

Hamiltonova - Jacobiho rovnice volné částice je z (10.40)

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2 \quad , \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right) = m^2 c^2 \quad . \quad (10.42)$$

10.7 Jiná formulace principu nejmenšího účinku.

Typický problém nalezení geodetické čáry je popsán variační úlohou

$$\delta S(x^\mu) = 0 \quad , \quad S = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ -m c \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} - e g_{\mu\nu} A^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau \quad . \quad (10.43)$$

Tato formulace ale nepracuje pro $m = 0$. Zvolíme-li ale

$$S(p_\mu, x^\nu) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ -p_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2} \lambda(\tau) \left[g^{\mu\nu} (p_\mu - e A_\mu)(p_\nu - e A_\nu) - m^2 c^2 \right] \right\} d\tau \quad , \quad (10.44)$$

kde $\lambda(\tau)$ je Lagrangeův multiplikátor, dostáváme po malé úpravě (variacie vzhledem k p_μ)

$$S(x^\mu) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda(\tau)} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \lambda(\tau) m^2 c^2 \right] - e A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \right\} d\tau \quad . \quad (10.45)$$

Připomeňme, že máme

$$x_\mu = (ct, -\vec{r}) \quad , \quad A_\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A} \right) \quad , \quad p_\mu = (p_0, -\vec{p}) \quad (10.46)$$

a

$$m c^2 = c p_0 = \frac{m c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + e \Phi \quad , \quad \vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + e \vec{A} \quad . \quad (10.47)$$

Variací (10.45) dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S = & - \left[\frac{1}{\lambda} \frac{dx_\omega}{d\tau} + e A_\omega \right] \delta x^\omega \Big|_{\tau_a}^{\tau_b} + \frac{1}{2} \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[\frac{1}{\lambda^2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - m^2 c^2 \right] \delta \lambda d\tau + \\ & \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dx_\omega}{d\tau} \right) - e \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\omega} - \frac{\partial A_\omega}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \right] \delta x^\omega d\tau \quad . \end{aligned} \quad (10.48)$$

Odsud máme vyjádření impulsu

$$p_\omega = - \frac{\delta S}{\delta x^\omega} = \frac{1}{\lambda} \frac{dx_\omega}{d\tau} + e A_\omega \quad , \quad (10.49)$$

vazebné podmínky

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m c}{\left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} \right)^{1/2}} \quad (10.50)$$

a pohybové rovnice

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dx_\omega}{d\tau} \right) = e F_{\omega\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad , \quad F_{\omega\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\omega} - \frac{\partial A_\omega}{\partial x^\mu} \quad . \quad (10.51)$$

11 Náboj v elektromagnetickém poli.

11.1 Variační princip.

Účinek (invariantní s „minimální interakcí“)

$$S = -mc \int_a^b ds - e \int_a^b A_i dx^i \quad , \quad A^i = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad . \quad (11.1)$$

Lagrangeova funkce a zobecněný impuls jsou

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e \vec{A} \cdot \vec{v} - e \phi \quad , \quad \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e \vec{A} = \vec{p} + e \vec{A} \quad . \quad (11.2)$$

Z vektorové analýzy budeme potřebovat identitu

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad . \quad (11.3)$$

Je pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= e \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \vec{\nabla} \phi = e(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + e \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - e \vec{\nabla} \phi \quad , \\ \frac{d}{dt}(\vec{p} + e \vec{A}) &= \frac{d \vec{p}}{dt} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad . \end{aligned} \quad (11.4)$$

Lagrangeova rovnice je tedy

$$\frac{d \vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad , \quad (11.5)$$

kde jsme označili

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \quad (11.6)$$

Ve čtyřrozměrné notaci

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left(-mc \int_a^b ds - e \int_a^b A_i dx^i \right) = \\ &= \int_a^b \left(mc \delta x^i du_i + e \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - e \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i \right) - (mc u_i + e A_i) \delta x^i \Big|_a^b \quad . \end{aligned} \quad (11.7)$$

Použili jsme při odvození integraci per partes a vztahy

$$\delta d s = u_i d \delta x^i \quad , \quad \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k \quad . \quad (11.8)$$

Obvyklým postupem dostáváme výraz pro zobecněný impuls

$$P^i = m c u^i + e A^i \quad (11.9)$$

a pohybovou rovnici

$$m c \frac{d u_i}{d s} = e F_{ik} u^k \quad , \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad . \quad (11.10)$$

11.2 Tenzor elektromagnetického pole.

Ve vztahu (11.10) jsme zavedli tenzor elektromagnetického pole

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (11.11)$$

Při Lorentzově transformaci se tenzor elektromagnetického pole transformuje podle vztahu

$$F^{ik} = \Lambda_m^i \Lambda_n^k F'^{mn} \quad . \quad (11.12)$$

Označíme-li $1/\gamma = \sqrt{1 - V^2/c^2}$, dostáváme pro

$$x^0 = \gamma \left(x'^0 + \frac{V}{c} x'^1 \right) \quad , \quad x^1 = \gamma \left(x'^1 + \frac{V}{c} x'^0 \right) \quad , \quad x^2 = x'^2 \quad , \quad x^3 = x'^3 \quad , \quad (11.13)$$

neboli v maticovém zápisu

$$x^i = \Lambda_k^i x'^k \quad , \quad \Lambda_k^i = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{V}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

transformační vztah

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & F'^{01} & \gamma\left(F'^{02} + \frac{V}{c}F'^{12}\right) & \gamma\left(F'^{03} + \frac{V}{c}F'^{13}\right) \\ F'^{10} & 0 & \gamma\left(F'^{12} + \frac{V}{c}F'^{02}\right) & \gamma\left(F'^{13} + \frac{V}{c}F'^{03}\right) \\ \gamma\left(F'^{20} + \frac{V}{c}F'^{21}\right) & \gamma\left(F'^{21} + \frac{V}{c}F'^{20}\right) & 0 & F'^{23} \\ \gamma\left(F'^{30} + \frac{V}{c}F'^{31}\right) & \gamma\left(F'^{31} + \frac{V}{c}F'^{30}\right) & F'^{32} & 0 \end{pmatrix} . \quad (11.15)$$

Převedeno do vektorů intenzity a indukce

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x \quad , \quad E_y = \gamma(E'_y + V B'_z) \quad , \quad E_z = \gamma(E'_z - V B'_y) \quad , \\ B_x &= B'_x \quad , \quad B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right) \quad , \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right) . \end{aligned} \quad (11.16)$$

V nerelativistickém přiblížení ($V/c \rightarrow 0$) přechází (11.16) na

$$\vec{E} \doteq \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}' \quad , \quad \vec{B} \doteq \vec{B}' . \quad (11.17)$$

Invarianty pole můžeme zkonstruovat z tenzoru pole. Poněvadž je antisymetrický, zúžení nedává nic a máme až kvadratické výrazy

$$g^{im} g^{kn} F_{ik} F_{mn} = F_{ik} F^{ik} = \text{inv} \quad , \quad \epsilon^{ikmn} F_{ik} F_{mn} = F_{ik} {}^*F^{ik} = \text{inv} . \quad (11.18)$$

Duální tenzor vyjádřený pomocí intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole má tvar

$${}^*F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} . \quad (11.19)$$

Invarianty mají pak vyjádření

$$F_{ik} F^{ik} = -2 \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right) , \quad F_{ik} {}^*F^{ik} = 4 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} . \quad (11.20)$$

12 Synchrotronové záření.

12.1 Lienardův-Wiechertův potenciál.

Potenciál pole, vytvářeného jedním nábojem, který se pohybuje po trajektorii $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$. Potenciál počítáme v čase t v bodě $P(x, y, z)$, je tedy dán stavem pohybu částice v čase t' , pro který platí (doba potřebná pro šíření světelného signálu)

$$c(t - t') = R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| . \quad (12.1)$$

V souřadné soustavě, ve které je částice v čase t' v klidu, máme právě Coulombův zákon

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t')} , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 . \quad (12.2)$$

Podmínku (12.1) zapíšeme ve čtyřrozměrném (kovariantním) tvaru jako podmínku toho, že interval mezi událostmi "emise fotonu" $(ct', \vec{r}_0(t'))$ a "absorpce fotonu" (ct, \vec{r}) leží na světelném kuželu, tedy pro rozdíl čtyřvektorů událostí $R^k = (c(t - t'), \vec{r} - \vec{r}_0(t'))$ platí

$$R^k R_k = 0 . \quad (12.3)$$

Pomocí tohoto nulového čtyřvektoru a jednotkového čtyřvektoru rychlosti částice

$$u^k = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad \vec{v} = \vec{v}(t') = \frac{d\vec{r}_0(t')}{dt'}, \quad u^k u_k = 1 \quad (12.4)$$

se pokusíme zapsat čtyřvektor potenciálu pole tak, aby pro $\vec{v} = \vec{0}$ (tj. pro čtyřvektor $u^k = (1, \vec{0})$) přešel do tvaru (12.2) Z možných kombinací snadno nalezneme výsledek

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{u^i}{u_k R^k} \quad (12.5)$$

Pokud nevypisujeme explicitně argumenty, musíme mít na paměti, že levé strany vztahů jsou uvažovány v čase t , pravé strany v čase t' . V trojrozměrném značení pak má (12.5) tvar

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR} \right)}, \quad \vec{A} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}}{R \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR} \right)} \quad (12.6)$$

Výsledek (12.6) je přirozeně stejný jako (9.30) a (9.31). Při výpočtu polí

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (12.7)$$

budeme potřebovat následující triky pro výpočet parciálních derivací: Derivováním vztahu (12.1) podle t dostáváme

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR}} \quad (12.8)$$

Obdobně derivováním vztahu (12.1) podle \vec{r} dostáváme

$$-c\vec{\nabla}t' = \vec{\nabla}R(t') = \frac{\partial R}{\partial t'} \vec{\nabla}t' + \frac{\vec{R}}{R} \Rightarrow \vec{\nabla}t' = -\frac{\vec{R}}{cR \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR} \right)} \quad (12.9)$$

Výrazy pro potenciály ve (12.7) pak budeme chápat jako funkce $f(\vec{r}, t')$, a budeme počítat parciální derivace podle \vec{r} při konstantním t' a podle t' při konstantním \vec{r} . Porovnáním diferenciálů

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t'} dt' = \left(\vec{\nabla} f + \frac{\partial f}{\partial t'} \vec{\nabla} t' \right) \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} dt \quad (12.10)$$

přepíšeme (12.7) jako

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \phi(\vec{r}, t')}{\partial t'} \vec{\nabla} t' - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t') + \vec{\nabla} t' \times \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t')}{\partial t'} \quad (12.11)$$

Pro intenzitu elektrického pole dostáváme pak

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)}{R^2 \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right)^3} + \frac{\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \vec{w} \right)}{c^2 R \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right)^3} \right], \quad (12.12)$$

zatímco pro intenzitu magnetického pole

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\vec{v} \times \vec{n})}{R^2 \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right)^3} + \vec{n} \times \frac{\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \vec{w} \right)}{c R \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right)^3} \right]. \quad (12.13)$$

Označili jsme jednotkový vektor $\vec{n} = \vec{R}/R$ a zrychlení $\vec{w} = d\vec{v}/dt'$. Limitní případy pro $v/c \rightarrow 0$ jsou

$$\vec{E} \approx \frac{e\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad \vec{B} \approx \frac{e\mu_0 (\vec{v} \times \vec{n})}{4\pi R^2}. \quad (12.14)$$

12.2 Intenzita záření.

Poyntingův vektor (energie, procházející jednotkovou plochou za jednotku času, $[J m^{-2} s^{-1}]$) je

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c E^2 \vec{n} \quad (12.15)$$

a intenzitu záření (tj. energii, vyzařovanou do elementu prostorového úhlu, $[W]$) spočteme tedy jako

$$dI = \lim_{R \rightarrow \infty} \vec{S} \cdot \vec{n} R^2 d\Omega \quad (12.16)$$

Po dosazení z (12.15) a (12.12)

$$dI = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[\frac{2(\vec{n} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{w})}{c \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right)^5} + \frac{\vec{w}^2}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\vec{n} \cdot \vec{w})^2}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right)^6} \right] d\Omega \quad (12.17)$$

Pro $v/c \rightarrow 0$ dostáváme s označením $\vec{n} \cdot \vec{w} = w \cos \xi$ pro celkovou vyzařovanou intenzitu

$$I = \frac{e^2 w^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\eta \int_0^\pi d\xi \sin \xi (1 - \cos^2 \xi) = \frac{e^2 w^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (12.18)$$

V klidové soustavě částice je tedy (s označením $I = dE/dt$)

$$dE = \frac{e^2 w^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} dt, \quad d\vec{p} = 0, \quad u^i = \frac{dx^i}{ds} = (1, \vec{0}), \quad w^i = \frac{du^i}{ds} = \left(0, \frac{\vec{w}}{c^2}\right) \quad (12.19)$$

Relativisticky invariantní výraz (tj. diferenciál čtyřvektoru impulzu) vytvořený z čtyřvektorů rychlosti a zrychlení, který v klidové soustavě přejde na výrazy ze vztahu (12.19), je pak

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad dp^i = -\frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i = -\frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^i ds \quad (12.20)$$

V laboratorní soustavě tedy máme pro celkovou vyzařovanou intenzitu výraz

$$I = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{w^2 - \left(\vec{w} \times \frac{\vec{v}}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \quad (12.21)$$

Zde jsme potřebovali vyjádření čtyřvektoru rychlosti i zrychlení v laboratorní soustavě. Abychom nemuseli při výpočtu čtyřvektoru zrychlení užít obecné Lorentzovy transformace, vypočteme w^i derivováním známého tvaru $u^i = \left(1/\sqrt{1-v^2/c^2}, \vec{v}/\left(c\sqrt{1-v^2/c^2}\right)\right)$, potom

$$w^i = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \frac{\vec{w}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{w})}{c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \right) \quad (12.22)$$

V homogenním magnetickém poli se nabitá částice pohybuje rychlostí v po kružnici poloměru R , její zrychlení $w=v^2/R$ je kolmé k rychlosti. Dosazením do vztahu (12.21)

$$I = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{v^4}{R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{p}{mc}\right)^4 \approx \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{T}{mc^2}\right)^4 . \quad (12.23)$$

V posledním výrazu ve (12.23) jsme použili aproximace vysokých energií, kdy pro kinetickou energii platí $T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 \approx p c$. Z tohoto výrazu je také zřejmé, že synchrotronové záření je omezujícím faktorem při urychlování lehkých částic (elektronů a pozitronů). Pro normovací hodnotu $R_0 \approx 0,5 \text{ km}$ můžeme psát $I \approx (R_0/R)^2 (T/mc^2)^4 \text{ eV s}^{-1}$.

Jsou-li rychlost a zrychlení v určitém okamžiku rovnoběžné, dostáváme ($\vec{n} \cdot \vec{v} = v \cos \theta$, rychlost podél osy z) pro úhlové rozložení záření výraz

$$dI = \frac{e^2 w^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} d\Omega . \quad (12.24)$$

Pro hodnoty $v/c \rightarrow 1$ má úhlové rozložení velmi úzké, ale "dvouhrbé" maximum kolem $\theta=0$. Jsou-li rychlost a zrychlení v určitém okamžiku navzájem kolmé, dostáváme ($\vec{n} \cdot \vec{v} = v \cos \theta$, $\vec{n} \cdot \vec{w} = w \cos \varphi \sin \theta$, rychlost podél osy z a zrychlení podél osy x) pro úhlové rozložení

$$dI = \frac{e^2 w^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} \right] d\Omega . \quad (12.25)$$

13 Rovnice elektromagnetického pole.

13.1 Čtyřrozměrný vektor proudu, rovnice kontinuity.

Hustotu náboje píšeme jako

$$dQ = \rho dV \quad , \quad \rho = \sum_a e_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a) \quad . \quad (13.1)$$

Ze vztahu

$$dQ dx^i = \rho dV dx^i = \rho \frac{dx^i}{dt} dV dt \quad (13.2)$$

porovnáním geometrických vlastností (skaláry dQ a $dV dt$ a čtyřvektor dx^i) vyplývá, že můžeme definovat čtyřvektor proudu

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} = (c\rho, \rho\vec{v}) = (c\rho, \vec{j}) \quad . \quad (13.3)$$

Ve výrazu pro účinek můžeme pak psát

$$e \int A_i dx^i = \int \rho A_i dx^i dV = \frac{1}{c} \int A_i j^i d\Omega \quad . \quad (13.4)$$

Náboj, který ubude v nějakém objemu můžeme zapsat dvojím způsobem

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad . \quad (13.5)$$

S pomocí Gaussovy věty pak z (13.5) plyne

$$\int \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad , \quad (13.6)$$

tedy (objem je libovolný) rovnice kontinuity

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad . \quad (13.7)$$

Zákon zachování náboje (rovnice kontinuity) zaručuje, že při kalibrační invariancí se účinek změní pouze o divergenci

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int A_i j^i d\Omega \quad \rightarrow \quad \int \left(A_i + \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right) j^i d\Omega = \int A_i j^i d\Omega + \int \frac{\partial(\chi j^i)}{\partial x^i} d\Omega \quad . \quad (13.8)$$

13.2 První pár Maxwellových rovnic.

Z vyjádření tensoru elektromagnetického pole pomocí potenciálu snadno odvodíme platnost vztahu

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad . \quad (13.9)$$

Na levé straně je úplně antisymetrický tensor třetího řádu, představuje pouze čtyři různé rovnice.

Zřetelněji je to vidět, užijeme-li zápis pomocí duálního (pseudo)vektoru

$$\varepsilon^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = \frac{\partial {}^*F^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad . \quad (13.10)$$

Nultá komponenta dává tvrzení o nezhřídlovém charakteru magnetického pole, další tři komponenty Faradayův indukční zákon

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad . \quad (13.11)$$

13.3 Druhý pár Maxwellových rovnic.

Druhý pár Maxwellových rovnic odvodíme z variačního principu. Za Lagrangeovu funkci elektromagnetického pole zvolíme přirozeně známý invariant s vhodnou konstantou

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{c} \int \left(A_i j^i + \frac{1}{4\mu_0} F_{ik} F^{ik} \right) d\Omega \\ &= \int \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \rho \phi - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV dt \quad . \end{aligned} \quad (13.12)$$

S uvážením $F^{ik} \delta F_{ik} = F_{ik} \delta F^{ik}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c} \int \left(j^i \delta A_i + \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \delta F_{ik} \right) d\Omega = \\ &= -\frac{1}{c} \int \left(j^i \delta A_i + \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega \quad . \end{aligned} \quad (13.13)$$

Po integraci per partes ve (13.13)

$$\delta S = -\frac{1}{c\mu_0} \int \left(\mu_0 j^i + \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Omega - \frac{1}{c\mu_0} \int F^{ik} \delta A_i dS_k . \quad (13.14)$$

Druhý pár Maxwellových rovnic je tedy

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0 j^i . \quad (13.15)$$

Nultá komponenta je rovnice pro divergenci indukce elektrického pole (zobecnění Gaussovy věty elektrostatiky), zbývající tři pro rotaci intenzity magnetického pole (Ampérův zákon doplněný Maxwellovým posuvným proudem)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} . \quad (13.16)$$

13.4 Tensor energie-impulsu.

Tensor energie-impulsu dostaneme z teoremu Noetherové při transformaci, odpovídající translaci souřadnic

$$X_j^i = \delta_j^i , \quad Q_j^A = 0 , \quad \bar{T}_j^i(x) = q^A_{,j} \frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} - L \delta_j^i . \quad (13.17)$$

Tady je index j vlastně indexem “náhodně” tensorovým. Takto získaný tensor energie impulsu T^{ik} není obecně symetrický. Pro Lagrangeovu funkci elektromagnetického pole je

$$\frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} = \frac{\partial L}{\partial A_{j,i}} = -\frac{1}{\mu_0} F^{ij} \quad (13.18)$$

a tensor energie impulsu vychází nesymetrický

$$\bar{T}^{ik} = -\frac{1}{\mu_0} \left(g^{ij} g_{lm} \frac{\partial A^l}{\partial x^j} F^{km} - \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right) . \quad (13.19)$$

K výrazu pro \bar{T}^{ik} můžeme ovšem přidat člen, zaručující symetrii, který přitom neovlivní celkový impuls

$$\bar{T}^{ik} \rightarrow T^{ik} = \bar{T}^{ik} + \frac{\partial \tau^{ikl}}{\partial x^l} , \quad \tau^{ikl} = -\tau^{ilk} . \quad (13.20)$$

Požadavek symetrie se objevuje proto, aby byl splněn i zákon zachování momentu impulsu, definovaného vztahem $M^{ikl} = x^i T^{kl} - x^k T^{il}$, tedy

$$\frac{\partial M^{ikl}}{\partial x^l} = 0 \Leftrightarrow T^{ik} = T^{ki} \quad . \quad (13.21)$$

Pro elektromagnetické pole tensor τ^{ikl} snadno najdeme jako

$$\tau^{ikl} = \frac{1}{\mu_0} A^i F^{kl} \quad , \quad (13.22)$$

takže výsledný tensor energie impulsu bude

$$T^{ik} = \frac{1}{\mu_0} \left(-g_{lm} F^{il} F^{km} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right) \quad . \quad (13.23)$$

Zapsáno pomocí třírozměrných veličin

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c} S_\beta \\ \frac{1}{c} S_\alpha & -\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad , \quad (13.24)$$

kde

$$W = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \quad , \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (13.25)$$

jsou hustota energie a Poyntingův vektor a

$$\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta - W \delta_{\alpha\beta} \quad (13.26)$$

je Maxwellův tensor napětí.

Jiný způsob odvození tensoru energie-impulsu poskytuje variace účinku

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega \quad (13.27)$$

vzhledem k metrickému tensoru

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ik}} = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} d\Omega = 0 \quad ,$$

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial x^l} \right] \right\} . \quad (13.28)$$

Poněvadž variace δg^{ik} nejsou nezávislé (je pouze 10 komponent symetrického tensoru), nemůžeme z (13.28) psát $T_{ik}=0$. Platí $\delta \sqrt{-g} / \delta g^{ik} = -\sqrt{-g} g_{ik} / 2$. Lagrangeova funkce pro elektromagnetické pole je

$$\Lambda = - \left\{ g^{ik} A_i j_k + \frac{1}{4\mu_0} g^{il} g^{km} F_{ik} F_{lm} \right\} . \quad (13.29)$$

Variací dostáváme (při počítání musíme uvážit $\partial g^{lm} / \partial g^{ik} = (\delta_{li} \delta_{mk} + \delta_{lk} \delta_{mi}) / 2$)

$$T_{ik} = - (A_i j_k + A_k j_i) + \frac{1}{\mu_0} \left(-g^{lm} F_{il} F_{km} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm} \right) . \quad (13.30)$$

Tensor energie-impulsu soustavy částic zapíšeme pomocí analogie s tensorem energie-impulsu elektromagnetického pole. Hustotu impulsu soustavy částic napíšeme jako

$$\pi^\alpha = \mu c u^\alpha \quad , \quad \mu = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a) . \quad (13.31)$$

Hustota impulsu je u elektromagnetického pole rovna hustotě toku energie dělené c^2 . Výraz (13.31) bude tedy analogicky roven $T^{0\alpha}/c$. Veličina μc je nultou komponentou (stejně jako hustota náboje u čtyřvektoru proudu) čtyřvektoru toku hmoty $\mu dx^i/dt$. Tensor energie-impulsu tak můžeme konečně psát jako

$$T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt} \quad , \quad T^{ik} = T^{ki} . \quad (13.32)$$

Pro tensor energie-impulsu elektromagnetického pole dostaneme s využitím Maxwellových rovnic

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0 j^i \quad , \quad \epsilon^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 \quad (13.33)$$

výraz

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_F^{ik} = -F^{ik} j_k \quad . \quad (13.34)$$

Pro tensor energie-impulsu soustavy částic dostaneme s využitím pohybových rovnic

$$\mu c \frac{d u^i}{d s} = \rho F^{ik} u_k \quad \Leftrightarrow \quad \mu c \frac{d u^i}{d t} = F^{ik} j_k \quad (13.35)$$

a rovnice zachování hmotnosti (rovnice kontinuity pro čtyřvektor toku hmotnosti, podobně jako pro čtyřvektor proudu)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\mu \frac{d x^k}{d t} \right) = 0 \quad (13.36)$$

výraz

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_P^{ik} = F^{ik} j_k \quad . \quad (13.37)$$

Spojením (13.34) a (13.37) dostáváme zákon zachování

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (T_F^{ik} + T_P^{ik}) = 0 \quad . \quad (13.38)$$

Pro tensor energie-impulsu platí (rovnost právě pro elektromagnetické pole)

$$T_i^i \geq 0 \quad . \quad (13.39)$$

13.5 Tensor energie-impulsu makroskopického tělesa.

Tok impulsu elementem plochy povrchu tělesa je síla, působící na tento element. Užitím Pascalova zákona můžeme psát (v souřadné soustavě pevně spojené s elementem plochy)

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \sigma_{\alpha\beta} d S_\beta = p d S_\alpha \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (13.40)$$

V této souřadné soustavě tedy

$$u^i = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} . \quad (13.41)$$

Invariantní výraz, který přejde na předchozí je pak

$$T^{ik} = (p + \varepsilon) u^i u^k - p g^{ik} . \quad (13.42)$$

Použijeme-li pro zápis trojrozměrných veličin, máme

$$W = \frac{\varepsilon + \frac{v^2}{c^2} p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad \vec{S} = \frac{(p + \varepsilon) \vec{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{(p + \varepsilon) v_\alpha v_\beta}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} . \quad (13.43)$$

14 Elektromagnetické vlny.

14.1 Vlnová rovnice.

Vezmeme druhý pár Maxwellových rovnic (ve vakuu) a dosadíme vyjádření pole pomocí potenciálů

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad , \quad F^{ik} = g^{ij} g^{kl} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^l} \right) \quad , \quad (14.1)$$

$$g^{ij} \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^j \partial x^k} - g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0 .$$

Lorentzova kalibrační podmínka zjednoduší (14.1) na vlnovou rovnici

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \quad , \quad -g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0 . \quad (14.2)$$

Pomocí d'Alambertova operátoru

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (14.3)$$

máme pak ve třírozměrném zápisu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad , \quad \square \phi = 0 \quad , \quad \square \vec{A} = 0 \quad . \quad (14.4)$$

14.2 Rovinná monochromatická vlna.

Řešení hledáme ve tvaru rovinné vlny, tedy konstantní čtyřvektor násobený komplexní jednotkou.

Je pak

$$A^i = \text{Re} \left\{ a^i \exp(i k_j x^j) \right\} \quad , \quad k_i k^i = 0 \quad , \quad k_i a^i = 0 \quad . \quad (14.5)$$

Poslední vztah ve (14.5) je dán Lorentzovou kalibrační podmínkou. Čtyřvektor impulsu zapisujeme jako

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \quad , \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad , \quad \vec{n}^2 = 1 \quad . \quad (14.6)$$

Velmi jednoduše popíšeme pomocí charakteristik rovinné monochromatické vlny Dopplerův jev. Mějme zdroj světla, který je v klidu v soustavě $K_{(0)}$. Soustava $K_{(0)}$ se pohybuje vzhledem k laboratorní soustavě

K rychlostí V . Ať je úhel mezi směrem pohybu zdroje a směrem šíření světla α . Potom platí

$$\begin{aligned} k_{(0)}^0 &= \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad k_{(0)}^0 = \frac{\omega_{(0)}}{c} \quad , \quad k^0 = \frac{\omega}{c} \quad , \\ k_{(0)}^1 &= \frac{k^1 - \frac{V}{c} k^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad k_{(0)}^1 = \frac{\omega_{(0)}}{c} \cos \alpha_{(0)} \quad , \quad k^1 = \frac{\omega}{c} \cos \alpha \end{aligned} \quad (14.7)$$

a odtud

$$\omega = \omega_{(0)} \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha} \quad . \quad (14.8)$$

Pro rychlosti malé ve srovnání s rychlostí světla máme

$$\omega \approx \omega_{(0)} \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \cos 2\alpha \right) \quad . \quad (14.9)$$

Tensor energie-impulsu je

$$T^{ik} = \frac{c^2}{\omega^2} W k^i k^k \quad , \quad W = \frac{1}{2\mu_0} \left(a^i a_i^* + \operatorname{Re} \{ a^i a_i \exp(2i k_j x^j) \} \right) \quad . \quad (14.10)$$

Ve střední hodnotě podle času je druhý člen ve výrazu pro hustotu energie roven nule. Oba invarianty (11.20) jsou rovny nule.

Se speciální volbou kalibrace (spojené ovšem s jednou určitou inerciální souřadnou soustavou) máme

$$\begin{aligned} A^i &= (0, \vec{A}) \quad , \quad \vec{A} = a_y \cos(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_y + a_z \sin(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_z \quad , \\ \vec{E} &= \omega a_y \sin(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_y - \omega a_z \cos(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_z \quad , \\ \vec{B} &= k a_z \cos(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_y + k a_y \sin(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_z \quad . \end{aligned} \quad (14.11)$$

Eliptická polarizace takové vlny je vidět ze vztahu

$$\frac{E_y^2}{\omega^2 a_y^2} + \frac{E_z^2}{\omega^2 a_z^2} = 1 \quad , \quad \frac{B_y^2}{k^2 a_z^2} + \frac{B_z^2}{k^2 a_y^2} = 1 \quad . \quad (14.12)$$

14.3 Rozklad elektrostatického pole bodového náboje.

Potenciál bodového náboje (Coulombův potenciál) vyhovuje rovnici

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \quad (14.13)$$

Uvažujme Fourierovu transformaci

$$\phi(\vec{r}) = \int \phi_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \quad , \quad \phi_{\vec{k}} = \int \phi(\vec{r}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3 \vec{r} \quad . \quad (14.14)$$

Máme dvě vyjádření pro Fourierovu transformaci působení Laplaceova operátoru

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\vec{r}) &= \int -k^2 \phi_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \Rightarrow (\Delta \phi)_{\vec{k}} = -k^2 \phi_{\vec{k}} \quad , \\ \Delta \phi(\vec{r}) &= -\frac{e}{\epsilon_0} \int \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \Rightarrow (\Delta \phi)_{\vec{k}} = -\frac{e}{\epsilon_0} \quad . \end{aligned} \quad (14.15)$$

Porovnáním obou vyjádření dostáváme

$$\phi_{\vec{k}} = \frac{e}{\epsilon_0 k^2} \quad . \quad (14.16)$$

14.4 Vlastní kmity pole.

Objem V uzavřený v krychli o hranách délky A, B, C . Kalibrace taková, že $\phi=0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A}=0$. Máme

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad , \quad \vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0 \quad , \quad \vec{A}_{-\vec{k}} = \vec{A}_{\vec{k}}^* \quad , \quad (14.17)$$

přítom

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A} \quad , \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B} \quad , \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C} \quad , \quad (14.18)$$

kde n_x, n_y, n_z jsou celá čísla. Fourierovy složky vyhovují rovnici

$$\frac{d^2 \vec{A}_{\vec{k}}}{dt^2} + \omega^2 \vec{A}_{\vec{k}} = 0 \quad . \quad (14.19)$$

Jsou-li rozměry A, B, C zvoleného objemu dostatečně velké, jsou sousední hodnoty k_x, k_y, k_z velmi blízké a můžeme uvažovat o počtu možných stavů v intervalu hodnot vlnového vektoru

$$\begin{aligned} \Delta n_x &= \frac{A}{2\pi} \Delta k_x \quad , \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y \quad , \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z \quad , \\ \Delta n &= \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = V \frac{\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z}{(2\pi)^3} \quad . \end{aligned} \quad (14.20)$$

Pro pole dostaneme s potenciálem (14.17)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{\vec{k}} \frac{d \vec{A}_{\vec{k}}}{dt} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad , \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \sum_{\vec{k}} \vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad . \end{aligned} \quad (14.21)$$

Celková energie pole je

$$E = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) dV = \frac{V}{2} \sum_{\vec{k}} \left(\epsilon_0 \frac{d \vec{A}_{\vec{k}}}{dt} \cdot \frac{d \vec{A}_{\vec{k}}^*}{dt} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}) \cdot (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}^*) \right) \quad . \quad (14.22)$$

Jednoduchou úpravou (využití kalibrační podmínky) přepíšeme výraz (14.22) na

$$\vec{E} = \frac{V \varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{d \vec{A}_{\vec{k}}}{dt} \cdot \frac{d \vec{A}_{\vec{k}}^*}{dt} + \omega_k^2 \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}^* \right) , \quad \omega_k = c |\vec{k}| . \quad (14.23)$$

Rozklad potenciálu (14.17) obsahuje jak stojaté, tak postupné vlny. Vhodnější pro interpretaci je rozklad potenciálu, který obsahuje jen postupné vlny

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{a}_{\vec{k}} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)) + \vec{a}_{-\vec{k}}^* \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)) \right] . \quad (14.24)$$

Porovnáním (14.24) a (14.17) dostáváme

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{a}_{\vec{k}} \exp(-i \omega_k t) + \vec{a}_{-\vec{k}}^* \exp(i \omega_k t) . \quad (14.25)$$

Dosazení (14.25) do (14.23) umožňuje teď napsat energii pole jako

$$E = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} , \quad E_{\vec{k}} = 2V \varepsilon_0 \omega_k^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* . \quad (14.26)$$

Obdobně dostaneme pro impuls

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \int (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k}}{k} \frac{E_{\vec{k}}}{c} . \quad (14.27)$$

Nakonec zavedeme kanonické proměnné

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{\vec{k}} &= \sqrt{\varepsilon_0 V} (\vec{a}_{\vec{k}} \exp(-i \omega_k t) + \vec{a}_{-\vec{k}}^* \exp(i \omega_k t)) , \\ \vec{P}_{\vec{k}} &= -i \omega_k \sqrt{\varepsilon_0 V} (\vec{a}_{\vec{k}} \exp(-i \omega_k t) - \vec{a}_{-\vec{k}}^* \exp(i \omega_k t)) = \frac{d \vec{Q}_{\vec{k}}}{dt} . \end{aligned} \quad (14.28)$$

V těchto proměnných máme energii vyjádřeno jako energii souboru harmonických oscilátorů

$$E = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} , \quad E_{\vec{k}} = \frac{1}{2} (\vec{P}_{\vec{k}}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}}^2) . \quad (14.29)$$

15 Brzdění pohybu vyzařováním.

15.1 Rozklad potenciálu.

Pro skalární a vektorový potenciál elektromagnetického pole vytvořeného daným rozložením náboje a proudu máme integrály (9.5) a (9.6), které zde ještě jednou přepíšeme

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} d^3\vec{r}' \quad (15.1)$$

a

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} d^3\vec{r}' \quad , \quad (15.2)$$

kde $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Rozklad potenciálů soustavy nábojů, pohybujících se rychlostmi malými ve srovnání s rychlostí světla má tvar (předpokládáme, že se rozložení málo změní za dobu R/c)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{R} d^3\vec{r}' + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho(\vec{r}', t) d^3\vec{r}' - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2 \rho(\vec{r}', t) d^3\vec{r}' \right] \quad , \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\rho(\vec{r}', t) \vec{v}(\vec{r}', t)}{R} d^3\vec{r}' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(\vec{r}', t) \vec{v}(\vec{r}', t) d^3\vec{r}' \right] \quad , \end{aligned} \quad (15.3)$$

kde jsme již uvážili zachování celkového náboje, t.j. položili jsme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho(\vec{r}', t) d^3\vec{r}' = 0 \quad . \quad (15.4)$$

V dalším nebudeme vypisovat argumenty funkcí, neboť jsou zřejmé. Pro další zjednodušení výrazů provedeme kalibrační transformaci

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad , \quad (15.5)$$

kde kalibrační funkce je

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int R \rho d^3\vec{r}' - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho d^3\vec{r}' \right] \quad . \quad (15.6)$$

Po kalibrační transformaci jsou potenciály

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} d^3\vec{r}' \quad , \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\rho \vec{v}}{R} d^3\vec{r}' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho \vec{R}}{R} d^3\vec{r}' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} d^3\vec{r}' - \frac{1}{3c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho \vec{R} d^3\vec{r}' \right] \quad . \end{aligned} \quad (15.7)$$

Označíme-li $\vec{R}/R = \vec{n}$ jednotkový vektor ve směru od náboje k místu pozorování a připomeneme-li, že $\partial \vec{R}/\partial t = -\vec{v}$, můžeme výraz (15.7) zapsat jako

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} d^3\vec{r}' , \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \int \frac{\rho}{R} (\vec{v} + (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n}) d^3\vec{r}' - \frac{2}{3c} \int \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d^3\vec{r}' \right] .\end{aligned}\quad (15.8)$$

Uvažujeme-li o soustavě bodových nábojů, přejde předchozí výraz (15.8) na

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_a \frac{e_a}{R_a} , \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \sum_a \frac{e_a}{R_a} (\vec{v}_a + (\vec{n}_a \cdot \vec{v}_a)\vec{n}_a) - \frac{2}{3c} \sum_a e_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right] .\end{aligned}\quad (15.9)$$

15.2 Lagrangeova funkce soustavy nábojů.

Ponecháme-li i v kinetické energii jen členy do řádu v^2/c^2 , můžeme psát pro jednu částici

$$\begin{aligned}L_a &= \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \frac{1}{8} m_a \frac{v_a^4}{c^2} - \frac{e_a}{4\pi\epsilon_0} \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}} + \\ &\frac{e_a \mu_0}{8\pi} \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}} \left[\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b + (\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_a)(\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_b) \right] - \frac{e_a \mu_0}{6\pi c} \sum_b e_b \vec{v}_a \frac{d\vec{v}_b}{dt} .\end{aligned}\quad (15.10)$$

Lagrangeova funkce soustavy je pak (není to prostý součet L_a , nesmíme interakční členy započítávat dvakrát)

$$L = L^{(0)} + L^{(2)} + L^{(3)} , \quad (15.11)$$

kde základní člen je

$$L^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{a,b \\ b \neq a}} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} , \quad (15.12)$$

člen druhého řádu je

$$L^{(2)} = \frac{1}{8c^2} \sum_a m_a v_a^4 + \frac{1}{16\pi\epsilon_0 c^2} \sum_{\substack{a,b \\ b \neq a}} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \left[\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b + (\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_a)(\vec{n}_{ab} \cdot \vec{v}_b) \right] \quad (15.13)$$

a konečně člen třetího řádu

$$L^{(3)} = -\frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d}{dt} \sum_{a,b} e_a e_b \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b \quad . \quad (15.14)$$

15.3 Brzdění pohybu vyzařováním.

Potenciál a intenzitu elektrického pole v opravě třetího řádu můžeme podle (15.9) napsat pomocí dipólového momentu soustavy nábojů $\vec{p} = \sum_a e_a \vec{r}_a$ jako

$$\vec{A} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \quad , \quad \vec{E} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3 \vec{p}}{dt^3} \quad . \quad (15.15)$$

Celková práce vykonaná na soustavě nábojů je

$$\begin{aligned} \sum_a e_a \vec{v}_a \cdot \vec{E} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{E} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d^3 \vec{p}}{dt^3} = \\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right) - \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (15.16)$$

Ve střední hodnotě (předpokládáme finitní pohyb) tedy je vyzářený výkon (střední hodnota práce vzata s opačným znaménkem)

$$\overline{\frac{d\vec{E}}{dt}} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \overline{\left(\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right)^2} \quad . \quad (15.17)$$

Pro časovou změnu celkového momentu impulsu $\vec{M} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{P}_a$ dostáváme obdobně

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \sum_a \vec{r}_a \times \frac{d\vec{P}_a}{dt} = \sum_a \vec{r}_a \times e_a \vec{E} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \vec{p} \times \frac{d^3 \vec{p}}{dt^3} = \\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d}{dt} \left(\vec{p} \times \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right) - \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d\vec{p}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \quad . \end{aligned} \quad (15.18)$$

a ve střední hodnotě pak

$$\overline{\frac{d\vec{M}}{dt}} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \overline{\frac{d\vec{p}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}} \quad . \quad (15.19)$$

15.4 Hranice platnosti klasické elektrodynamiky.

Pro jednu částici s nábojem e je brzdění zářením studované v předchozím odstavci vyjádřeno silou

$$\vec{f} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} . \quad (15.20)$$

Pohybová rovnice částice ve vnější poli se započtením brzděné síly je (v souřadné soustavě, kde je rychlost částice blízká nule)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} . \quad (15.21)$$

Za časovou změnu zrychlení dosadíme do (15.21) výraz, získaný derivováním této rovnice a zanedbáním členů vyššího řádu

$$m \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} \approx e \frac{d\vec{E}}{dt} + e \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{B} \approx e \left(\frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{e}{m} \vec{E} \times \vec{B} \right) . \quad (15.22)$$

Dostáváme tedy rovnici

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{e^3}{6\pi m \epsilon_0 c^3} \left(\frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{e}{m} \vec{E} \times \vec{B} \right) . \quad (15.23)$$

Uvažujeme-li jako vnější pole elektromagnetickou vlnu o frekvenci $\omega = 2\pi c/\lambda$ a intenzitě E vychází z podmínky, aby brzděná síla byla malá ve srovnání s Lorentzovou silou

$$\lambda \gg r_e \quad , \quad eEr_e \ll mc^2 \quad , \quad (15.24)$$

kde

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (15.25)$$

je klasický poloměr elektronu.

16 Záření rychle se pohybujícího náboje.

16.1 Intenzita dipólového záření.

Pro Poyntingův vektor dipólového elektromagnetického pole jsme měli výrazy (9.14) a (9.15)

Pro jednu nerelativistickou částici, která se pohybuje se zrychlením \vec{w} je pak

$$\vec{D} = e \vec{w} \times \vec{n} \quad (16.1)$$

a intenzita záření vychází jako

$$dI = \vec{S} \cdot \vec{n} r^2 d\Omega = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} w^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (16.2)$$

Po integraci dostaneme

$$I = \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} w^2 \quad (16.3)$$

V souřadné soustavě, kde je částice v klidu, můžeme tedy psát

$$d\mathbf{E} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} w^2 dt, \quad d\vec{P} = 0 \quad (16.4)$$

a invariální forma těchto vztahů je

$$P^i = \left(\frac{\mathbf{E}}{c}, \vec{P} \right), \quad dP^i = -\frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i \quad (16.5)$$

V klidové soustavě je totiž (vztah (10.31))

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = (1, \vec{0}), \quad w^j = \frac{du^j}{ds} = \left(0, \frac{\vec{w}}{c^2} \right) \quad (16.6)$$

Celkový vyzářený čtyřimpuls je pak

$$\Delta P^i = -\frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i \quad (16.7)$$

S využitím pohybových rovnic

$$m c \frac{du^k}{ds} = e F^{kl} u_l \quad (16.8)$$

přejde (16.7) na

$$\Delta P^i = -\frac{e^4}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \int F_{kl} F^{km} u^l u_m dx^i \quad (16.9)$$

17 Rozptyl záření volnými náboji.

17.1 Thomsonův vzorec.

Zavedeme pojem účinného průřezu. Ať dI značí intenzitu záření, tj. střední hodnotu energie vyzařované soustavou za jednotku času do elementu prostorového úhlu $d\Omega$ a \bar{S} je střední hodnota Poyntingova vektoru (střední hodnota toku energie) dopadajícího záření. Potom je diferenciální účinný průřez (účinný průřez rozptylu do elementu prostorového úhlu $d\Omega$) veličina rozměru elementu plochy

$$d\sigma = \frac{dI}{\bar{S}} \quad . \quad (17.1)$$

Uvažujme teď rozptyl elektromagnetické vlny jedním volným nábojem. Budeme předpokládat, že rychlost získaná nábojem bude malá a že vlnová délka je mnohem větší než amplituda vyvolaných kmitů náboje okolo původní polohy (kam umístíme počátek souřadnic), tedy můžeme psát

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \approx e \vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha) \quad . \quad (17.2)$$

Pro intenzitu dipólového záření kmitajícího náboje máme podle (9.15)

$$dI = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} |\vec{E}_0 \times \vec{n}|^2 \overline{\cos^2(\omega t - \alpha)} d\Omega = \frac{e^4}{32\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} E_0^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad . \quad (17.3)$$

a pro střední hodnotu Poyntingova vektoru dopadající vlny

$$\bar{S} = c \epsilon_0 E_0^2 \overline{\cos^2(\omega t - \alpha)} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad , \quad (17.4)$$

takže pro diferenciální účinný průřez je

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad . \quad (17.5)$$

Celkový účinný průřez je pak dán Thomsonovým vzorcem (klasický poloměr elektronu r_e je zaveden vztahem (15.25))

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \quad . \quad (17.6)$$

17.2 Modifikace Thomsonova vzorce.

Uvažujme nyní nikoliv volný náboj, ale tlumený oscilátor, tedy

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 \cos \omega t \quad . \quad (17.7)$$

Pro dipólový moment $\vec{p} = e\vec{r}$ odsud dostáváme

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma \omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \vec{E}_0 \quad . \quad (17.8)$$

Celkový účinný průřez je v tomto případě

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad . \quad (17.9)$$

18 Index lomu.

Definujeme polarizovatelnost $\alpha(\omega)$ jako konstantu úměrnosti ve vztahu mezi (lokálním) elektrickým polem \vec{E}_{loc} a dipólovým momentem \vec{p} . Vyjdeme z komplexního zápisu (17.7)

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_{loc} \exp(-i\omega t) \quad . \quad (18.1)$$

Potom

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}_{loc} \quad , \quad \alpha(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \quad . \quad (18.2)$$

Polarizace je pak $\vec{P} = N\vec{p}$. Musíme ovšem uvážit, jaké pole působí na náboj. Připomeňme z elektrostatiky, že je-li v dielektriku s homogenním polem dutina, je lokální pole rovno

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad , \quad (18.3)$$

podle toho, jde-li o štěrbinu podél nebo napříč pole nebo o kulovou dutinu. Pro úplnost poznamenejme, že pro magnetické pole máme v podobné situaci

$$\vec{B}_{loc} = \vec{B} - \vec{M} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} - \frac{2}{3} \vec{M} \quad . \quad (18.4)$$

Pro dielektrika uvažujeme o vázaných nábojích uvnitř kulové dutiny, můžeme tedy psát

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \epsilon_0 \vec{E} \quad (18.5)$$

a pro index lomu (za velmi častého předpokladu $\mu(\omega) = \mu_0$)

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \quad . \quad (18.6)$$

Obvyklá forma tohoto vztahu je (Clausius - Mossotti)

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha \quad . \quad (18.7)$$

Ve vodiči uvažujeme o téměř volných elektronech (nevázaných k atomu, tedy $\omega_0 = 0$) a dále máme pro konstantu γ (ze dvou různých vyjádření proudu a zápisu změny impulsu za dobu mezi srážkami)

$$j = \sigma E \quad , \quad j = N e v_d \quad , \quad m v_d \gamma = e E \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{N e^2}{m \sigma} \quad . \quad (18.8)$$

Také lokální pole je rovno vnějšímu, opět díky neustálému pohybu téměř volných elektronů. Odtud máme pro index lomu

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i \omega \omega_p^2 \frac{\epsilon_0}{\sigma}} \quad , \quad \omega_p^2 = \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \quad . \quad (18.9)$$

19 Elektromagnetické pole v dispersním prostředí.

19.1 Maxwellovy rovnice.

Maxwellovy rovnice pro Fourierovy složky (píšeme obecně bez vyznačení prostorové proměnné)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (19.1)$$

jsou

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\omega) &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}(\omega) = -i\omega \vec{D}(\omega) \quad , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\omega) &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\omega) = i\omega \vec{B}(\omega) \quad . \end{aligned} \quad (19.2)$$

Předpoklad lineárního a příčinného vztahu mezi intenzitou a indukcí

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \left(\vec{E}(t) + \int_0^{\infty} \chi_e(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \right) \quad , \quad \vec{B}(t) = \mu_0 \left(\vec{H}(t) + \int_0^{\infty} \chi_m(\tau) \vec{H}(t-\tau) d\tau \right) \quad (19.3)$$

vede k vyjádření

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega) = \mu_0 \mu(\omega) \vec{H}(\omega) \quad , \quad (19.4)$$

kde

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} \chi_e(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad , \quad \mu(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} \chi_m(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad . \quad (19.5)$$

Z tohoto vyjádření máme hned

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega) \quad , \quad \mu(-\omega) = \mu^*(\omega) \quad (19.6)$$

a

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon(\omega) = 1 \quad , \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mu(\omega) = 1 \quad . \quad (19.7)$$

Pro dielektrika nabývá $\epsilon(\omega)$ při $\omega \rightarrow 0$ konečnou hodnotu statické relativní permitivity. Pro kovy je chování zajímavější. Z porovnání dvou tvarů $(\vec{\nabla} \times \vec{H})(\omega \rightarrow 0)$ dostáváme

$$-i\omega \epsilon(\omega \rightarrow 0) \vec{E}(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \sigma \vec{E}(\omega \rightarrow 0) \Rightarrow \epsilon(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \frac{i\sigma}{\omega} \quad . \quad (19.8)$$

S využitím vztahů (19.4) můžeme Maxwellovy rovnice (19.2) přepsat na

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\omega) &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\omega) = -i\omega \frac{n^2(\omega)}{c^2} \vec{E}(\omega) \quad , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\omega) &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\omega) = i\omega \vec{B}(\omega) \quad ,\end{aligned}\tag{19.9}$$

kde

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad , \quad \varepsilon(\omega) \mu(\omega) = n^2(\omega) \quad .\tag{19.10}$$

Vhodnou volbou kalibrace potenciálů je $\phi(\omega) = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\omega) = 0$, takže

$$\vec{E}(\omega) = i\omega \vec{A}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\omega)\tag{19.11}$$

a pro vektorový potenciál máme Helmholtzovu rovnici

$$\Delta \vec{A}(\omega) + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} \vec{A}(\omega) = 0 \quad .\tag{19.12}$$

Vezměme nyní výraz (7.23)

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad .\tag{19.13}$$

Uvažujme monochromatickou elektromagnetickou vlnu. Poněvadž pravá strana (19.13) obsahuje kvadratické výrazy, musíme brát reálné hodnoty pole, tj. dosazovat

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{2} [\vec{E}(\omega) \exp(-i\omega t) + \vec{E}^*(\omega) \exp(i\omega t)] \quad , \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{i\omega \varepsilon_0}{2} [-\varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \exp(-i\omega t) + \varepsilon^*(\omega) \vec{E}^*(\omega) \exp(i\omega t)]\end{aligned}\tag{19.14}$$

a

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{2} [\vec{H}(\omega) \exp(-i\omega t) + \vec{H}^*(\omega) \exp(i\omega t)] \quad , \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{i\omega \mu_0}{2} [-\mu(\omega) \vec{H}(\omega) \exp(-i\omega t) + \mu^*(\omega) \vec{H}^*(\omega) \exp(i\omega t)] \quad .\end{aligned}\tag{19.15}$$

Pro časovou střední hodnotu Poyntingova vektoru

$$\overline{\vec{S}(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\omega, t) dt \quad (19.16)$$

dostáváme ze vztahu (19.13) dosazením z (19.14) a (19.15)

$$-\vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{S}(\omega)} = \frac{\omega}{2} \left[\varepsilon_0 \varepsilon''(\omega) |\vec{E}(\omega)|^2 + \mu_0 \mu''(\omega) |\vec{H}(\omega)|^2 \right] . \quad (19.17)$$

Energie přidávaná do jednotky objemu je proměňována na teplo. Podle druhé věty termodynamické musí být toto teplo při disipaci energie vytvářeno, musí tedy být

$$\omega \varepsilon''(\omega) > 0 \quad , \quad \omega \mu''(\omega) > 0 \quad . \quad (19.18)$$

19.2 Kramersovy - Kronigovy relace.

Studium vlastností permitivity a permeability jako komplexních funkcí komplexní proměnné vede k tomu, že můžeme tvrdit, že jsou to funkce analytické v horní polorovině, na reálné ose má funkce $\varepsilon(\omega)$ nejvýše jeden pól v bodě $\omega=0$. Zobecnění na komplexní rovinu má často bezprostřední interpretaci.

Tak vztah

$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega) \quad , \quad \mu(-\omega^*) = \mu^*(\omega) \quad (19.19)$$

plyne z požadavku, aby reálné veličině

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) + \vec{E}_0^* \exp(i\omega^* t) \quad (19.20)$$

odpovídala reálná veličina

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) + \varepsilon(-\omega^*) \vec{E}_0^* \exp(i\omega^* t) \quad . \quad (19.21)$$

Užitím Cauchyho věty pro vhodnou oblast dostáváme Kramersovy - Kronigovy vztahy pro reálnou a imaginární část funkcí $\varepsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$, píšeme dále jen pro permitivitu (proměnnou na reálné ose značíme x)

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon'(0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx \quad , \quad \varepsilon''(\omega) - \frac{\sigma}{\omega} = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x)}{x - \omega} dx \quad . \quad (19.22)$$

Vzhledem k antisymetrii $\varepsilon''(-\omega') = -\varepsilon''(\omega')$ můžeme první vztah přepsat na

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \varepsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (19.23)$$

a máme přitom na paměti, že

$$x \geq 0 \Rightarrow \varepsilon''(x) \geq 0, \quad x \leq 0 \Rightarrow \varepsilon''(x) \leq 0. \quad (19.24)$$

Z těchto relací odvodíme výrazy

$$\frac{d \varepsilon'(\omega')}{d \omega'} = \frac{4 \omega'}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \varepsilon''(x)}{(x^2 - \omega'^2)^2} dx, \quad \frac{d [\omega'^2 (\varepsilon'(\omega') - 1)]}{d \omega'} = \frac{4 \omega'}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \varepsilon''(x)}{(x^2 - \omega'^2)^2} dx. \quad (19.25)$$

Z výrazů (19.25) dostáváme nerovnosti

$$\frac{d \varepsilon'(\omega')}{d \omega'} \geq 0, \quad \frac{d \varepsilon'(\omega')}{d \omega'} \geq \frac{2(1 - \varepsilon'(\omega'))}{\omega'}. \quad (19.26)$$

Zcela obdobně bychom získali pro permeabilitu nerovnosti

$$\frac{d \mu'(\omega')}{d \omega'} \geq 0, \quad \frac{d \mu'(\omega')}{d \omega'} \geq \frac{2(1 - \mu'(\omega'))}{\omega'}. \quad (19.27)$$

20 Chování vlny na rovinném rozhraní.

20.1 Fázová a grupová rychlost.

Uvažujme šíření vlny ve směru osy z . Prostředí má velmi slabou dispersi, tedy kvadrát indexu lomu bude součinem reálných částí permitivity a permeability (čárky vynecháváme) a vlnu napíšeme jako

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \exp \left[i \left(\frac{\omega n(\omega)}{c} z - \omega t \right) \right] d \omega. \quad (20.1)$$

Je zřejmé, že fázová rychlost je

$$v_f = \frac{c}{n(\omega)} \quad (20.2)$$

a může nabývat i nadsvětelných rychlostí. Nikoliv tak grupová rychlost

$$v_g = \frac{c}{\frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega}} \quad (20.3)$$

pokud jsou ovšem splněny podmínky (19.26) a (19.27).

20.2 Sommerfeldovo – Brilluinovo řešení.

Na rovinné rozhraní dopadá v čase $t=0$ kolmo elektromagnetická vlna. Poloprostor $x>0$ vyplňuje opticky průzračné prostředí, charakterizované indexem lomu $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ (předpokládáme $\mu(\omega)=1$).

Máme tedy na rozhraní

$$\begin{aligned} E(x=0, t) &= 0 & t < 0 \\ E(x=0, t) &= E_0 \exp\{-i\omega_0 t\} & t > 0 \end{aligned} \quad (20.4)$$

neboli ve Fourierových složkách

$$E(x=0, \omega) = E_0 \int_0^{\infty} d\tau \exp\{i(\omega - \omega_0)\tau\} \quad (20.5)$$

Vlna šířící se v poloprostoru $x>0$ má obecně tvar

$$f(\omega) \exp\{i(k(\omega)x - \omega t)\} \quad , \quad k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad (20.6)$$

a v našem případě tedy

$$E(x, t) = \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega t(\omega) \exp\{i(k(\omega)x - \omega t)\} \int_0^{\infty} d\tau \exp\{i(\omega - \omega_0)\tau\} \quad (20.7)$$

kde $t(\omega)$ je pomalu se měnící amplituda propustnosti při dopadu na rozhraní. Nejprve ukážeme výpočet podle Landaua. Hlavní příspěvek k integrálu bude pocházet od frekvencí $\omega \approx \omega_0$. Rozvojem funkcí a ponecháním nejnižších členů Taylorova rozvoje dostaneme

$$E(x, t) = \frac{E_0 t(\omega_0)}{2\pi} \exp\{i(k(\omega_0)x - \omega_0 t)\} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty d\xi \exp\left\{i\left[\frac{\xi}{u}(x - ut + u\tau) - \frac{xu'\xi^2}{2u^2}\right]\right\}, \quad (20.8)$$

kde jsme zavedli grupovou rychlost u a její derivaci u' vztahy

$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}, \quad u' = \frac{du}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}. \quad (20.9)$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme z (20.9)

$$E(x, t) = E_0 t(\omega_0) \exp\{i(k(\omega_0)x - \omega_0 t)\} \frac{\exp\left\{\mp i \frac{\pi}{4}\right\}}{\sqrt{\pi}} \int_w^\infty d\xi \exp\{\pm i \xi^2\}, \quad (20.10)$$

kde znaménko je signaturou u' a proměnná w je dána vztahem

$$w = \frac{x - ut}{\sqrt{2x|u'|}}. \quad (20.11)$$

Pro $ut - x \rightarrow \infty$ přejde (20.10) na stacionární tvar

$$E(x, t) = E_0 t(\omega_0) \exp\{i(k(\omega_0)x - \omega_0 t)\}. \quad (20.12)$$

Pro $ct - x \rightarrow 0^+$ hrají hlavní roli velké frekvence, kdy můžeme psát

$$k(\omega) - \frac{\omega}{c} \approx -\frac{\omega_p^2}{2\omega} \quad (20.13)$$

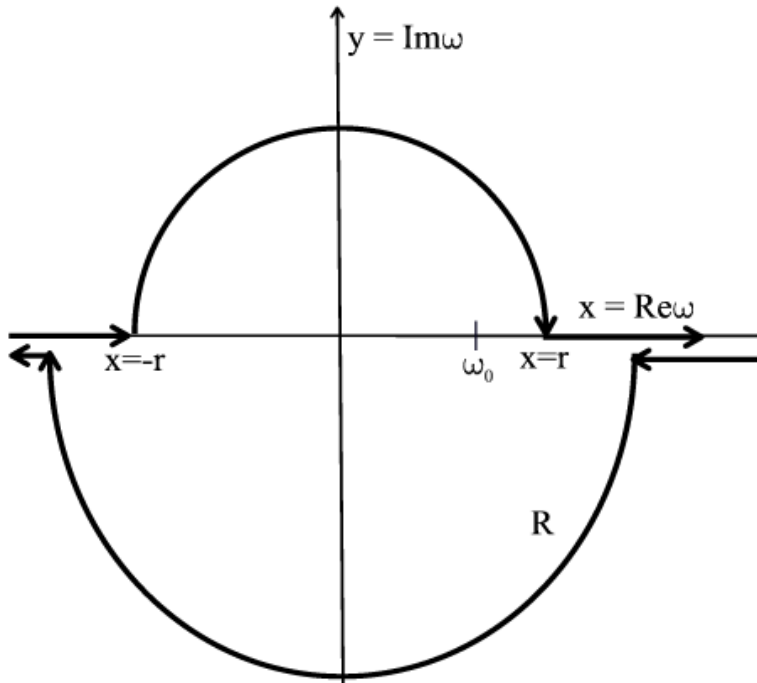
a tedy místo (20.7)

$$E(x, t) \approx \frac{iE_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega} \exp\left\{-i\left[\frac{\omega_p^2 x}{2c\omega} + \left(t - \frac{x}{c}\right)\omega\right]\right\} - E_0 \exp\left\{-i\left(t - \frac{x}{c}\right)\omega_0\right\}, \quad (20.14)$$

kde integrační cesta (na obrázku) je zvolena podle Sommerfelda tak, aby obsahovala pouze velké absolutní hodnoty (komplexní) integrační proměnné. Druhý člen na pravé straně (20.14) je příspěvek residua v $\omega = \omega_0$, předpokládáme dále $t(\omega_0) \approx 1$. S označením $\xi = (\omega_p^2 x)/(2c)$ a $\tau = t - x/c$ přepíšeme

(20.14) na

$$E(x,t) \approx \frac{iE_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \exp\left\{-i\left[\frac{\xi}{\omega} + \tau\omega\right]\right\} - E_0 \exp\left\{-i\left(t - \frac{x}{c}\right)\omega_0\right\} . \quad (20.15)$$



Zvolíme-li $r = \sqrt{\xi/\tau}$, můžeme pomocí různých integrálních reprezentací Besselovy funkce zapsat (20.15)

jako

$$E(x,t) = E_0 J_0\left(2\sqrt{\xi\tau}\right) = E_0 \left[J_0\left(\frac{\omega_p}{c} \sqrt{2x(ct-x)}\right) - \exp\left\{-i\left(t - \frac{x}{c}\right)\omega_0\right\} \right] . \quad (20.16)$$

Čelo vlny se tedy šíří rychlostí rovnou rychlosti světla ve vakuu, amplituda narůstá z nulové hodnoty. Pro

$x - ct > 0$ dostáváme přirozeně z (20.7) vztah $E(x,t) = 0$.

20.3 Odraz a lom na rovinném rozhraní.

20.4 Zastavené a urychlené světlo.

21 Matematické doplňky.

21.1 Lorentzova grupa.

S obvyklým značením

$$G = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = (x^i) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (21.1)$$

můžeme definovat skalární součin dvou čtyřrozměrných vektorů jako

$$(x, y) = x^T G y = g_{ik} x^i y^k \quad (21.2)$$

Lorentzova transformace je lineární zobrazení, které zobrazuje prostoročas sám na sebe a které zachovává skalární součin

$$x^i \rightarrow x'^i = \Lambda^i_k x^k, \quad x \rightarrow x' = \Lambda x \quad (21.3)$$

Podmínka pro invarianci skalárního součinu je

$$(\Lambda x)^T G (\Lambda y) = x^T \Lambda^T G \Lambda y = x^T G y \Rightarrow \Lambda^T G \Lambda = G \quad (21.4)$$

Použijeme-li zápisu ve složkách, můžeme (21.4) přepsat na

$$(\Lambda^T)_i^k = \Lambda_k^i, \quad g_{lm} \Lambda_i^l \Lambda_k^m = g_{ik} \quad (21.5)$$

Jsou-li Λ a M Lorentzovy transformace, jsou také Λ^{-1} a ΛM Lorentzovy transformace, což snadno odvodíme

$$\begin{aligned} g_{ik} &= g_{lm} \Lambda_r^l \Lambda_s^m (\Lambda^{-1})_i^r (\Lambda^{-1})_k^s = g_{rs} (\Lambda^{-1})_i^r (\Lambda^{-1})_k^s, \\ g_{ik} &= g_{lm} M_i^l M_k^m = g_{rs} \Lambda_l^r \Lambda_m^s M_i^l M_k^m = g_{rs} (\Lambda M)_i^r (\Lambda M)_k^s. \end{aligned} \quad (21.6)$$

Lorentzovy transformace tvoří grupu. Grupa má čtyři podmnožiny, charakterizované signaturou determinantu a Λ_0^0 , neboť

$$(\det \Lambda)^2 = 1, \quad (\Lambda_0^0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Lambda_0^j)^2 = 1 \quad (21.7)$$

Speciální Lorentzova grupa je tvořena transformacemi s $\det \Lambda = 1$ a $\text{sgn } \Lambda_0^0 = 1$. Máme

$$\begin{aligned}
 L_+^+ &: \det \Lambda = 1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = 1, \quad I \in L_+^+, \\
 L_-^+ &: \det \Lambda = -1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = 1, \quad I_s \in L_-^+, \\
 L_+^- &: \det \Lambda = 1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = -1, \quad I_{st} \in L_+^-, \\
 L_-^- &: \det \Lambda = -1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = -1, \quad I_t \in L_-^-.
 \end{aligned}
 \tag{21.8}$$

Speciální Lorentzova grupa obsahuje identickou transformaci, další podmnožiny jsou charakterizovány I_s (prostorová inverse), I_t (časová inverse) a I_{st} (časoprostorová inverse), definovaných pomocí vztahů

$$\begin{aligned}
 (I_s x)^0 &= x^0, \quad (I_s x)^j = -x^j, \\
 (I_t x)^0 &= -x^0, \quad (I_t x)^j = x^j, \\
 (I_{st} x)^0 &= -x^0, \quad (I_{st} x)^j = -x^j.
 \end{aligned}
 \tag{21.9}$$

Se speciální Lorentzovou grupou je spojena grupa komplexních matic druhého řádu s determinantem, rovným jedné, platí $SO(3,1) = SL(2, C)/Z_2$.

21.2 Grupa $SL(2, C)$.

Čtyřvektoru x přiřadíme komplexní matici \hat{x} vztahem

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= \sum_{i=0}^3 x^i \hat{\sigma}^i, \quad \hat{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \hat{\sigma}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{21.10}$$

takže

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.
 \tag{21.11}$$

Platí

$$\det \hat{x} = x^i x_i, \quad x^i = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \hat{x} \hat{\sigma}^i \}.
 \tag{21.12}$$

Každé dvojici matic $\{ \hat{\lambda}, -\hat{\lambda} \} \in SL(2, C)$ lze přiřadit Lorentzovu transformaci Λ zobrazením

$$\hat{x}' = \hat{\lambda} \hat{x} \hat{\lambda}^+ \Rightarrow x' = \Lambda x \quad . \quad (21.13)$$

Matici λ lze zapsat jako součin hermiteovské matice a unitární matice

$$\hat{\lambda}(\vec{u}, \vec{w}) = \exp\left(\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{u}\right) \exp\left(\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{w}\right) \quad . \quad (21.14)$$

Důkaz: Zapišme $\hat{\lambda} \hat{\lambda}^+ = \exp(\vec{\sigma} \cdot \vec{u})$, potom

$$\left[\exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{u}\right) \hat{\lambda} \right] \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{u}\right) \hat{\lambda} \right]^+ = \hat{1} \Rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{u}\right) \hat{\lambda} = \exp\left(\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{w}\right) \quad . \quad (21.15)$$

Jiný způsob zápisu

$$\hat{\lambda} = \exp\left(-\frac{\varphi}{2} \vec{n}_\varphi \cdot \vec{\sigma}\right) \exp\left(\frac{i\theta}{2} \vec{n}_\theta \cdot \vec{\sigma}\right) = \left(\cosh \frac{\varphi}{2} - \vec{n}_\varphi \cdot \vec{\sigma} \sinh \frac{\varphi}{2}\right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \vec{n}_\theta \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad . \quad (21.16)$$

Protože pro Pauliho matice platí

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad , \quad (21.17)$$

můžeme poslední vztah přepsat na

$$\hat{\lambda} = \cosh \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} - i \vec{n}_\varphi \cdot \vec{n}_\theta \sinh \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \quad (21.18)$$

$$\left(-\vec{n}_\varphi \sinh \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + i \vec{n}_\theta \cosh \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} - i \vec{n}_\varphi \times \vec{n}_\theta \sinh \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right) \cdot \vec{\sigma} \quad .$$

21.3 Zápis Maxwellových rovnic pomocí diferenciálních forem.

Základní formou je 1- forma potenciálu

$$\tilde{A} = A_i \tilde{d} x^i \quad . \quad (21.19)$$

2-forma pole je pak

$$\tilde{F} = \tilde{d} \tilde{A} = \frac{1}{2} F_{ik} \tilde{d} x^i \wedge \tilde{d} x^k \quad . \quad (21.20)$$

Explicitní vyjádření forem je

$$\tilde{A} = \phi \tilde{d}t - A_x \tilde{d}x - A_y \tilde{d}y - A_z \tilde{d}z \quad (21.21)$$

a

$$\tilde{F} = E_x \tilde{d}t \wedge \tilde{d}x + E_y \tilde{d}t \wedge \tilde{d}y + E_z \tilde{d}t \wedge \tilde{d}z - B_z \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + B_y \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z - B_x \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z \quad (21.22)$$

Duální forma je

$$*\tilde{F} = -c B_x \tilde{d}t \wedge \tilde{d}x - c B_y \tilde{d}t \wedge \tilde{d}y - c B_z \tilde{d}t \wedge \tilde{d}z - \frac{E_z}{c} \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + \frac{E_y}{c} \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z - \frac{E_x}{c} \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z \quad (21.23)$$

Z obecného vztahu

$$\tilde{d}\tilde{d}\tilde{\omega} = 0 \quad (21.24)$$

plyne

$$\begin{aligned} \tilde{d}\tilde{F} = 0 \Rightarrow *\tilde{d}\tilde{F} = 0, \quad *\tilde{d}\tilde{F} = -c \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \tilde{d}t - \\ - \frac{1}{c} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right] \tilde{d}x - \frac{1}{c} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y + \frac{\partial B_y}{\partial t} \right] \tilde{d}y - \frac{1}{c} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right] \tilde{d}z \end{aligned} \quad (21.25)$$

Pro zápis druhého páru Maxwellových rovnic spočteme nejprve

$$\begin{aligned} \tilde{d}*\tilde{F} = \left[c(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right] \tilde{d}t \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y - \left[c(\vec{\nabla} \times \vec{B})_y - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right] \tilde{d}t \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z + \\ + \left[c(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right] \tilde{d}t \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z - \frac{1}{c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z \end{aligned} \quad (21.26)$$

a formu k ní duální

$$\begin{aligned} *\tilde{d}*\tilde{F} = \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right] \tilde{d}x + \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B})_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right] \tilde{d}y + \\ \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right] \tilde{d}z - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \tilde{d}t \end{aligned} \quad (21.27)$$

1 - forma proudu je

$$\tilde{J} = \rho c^2 \tilde{d}t - j_x \tilde{d}x - j_y \tilde{d}y - j_z \tilde{d}z, \quad (21.28)$$

takže druhý pár Maxwellových rovnic máme zapsán jako

$$*\tilde{d}*\tilde{F} = -\mu_0 \tilde{J} \quad (21.29)$$

V předchozím jsme používali dualitu ve smyslu Hodgeova zobrazení, které je definováno v n rozměrném prostoru s metrickým tensorem g_{ik} jako zobrazení p -forem na $(n-p)$ -formy

$$\begin{aligned} * & : \Omega^p(n) \rightarrow \Omega^{n-p}(n) \\ * \left[\tilde{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{j_p} \right] &= \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon^{j_1 \dots j_p}_{j_{p+1} \dots j_n} \tilde{d}x^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{j_n} . \end{aligned} \quad (21.30)$$

Pro formy tak máme

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \dots j_p} \tilde{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{j_p} , \\ * \tilde{\omega} &= \frac{\sqrt{|\det(g_{ik})|}}{p!(n-p)!} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \omega^{j_1 \dots j_p} \tilde{d}x^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{j_n} . \end{aligned} \quad (21.31)$$

Pro složky duálních forem je z (21.31)

$$\begin{aligned} * \tilde{\omega} &= \frac{1}{(n-p)!} \omega_{j_{p+1} \dots j_n} \tilde{d}x^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{j_n} , \\ (* \tilde{\omega})_{j_{p+1} \dots j_n} &= \frac{\sqrt{|\det(g_{ik})|}}{p!} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \omega^{j_1 \dots j_p} . \end{aligned} \quad (21.32)$$

21.4 Teorém Noetherové.

Pohybové rovnice pro pole odvozujeme z variačního principu

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{\Omega} L(q^A, q^A_{,i}) d\Omega = 0 , \\ \int_{\Sigma} \frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} \delta q^A d\Sigma_i + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} \right) \right\} \delta q^A d\Omega &= 0 . \end{aligned} \quad (21.33)$$

Lagrangián, který dává druhý pár Maxwellových rovnic jako pohybovou rovnici variačního principu je

$$L = L(A_i, A_{i,k}) = -\frac{1}{c\mu_0} \left(\mu_0 A_i j^i + \frac{1}{4} g^{ij} g^{kl} F_{ik} F_{jl} \right) . \quad (21.34)$$

Teorém Noetherové říká, že každé spojitě s -parametrické transformaci souřadnic a funkcí pole, která vede k nulové variaci účinku, odpovídá s kombinací funkcí pole a jejich derivací, které se v čase nemění.

Uvažujme

$$\begin{aligned}
x^i \rightarrow x'^i &= x^i + \delta x^i \quad , \quad q^A(x) \rightarrow q'^A(x') = q^A(x) + \delta q^A(x) \quad , \\
\delta x^i &= X_n^i(x) \delta \omega^n \quad , \quad \delta q^A(x) = Q_n^A(x) \delta \omega^n \quad .
\end{aligned}
\tag{21.35}$$

Takto definované variace funkcí pole nejsou vhodné, protože obecně nekomutují s derivacemi podle souřadnic. Proto definujeme redukované variace

$$\begin{aligned}
\delta q^A(x) &= q'^A(x') - q^A(x) = \bar{\delta} q^A(x) + q^A_{,i}(x) \delta x^i \quad , \\
\bar{\delta} q^A(x) &= q'^A(x') - q^A(x) = (Q_n^A(x) - X_n^i(x) q^A_{,i}(x)) \delta \omega^n \quad .
\end{aligned}
\tag{21.36}$$

Pro variaci účinku dostáváme

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\Omega} L'(q'^A, q'^A_{,i}) d\Omega' - \int_{\Omega} L(q^A, q^A_{,i}) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left[L(x) + \bar{\delta} L(x) + \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i \right] d\Omega' - \int_{\Omega} L(x) d\Omega \quad .
\end{aligned}
\tag{21.37}$$

Poněvadž pro objemový element je

$$d\Omega' = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} d\Omega = \left(1 + \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^i} \right) d\Omega \quad ,
\tag{21.38}$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\Omega} \left[\bar{\delta} L + \frac{\partial(L \delta x^i)}{\partial x^i} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial q^A} \bar{\delta} q^A + \frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} \bar{\delta} q^A_{,i} + \frac{\partial(L \delta x^i)}{\partial x^i} \right] d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} \bar{\delta} q^A + L \delta x^i \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} \right) \right] d\Omega \quad .
\end{aligned}
\tag{21.39}$$

Jsou-li splněny pohybové rovnice, dostáváme konečné vyjádření změny účinku

$$\begin{aligned}
\delta S &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \Theta_n^i(x)}{\partial x^i} \delta \omega^n d\Omega \quad , \\
\Theta_n^i(x) &= - \frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} [Q_n^A(x) - X_n^j(x) q^A_{,j}] - L X_n^i(x) \quad .
\end{aligned}
\tag{21.40}$$

Jestliže se účinek nezmění, dostáváme diferenciální zákony zachování. Integrální tvar dostaneme z Gaussovy věty, předpokládáme-li hranici čtyřrozměrné oblasti ve tvaru "válce", kde podstavami jsou nadroviny s $t = \text{const}$. Potom pro s veličin C_n platí zákon zachování

$$C_n = \int_V \Theta_n^0(x) dV \quad , \quad \frac{dC_n}{dt} = 0 \quad . \quad (21.41)$$