Knihovna PřF MU
3 1 4 5 3 1 5 5 6 7

Přírodovědecká fakulta
Masarykovy univerzity v Brně,
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Disertační práce

Diferenciální invarianty z vnoření variet s metrickými poli

Pavla Musilová

Vedoucí disertační práce
Prof. RNDr. Demeter Krupka, DrSc.

Brno 2002

MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Poděkování

Děkuji prof. RNDr. Demeteru Krupkovi, DrSc. za vedení práce, děkuji prof. RNDr. Michalu Lencovi PhD., vedoucímu Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky, za podporu ve studiu a především děkuji své mamince Janě Musilové za konzultace, motivaci i psychickou podporu, jakož i všem ostatním babičkám za trpělivé hlídání mých dětí.

Obsah

Úvod **vii**
Invariantní lagrangiány vii
Charakteristika výsledků a členění práce ix

1 Základní pojmy **1**
1.1 Vnitřní semidirektní součin podgrup 1
1.2 Akce Lieových grup na varietách 5
1.3 Jety zobrazení a diferenciální grupa L_n^r 8
1.4 Tenzorová akce grupy L_n^1 11
1.5 Prodloužení tenzorové akce 13
1.6 Tenzorový součin modulů 15

2 Diferenciální invarianty **17**
2.1 Základní struktury 17
2.2 Vnoření variet s metrikou 21

A. Invarianty prvního řádu **26**
2.3 Akce v kanonických souřadnicích 26
2.4 Invarianty prvního řádu 27
2.5 Geometrický význam 32
2.6 Druhá fundamentální forma 38
2.7 Případ obecně neinjektivního vnoření 41

B. Invarianty druhého řádu **41**
2.8 Akce v kanonických souřadnicích 41
2.9 Invarianty druhého řádu I. 43
2.10 Invarianty druhého řádu II. 50
2.11 Geometrický význam 58

C. Invarianty obecného řádu **59**
2.12 Akce v kanonických souřadnicích 59
2.13 Invarianty obecného řádu 61
2.14 Geometrický význam 64

3 Aplikace **67**
3.1 Přirozené Lagrangeovy struktury 67
3.2 Harmonická zobrazení 72
3.3 Konstrukce lagrangiánů 74

Literatura **81**

Úvod

Jedním z problémů variačního počtu, nacházejících poměrně široké uplatnění v současné teoretické fyzice, je otázka popisu všech invariantních lagrangiánů příslušných vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ variet opatřených metrickými poli. Cílem práce bylo studovat možnosti konstrukce takových lagrangiánů v co nejširší obecnosti a přispět tak k hlubšímu pochopení této problematiky, jejíž řešení nebylo dosud předloženo v plné obecnosti. V práci bylo dosaženo některých původních výsledků, stručně charakterizovaných v závěru této kapitoly [1].

Invariantní lagrangiány příslušné vnoření variet s metrickými poli jsou používány ve fyzikálních teoriích, zejména v rychle se rozvíjející teorii strun. Problém nalezení lagrangiánů pro strunovou teorii rovněž není dodnes uspokojivě vyřešen. Práce si klade za cíl přispět k řešení obecných matematických a geometrických aspektů problému invariantních lagrangiánů, aniž přímo studuje fyzikální aplikace získaných výsledků.

Invariantní lagrangiány

Otázka popisu všech invariantních lagrangiánů příslušných vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ n-rozměrné variety $\mathcal{X}$ do m-rozměrné variety $\mathcal{Y}$, $n \leq m$, opatřených metrickými poli h a g má svůj původ ve známém variačním problému, spočívajícím v nalezení kritických zobrazení funkcionálu

[1]Práce vznikla za podpory grantu GAČR 201/00/0724 GAČR a projektu MSM 143100006 MŠMT ČR.

$$E(f) = \int_{\mathcal{X}} e(f)(x)\sqrt{|\det(h)|(x)}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$$

zvaného *energie zobrazení* f. Funkce $e(f) : Q \to \mathbf{R}$, známá jako *hustota energie*, je definována na varietě

$$Q = \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*}) \times \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{m*} \odot \mathbf{R}^{m*}) \times \mathrm{Imm}J^1_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

s levou akcí transformační grupy $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})$. Je zkonstruována pomocí metrického pole h zadaného na varietě $\mathcal{X}$ a metrického pole f^*g indukovaného na varietu $\mathcal{X}$ prostřednictvím vnoření f:

$$2e(f) = (f^*g)_{ij}h^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

(viz klasickou práci [5]). Tato funkce je nepochybně invariantní vzhledem k transformacím souřadnic na varietách $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ a představuje tedy invariantní lagrangián řádu nula příslušný vnoření f.

Uvážíme-li, že $\mathbf{R}$ je možno interpretovat jako varietu s triviální levou akcí grupy $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})$, můžeme formulaci problému poměrně široce zobecnit takto:

Nechť $r \geq 0$ je přirozené číslo a

$$Q^r = T^r_n\mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*}) \times T^r_m\mathrm{reg}(\mathbf{R}^{m*} \odot \mathbf{R}^{m*}) \times \mathrm{Imm}J^{r+1}_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

hladká varieta s přirozenou levou akcí Lieovy grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$. Dále označme jako $\mathcal{P}$ libovolnou varietu s levou akcí grupy $(L^s_n \times L^s_m)$, $1 \leq s \leq r + 1$. *Diferenciálním invariantem* definovaným na Q^r s hodnotami v $\mathcal{P}$ rozumíme každé hladké zobrazení $\chi : Q^r \to \mathcal{P}$ s vlastností

$$\chi((j^{r+1}_0\alpha, j^{r+1}_0\gamma) \cdot q) = (j^s_0\alpha, j^s_0\gamma) \cdot \chi(q)$$

pro libovolný prvek $q \in Q^r$ a libovolně zvolené $(r + 1)$-jety $j^{r+1}_0\alpha \in L^{r+1}_n$ a $j^{r+1}_0\gamma \in L^{r+1}_m$. Východiskem pro formulaci předchozí obecné definice je klasická teorie invariantů shrnutá v pracích [3], [12], [16] a obecná teorie diferenciálních invariantů obsažená v [8]. Používáme zcela standardního značení zavedeného v monografických pracích [6], [8] a předpokládáme, že čtenář je obeznámen se základními pojmy diferenciální geometrie, jako jsou Lieovy grupy, tenzorová akce grupy $GL(n, \mathbf{R})$ na vektorových $\mathbf{R}$-prostorech, hlavní a asociované fibrované bandly, dále pak se základy teorie jetů a základními pojmy teorie kategorií.

Ve smyslu této definice je hustota energie $e(f)$, definující integrál energie zobrazení f, diferenciálním invariantem nultého řádu definovaným na varietě

$$Q = \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*}) \times \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{m*} \odot \mathbf{R}^{m*}) \times \mathrm{Imm} J^1_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

s levou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m = GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})$, s hodnotami ve varietě $\mathcal{P} = \mathbf{R}$ s triviální levou akcí grupy $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})$.

Charakteristika výsledků a členění práce

Práce rozvíjí metodiku konstrukce diferenciálních invariantů r-tého řádu příslušných vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ hladkých variet s metrickými poli.

Původní výsledky lze stručně charakterizovat takto:

- Formulace problému invariantních lagrangiánů z vnoření variet s metrikou jako speciální situace při řešení otázky nalezení všech invariantních zobrazení r-tého řádu definovaných na jisté varietě Q^r opatřené levou akcí grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$ s hodnotami ve varietě $\mathcal{P}$, na níž působí zleva grupa $L^s_n \times L^s_m$, kde $s \leq r+1$ a L^p_k je diferenciální grupa p-tého řádu na $\mathbf{R}^k$ (viz odst. 1.2).

- Nalezení explicitního tvaru prvků *báze invariantů* prvního a druhého řádu a rekurentních vztahů pro konstrukci báze invariantů obecného řádu. Báze je tvořena jistým minimálním počtem funkcí odvozených z metrik h a g a vnoření f a je získána jako úplný soubor speciálně volených souřadnicových funkcí na faktorprostoru Q^r vzhledem k normální podgrupě $K^{r+1,s}_n \times K^{r+1,s}_m$ grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$, kde $K^{r+1,s}_n$ resp. $K^{r+1,s}_m$ je jádro kanonické projekce $\pi^{r+1,s}_n : L^{r+1}_n \to L^s_n$ resp. $\pi^{r+1,s}_m : L^{r+1}_m \to L^s_m$. Pro $s = 1$ a $\mathcal{P} = \mathbf{R}_{[L^1_n \times L^1_m]}$ existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi diferenciálními invarianty a invariantními lagrangiány téhož řádu.

- Geometrická interpretace nově zkonstruovaných prvků báze invariantů, jejich souvislost s geometrickými vlastnostmi vnoření f (speciální vlastnosti pro případ afinních vnoření, tj. vnoření zachovávajících geodetiky) a souvislost s tzv. druhými fundamentálními formami pro případ Riemannových metrik.

K řešení problému bylo využito faktorizační metody, popsané v monografii [8] a poprvé použité D. Krupkou v [7], která se ukázala jako velmi účinná již v pracích J. Šeděnkové [14], [15] při řešení problému popisu invariantů z metrického tenzoru na n-rozměrné varietě $\mathcal{X}$.

Práce členěna do tří kapitol.

V kapitole 1, založené především na výsledcích práce [8], uvádíme v souhrnu definice základních pojmů obecného charakteru a klíčové věty, které budou později využity při důkazu vlastních výsledků práce. Obsáhlejší důkazy převzatých tvrzení nereprodukujeme, pouze komentujeme jejich základní myšlenky s odkazy na [2], [8] a další monografickou literaturu. Popisujeme faktorizační metodu navrženou v [8] a použitou v [14], [15] pro výpočet invaritantů z metrického tenzoru na varietě $\mathcal{X}$, kterou posléze modifikujeme s ohledem na definici diferenciálních invariantů příslušných vnoření variet. (Výsledky některých našich výpočtů bylo možno přímo porovnat s výledky práce [14] a konstatovat shodu.)

Těžištěm práce je kapitola 2. V její úvodní části konkretizujeme struktury, se kterými budeme dále pracovat, a koncipujeme pojem diferenciálního invariantu příslušného vnoření variet s metrickými poli. V oddílu A této kapitoly je nalezena báze invariantů prvního řádu s hodnotami v levé $(L^1_n \times L^1_m)$-varietě, v oddílu B pak báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $(L^2_n \times L^2_m)$-varietě a báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $(L^1_n \times L^1_m)$-varietě. V oddílu C se zabýváme nalezením invariantů obecného řádu a odvozujeme rekurentní vztah pro jejich konstrukci. Využíváme některých výsledků práce [15], obsahující invarianty obecného řádu z metrického tenzoru na varietě $\mathcal{X}$. Prvky báze invariantů mají názornou geometrickou interpretaci, kterou v této kapitole rovněž prezentujeme. Definice diferenciálních invariantů i metodika jejich konstrukce je nezávislá na signatuře metrik zadaných na varietách $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, není tedy omezena na případ Riemannových variet. Získané výsledky jsou původní, stejně jako geometrická interpretace nově nalezených prvků báze invariantů.

Bázi diferenciálních invariantů lze použít ke konstrukci invariantních lagrangiánů. Touto problematikou se zabýváne v kapitole 3, kde uvádíme do souvislosti pojem přirozené Lagrangeovy struktury a diferenciálního invariantu. V analogii s [8] a [9] definujeme přirozenou Lagrangeovu strukturu příslušnou vnoření variet s metrickými poli a dokazujeme, že přirozené Lagrangeovy struktury jsou v bijektivní korespondenci s diferenciálními invarianty příslušnými vnoření variet s metrikou. Problém nalezení všech invariantních lagrangiánů r-tého řádu příslušných vnoření f n-rozměrné variety $\mathcal{X}$ do m-rozměrné variety $\mathcal{Y}$ je tedy formulován jako problém nalezení všech diferenciálních invariantů r-tého řádu z jisté levé $(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)$-variety do levé $(L^1_n \times L^1_m)$-variety. Krátce se zmiňujeme o lagrangiánu energie, definovaném pro případ vnoření Riemmannových variet a o harmonických zobrazeních (podrobněji viz například [5]).

Konstrukce lagrangiánů z báze invariantů spadá do problematiky klasické teorie invariantů, která je řešena např. v [3], [12] a [16]. V souladu s těmito texty jsou některé věty a postupy klasické teorie invariantů zobecněny pro náš případ nalezení ekvivariantních zobrazení z variety s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$. Je formulováno tvrzení o konstrukci všech algebraických invariantů z báze invariantů nalezené v kapitole 2. Konkrétní příklady invariantů lze pak nalézt např. v [1], [4] a [13], kde jsou použity jako Lagrangeovy funkce pro strunovou teorii resp. jako jejich geometrické části.

Předložená práce neobsahuje výčet všech funkcionálně nezávislých invariantních lagrangiánů, dává však přímý návod na jejich konstrukci. Věříme, že výsledky práce najdou své uplatnění ve fyzikálních teoriích.

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole shrnujeme definice a vlastnosti následujících obecných pojmů: Jet zobrazení, diferenciální grupa, levá (resp. pravá) G-varieta, pravý hlavní G-prostor, fibrovaný prostor r-bází na varietě, fibrovaný prostor s typovou vrstvou, diferenciální grupa L_n^r, vnitřní semidirektní součin Lieových grup, ekvivariantní zobrazení dvou levých G-variet, izomorfismus levých G-variet, tenzorová akce. Jsou zde také uvedena některá tvrzení týkající se těchto pojmů, jichž bude v dalších kapitolách využito. Pro účely práce formulujeme definici tenzorového součinu modulů nad obecně různými okruhy. Znalost základních pojmů z diferenciální geometrie (hladká varieta, vnoření, Lieova grupa ...) a znalost základů teorie kategorií předpokládáme. Podrobný výklad problematiky související s těmito pojmy lze nalézt např. [6], [8] a [17].

1.1 Vnitřní semidirektní součin podgrup

Nechť H, K jsou podgrupy grupy G a nechť platí

1) K je normální podgrupa G,

2) $H \cap K = \{e\}$,

3) $K \cdot H = G$.

Pak G se nazývá *vnitřní semidirektní součin podgrup H a K* a píšeme $G = H \times_S K$.

Nechť $G = H \times_S K$. Pak každý prvek $g \in G$ má jednoznačný rozklad $g = \alpha(g) \cdot \beta(g)$ kde $\alpha(g) \in K, \beta(g) \in H$. Tento rozklad určuje zobrazení $\alpha : G \to K$ a homomorfismus $\beta : G \to H$. Skutečnost, že β je homomorfismus, vyplývá z předpokladu, že K je normální podgrupa grupy G. Pro libovolné $g \in K$ je $\alpha(g) = g$, $\beta(g) = e$, pro libovolné $g \in H$ je $\alpha(g) = e$, $\beta(g) = g$. Předpokládejme, že grupa G působí zleva na množině Q, tj. je definováno zobrazení $\Phi : G \times Q \to Q$ splňující: $\Phi(g_1, \Phi(g_2, q)) = \Phi(g_1 \cdot g_2, q)$, $\Phi(e, q) = q$ pro každé $q \in Q$ a každé $g_1, g_2 \in G$. Dále píšeme $\Phi(g, q) = g \cdot q$. Pak grupa H působí zleva na množině Q/K vztahem

$$h \cdot [q]_K = [h \cdot q]_K, \tag{1.1}$$

kde označením $[q]_K$ rozumíme třídu prvku q, tj. $[q]_K = \{\overline{q} \in Q \mid \overline{q} = k \cdot q, k \in K\}$. Nechť Q, P jsou množiny, na nichž působí zleva grupa G. Zobrazení $F : Q \to P$ se nazývá *G-ekvivariantní*, platí-li $F(g \cdot q) = g \cdot F(q)$ pro libovolné $q \in Q$, $g \in G$. Platí následující teorém:

Věta 1.1 *Nechť grupa G tvaru $G = H \times_S K$ působí zleva na množině Q a grupa H působí zleva na množině P. Nechť $F : Q \to P$ je zobrazení s vlastností*

$$F(g \cdot q) = \beta(g) \cdot F(q) \tag{1.2}$$

pro každé $g \in G$ a každé $q \in Q$. Pak F má tvar

$$F = f \circ \pi,$$

kde $f : Q/K \to P$ je jednoznačně určené H-ekvivariantní zobrazení a $\pi : Q \to Q/K$ je kanonická projekce.

Důkaz: Podrobný důkaz tvrzení je uveden v [8]. Kromě toho je paralelní s důkazem následující věty 1.2.

$\heartsuit$

Poznámka: Názorně lze větu 1.1 interpretovat takto: Ke každému zobrazení $F : Q \to P$ spňujícímu vztah (1.2) existuje právě jedno H-ekvivariantní zobrazení $f : Q/K \to P$ takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
Q^{[G]} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & P^{[G/K]} \\
Q/K_{[G/K]} \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Nechť Q je množina s levou akcí grupy G. Nechť $K \subset G$ je normální podgrupa grupy G. Uvažujme množinu G/K a zobrazení

$$G/K \times G/K \ni ([g_1]_K, [g_2]_K) \to [g_1]_K \cdot [g_2]_K = [g_1 \cdot g_2]_K \in G/K. \quad (1.3)$$

Vzhledem k tomu, že podgrupa K je normální, vztah (1.3) korektně definuje grupovou operaci na množině G/K. Množina G/K opatřená strukturou grupy danou vztahem (1.3) se nazývá *faktorová grupa.*

Na množině Q/K definujme působení faktorové grupy G/K následovně:

$$G/K \times Q/K \ni ([g]_K, [q]_K) \to [g]_K \cdot [q]_K = [g \cdot q]_K \in Q/K. \quad (1.4)$$

Ukážeme, že půsebení je korektně definováno, tj. nezávisí na volbě reprezentanta. Nechť $g' = k_1 \cdot g, q' = k_2 \cdot q$, $k_1, k_2 \in K$. Platí:

$$[g']_K \cdot [q']_K = [(k_1 \cdot g) \cdot (k_2 \cdot q)]_K = [(k_1 \cdot g \cdot k_2) \cdot q]_K =$$

$$= [(k_1 \cdot g \cdot k_2 \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot q)]_K = [(k_1 \cdot k_2') \cdot (g \cdot q)]_K = [g \cdot q]_K,$$

kde $k_2' = g \cdot k_2 \cdot g^{-1} \in K$, neboť podgrupa K je normální. Dále ukážeme, že se jedná o levou akci:

$$[g_1]_K \cdot ([g_2]_K \cdot [q]_K) = [g_1 \cdot g_2 \cdot q]_K = ([g_1]_K \cdot [g_2]_K) \cdot [q]_K.$$

Věta 1.2 *Nechť Q je množina s levou akcí grupy G, K je normální podgrupa grupy G a nechť P je libovolná množina s akcí grupy G/K. Pak ke každému zobrazení $F : Q \to P$ splňujícímu vztah*

$$F(g \cdot q) = \beta(g) \cdot F(q),$$

kde $\beta : G \to G/K$ je faktorová projekce, existuje právě jedno G/K-ekvivariantní zobrazení $f : Q/K \to P$ s vlastností $F = f \circ \pi$, kde $\pi : Q \to Q/K$ je faktorová projekce.

Důkaz: Nechť F je zobrazení splňující předpoklad věty. Definujme zobrazení $f : Q/K \to P$ vztahem

$$f([q]_K) = F(q).$$

Definice je korektní, neboť pro libovolné $k \in K$

$$f([k \cdot q]_K) = F(k \cdot q) = \beta(k) \cdot F(q) = e \cdot F(q) = f([q]_K).$$

Zobrazení je G/K-ekvivariantní neboť

$$f([g]_K \cdot [q]_K) = F(g \cdot q) = \beta(g) \cdot F(q) = [g]_K \cdot f([q]_K).$$

Předpokládejme, že $F = f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi$, pak pro libovolné $q \in Q$ platí $f_1 \circ \pi(q) = f_2 \circ \pi(q)$ a tedy $f_1 = f_2$ na Q/K.

♡

Poznámka: Věta 1.2 je zobecněním věty 1.1. Ve speciálním případě, kdy grupa G je vnitřním semidirektním součinem tvaru $G = H' \times_s K$, je grupa H' izomorfní s grupou G/K. Zobrazení $\kappa : G/K \ni [g]_K \to \beta'(g) \in H'$, kde $\beta' : G \to H'$ je zobrazení určené jednoznačným rozkladem prvků semidirektního součinu, je izomorfismus.

Předpokládejme, že G je Lieova grupa, H,K její Lieovy podgrupy takové, že platí $G = H \times_S K$. Je-li zobrazení $\beta \times \alpha : G \to G$ izomorfismem Lieových grup, nazýváme G *vnitřním semidirektním součinem Lieových podgrup H a K.*

1.2 Akce Lieových grup na varietách

Nechť G je Lieova grupa, $\mathcal{Q}$ je hladká varieta. Připomeňme, že *levou* resp. *pravou akcí grupy G na varietě $\mathcal{Q}$* budeme nazývat hladké zobrazení $\Phi : G \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ resp. $\Phi : \mathcal{Q} \times G \to \mathcal{Q}$ splňující pro všechna $p \in \mathcal{Q}$ a pro všechna $g, h \in G$ podmínky

1) $\Phi(e,p) = p$ resp. $\Phi(p,e) = p$,

2) $\Phi(g, \Phi(h,p)) = \Phi(g \cdot h, p)$ resp. $\Phi(\Phi(p,h), g) = \Phi(p, h \cdot g)$.

$\mathcal{Q}$ se pak nazývá *levá* resp. *pravá G-varieta.* Ekvivariantní difeomorfismus levých G-variet se nazývá *izomorfismus levých G-variet.* Levá akce (vlastnosti levé a pravé akce jsou analogické, budeme je tedy definovat pouze pro levou akci) se nazývá *volná*, jestliže $\Phi(g,p) = p$ implikuje $g = e$ pro každé $p \in \mathcal{Q}$. Levá akce se nazývá tranzitivní, jestliže pro libovolné $p_1, p_2 \in \mathcal{Q}$ existuje $g \in G$ tak, že $p_1 = \Phi(g, p_2)$. Dva prvky levé G-variety $p_1, p_2 \in \mathcal{Q}$ nazveme ekvivalentními a značíme $p_1 \sim p_2$, jestliže existuje $g \in G$ tak, že $p_2 = \Phi(g, p_1)$. Třídu $[p] = \{q \in \mathcal{Q} \mid q \sim p\}$ nazýváme *orbitou* akce grupy G na varietě $\mathcal{Q}$ a množinu všech orbit značíme $\mathcal{Q}/G$. Nechť $\mathcal{Q}$ je levá resp. pravá G-varieta, $m = \dim \mathcal{Q}$. Souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ na $\mathcal{Q}$ se nazývá *G-asociovaný*, jestliže existuje číslo n, $1 \leq n \leq m$, tak, že pro každé $p, q \in \mathcal{V}$ platí: $y^i(p) = y^i(q)$ $\forall i = \{1, \ldots, n\}$ právě tehdy když $[p] = [q]$. Poznamenejme, že pro každé dva G-asociované souřadnicové systémy $(\mathcal{V}, \psi)$, $(\mathcal{V}', \psi')$ na libovolné souvislé komponentě variety $\mathcal{Q}$ platí $n = n'$. Množinu $\mathcal{W} \subset \mathcal{Q}$ nazveme *G-invariantní*, jestliže pro každé $g \in G$ a každé $w \in \mathcal{W}$ platí $\Phi(g, w) \in \mathcal{W}$ resp. $\Phi(w, g) \in \mathcal{W}$.

Věta 1.3 *Nechť $\mathcal{Q}$ je souvislá levá resp. pravá G-varieta, $\pi_0 : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}/G$ kanonická projekce na množinu orbit. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1) Na množině $\mathcal{Q}/G$ existuje struktura hladké variety taková, že π_0 je submerze.

2) Množina $R = \{(p_1, p_2) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} | [p_1] = [p_2]\}$ je uzavřenou podvarietou $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$.

3) $\mathcal{Q}$ lze pokrýt G-asociovanými souřadnicovými systémy a pro každé $p, q \in \mathcal{Q}$ takové, že $[p] \neq [q]$, existují G-invariantní otevřené množiny $\mathcal{W}_p$, $\mathcal{W}_q$ tak, že $p \in \mathcal{W}_p$, $q \in \mathcal{W}_q$ a $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{W}_q = \emptyset$.

Důkaz: Předchozí tvrzení je standardně uváděno v literatuře. Jeho důkaz lze nalézt např. v [8].

♡

Jsou-li splněny ekvivalentní podmínky věty 1.3, je hladká struktura na $\mathcal{Q}/G$ splňující první podmínku určena jednoznačně. Množinu $\mathcal{Q}/G$ opatřenou touto hladkou strukturou nazýváme *varietou orbit (příslušnou levé* resp. *pravé G-varietě $\mathcal{Q}$).*

Pravým hlavním G-prostorem nad varietou $\mathcal{X}$ nazveme čtveřici $(\mathcal{P}, G, \pi, \mathcal{X})$, kde $\mathcal{P}$ je pravá G varieta s akcí $\Phi : \mathcal{P} \times G \to \mathcal{P}$, $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{X}$ je hladké zobrazení a platí:

1) akce G na $\mathcal{P}$ je volná,

2) $\pi(p_1) = \pi(p_2) \Leftrightarrow [p_1] = [p_2]$ pro libovolné $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$,

3) Rozvrstvení $\mathcal{P}$ nad $\mathcal{X}$ je lokálně triviální, tj. existuje otevřené pokrytí $\mathcal{U}_i, i \in I$, variety $\mathcal{X}$ a difeomorfismy $\psi_i : \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_i \times G$ tak, že následující diagramy komutují:

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{U}_i \times G \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
\mathcal{U}_i \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathcal{U}_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\Phi_g"] & \mathcal{U}_i \times G \arrow[d, "\mathrm{id}\times R_g"] \\
\pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[r, "\psi_i"] & \mathcal{U}_i \times G
\end{tikzcd}
$$

pr_1 je projekce na první faktor, $g \in G$ je libovolné, $\Phi_g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ je zobrazení definované vztahem $\Phi_g(p) = \Phi(p,g)\ \forall p \in \mathcal{P}$ a $R_g : G \ni h \to h \cdot g \in G$ je pravá translace grupy G.

Nechť $\mathcal{P}$ je pravý hlavní G-prostor nad $\mathcal{X}$, $\mathcal{Q}$ levá G-varieta. Vztah $(p,q)\cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot q)$ definuje na množině $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ strukturu pravé G-variety, která splňuje ekvivalentní podmínky věty 1.3. Množinu orbit této akce opatřenou strukturou orbitvariety značíme $\mathcal{P} \times_G \mathcal{Q}$. Definujme zobrazení $\pi_{\mathcal{Q}}$ následujícím diagramem

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \times \mathcal{Q} \arrow[r, "\pi_q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \mathcal{P} \times_G \mathcal{Q} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{Q}}"] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}
$$

kde π_q je faktorová projekce a pr_1 je projekce na první faktor. Soubor $(\mathcal{P} \times_G \mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}, \mathcal{X}, \mathcal{Q}, G)$ nazýváme *fibrovaný prostor s typovou vrstvou* $\mathcal{Q}$ *asociovaný s* $\mathcal{P}$. Dále budeme také užívat značení $\mathcal{Q}(\mathcal{P})$.

1.3 Jety zobrazení a diferenciální grupa L^r_n

Nechť $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) jsou variety dimenze n (resp. m). Zobrazení $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, třídy C^∞ nazveme *r-ekvivalentními v bodě* $x \in \mathcal{X}$, jestliže existují souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi), \varphi = (x^i), i = 1, \dots, n$, na $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V}, \psi), \psi = (y^\sigma), \sigma = 1, \dots, m$, na $\mathcal{Y}$, takové, že platí:

$$x \in \mathcal{U}, \quad f(x) = g(x) \in \mathcal{V},$$

$$D^k_{i_1 \dots i_k}(\psi f \varphi^{-1})(\varphi(x)) = D^k_{i_1 \dots i_k}(\psi g \varphi^{-1})(\varphi(x)) \tag{1.5}$$

pro $1 \le k \le r, 1 \le i_1, \dots, i_k \le n$. (Pro $k = 1$ píšeme jen D_{i_1}.) Tato relace je zjevně relací ekvivalence. *r-jetem* zobrazení f v bodě $x \in \mathcal{X}$ nazveme třídu uvedené ekvivalence obsahující zobrazení f a označujeme $J^r_x f$. Tedy $J^r_x f = \{g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \mid g$ je r-ekvivalentní s f v bodě $x\}$. Nechť $F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je množina všech zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ třídy C^∞. Dále označíme:

$$J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{J^r_x f \mid (f \in F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) \wedge (f(x) = y)\},$$

$$J^r_x(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

$$J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} J^r_x(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

$$T^r_n \mathcal{Y} = J^r_0(\mathcal{R}^n, \mathcal{Y}) = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} J^r_{(0,y)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{Y}).$$

r-jet $J^r_x f$ nazveme *regulární*, je-li hodnost Jacobiho matice $D\psi f \varphi^{-1}(\varphi(x))$ maximální. Množinu všech regulárních jetů z $J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ označujeme $\mathrm{Imm} J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Tato množina je uzavřená vzhledem k operaci skládání jetů.

Množina $L^r_n = \mathrm{Imm} J^r_{0,0}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ uvažovaná s hladkou strukturou danou kanonickým globálním souřadnicovým systémem a se strukturou grupy danou skládáním jetů je Lieovou grupou. Nazýváme ji *diferenciální grupa.*

Příklad 1: Nechť $\mathcal{X}$ je n-rozměrná varieta. Množina $\mathcal{F}^r\mathcal{X} = \mathrm{Imm}J_0^r(\mathbf{R}^n, \mathcal{X})$ s pravou akcí grupy L_n^r danou vztahem

$$\mathrm{Imm}J_0^r(\mathbf{R}^n, \mathcal{X}) \times L_n^r \ni (j_0^r\xi, j_0^r\alpha) \to j_0^r(\xi \circ \alpha) \in \mathrm{reg}J_0^r(\mathbf{R}^n, \mathcal{X})$$

tvoří pravý hlavní L_n^r prostor nad varietou $\mathcal{X}$, který nazýváme *fibrovaný prostor r-bází na $\mathcal{X}$*.

Označme:

$$\pi_n^r : L_n^r \to L_n^1$$

kanonickou projekci a

$$i_n^r : L_n^1 \to L_n^r$$

kanonické vložení. Tato zobrazení jsou homomorfismy Lieových grup.

Označme

$$a^i_{j_1\ldots j_k} = a^i_{j_1\ldots j_k}(j_0^r\alpha) = D^k_{j_1,\ldots j_k}\alpha^i,$$

kde $1 \leq k \leq r$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_k \leq n$, kanonické souřadnice na L_n^r. V těchto souřadnicích mají zobrazení π_n^r a i_n^r vyjádření:

$$\pi_n^r : (a^i_j, \ldots, a^i_{j_1\ldots j_r}) \to (a^i_j),$$

$$i_n^r : (a^i_j) \to (a^i_j, 0, \ldots, 0).$$

Označme

$$K_n^r = \ker\pi_n^r$$

jádro homomorfismu π_n^r. K_n^r je normální Lieovou podgrupou Lieovy grupy L_n^r, $H_n^r = i_n^r(L_n^1)$ je Lieovou podgrupou Lieovy grupy L_n^r izomorfní s L_n^1. Izomorfismus je dán vztahem $\kappa_n^r : i_n^r(L_n^1) \ni (a^i_j, 0, \ldots, 0) \to (a^i_j) \in L_n^1$.

Věta 1.4 *Diferenciální grupa L_n^r je vnitřním semidirektním součinem Lieových podgrup $i_n^r(L_n^1)$ a K_n^r.*

Důkaz: Z definice homomorfismů π_n^r a i_n^r je bezprostředně zřejmé, že podgrupy K_n^r a H_n^r Lieovy grupy L_n^r splňují požadavky 1)–3) semidirektního součinu a zobrazení $\beta \times \alpha : L_n^r \to L_n^r$, kde β a α jsou zobrazení určená jednoznačným rozkladem prvku semidirektního součinu, je izomorfismus Lieových grup (viz též [8]).

♡

Analogicky označme $\pi^{r,s} : L_n^r \to L_n^s$ kanonickou projekci a $i_n^{s,r} : L_n^s \to L_n^r$ kanonické vložení, kde $1 \leq s \leq r$. Platí:

$$\pi_n^{r,s} : L_n^r \ni (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_r}^i) \to (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_s}^i) \in L_n^s,$$

$$i_n^{s,r} : L_n^s \ni (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_s}^i) \to (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_s}^i, 0, \dots, 0) \in L_n^r.$$

Pro $s > 1$ však zobrazení $i_n^{s,r}$ obecně není homomorfismem. Pro $s = 1$ je $\pi_n^{r,s} = \pi_n^r$ a $i_n^{s,r} = i_n^r$.

Označme

$$K_n^{r,s} = \mathrm{ker}\pi_n^{r,s}.$$

Množina $K_n^{r,s}$ je normální podgrupou grupy L_n^r, neboť je jádrem grupového homomorfismu.

Věta 1.5 *Faktorová grupa $L_n^r/K_n^{r,s}$, $r \geq s$ je izomorfní s grupou L_n^s.*

Důkaz: Dokážeme, že zobrazení $\kappa : L_n^s \to L_n^r/K_n^{r,s}$ definované vztahem $\kappa = \beta \circ i_n^{s,r}$, kde $\beta : L_n^r \to L_n^r/K_n^{r,s}$ je faktorová projekce, je isomorfismus. Platí $\kappa(j_0^s\alpha) \cdot \kappa(j_0^s\beta) = \beta(i_n^{s,r}(j_0^s\alpha)) \cdot \beta(i_n^{s,r}(j_0^s\beta)) = [j_0^r\alpha]_{K_n^{r,s}} \cdot [j_0^r\beta]_{K_n^{r,s}} = [j_0^r(\alpha \circ \beta)]_{K_n^{r,s}} = \kappa(j_0^s(\alpha \circ \beta)) = \kappa(j_0^s\alpha \cdot j_0^s\beta)$, zobrazení κ je tedy homomorfismus. Předpokládejme, že $\kappa(j_0^s\alpha) = \kappa(j_0^s\beta)$, pak $[j_0^r\alpha]_{K_n^{r,s}} = [j_0^r\beta]_{K_n^{r,s}}$ a existuje tedy prvek $j_0^r k \in K_n^{r,s}$ takový, že $j_0^r\alpha = j_0^r k \cdot j_0^r\beta$. Odtud vyplývá rovnost $j_0^s\alpha = j_0^s\beta$, neboť $\pi_0^{r,s}(j_0^r k) = j_0^s \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$. Zobrazení κ je tedy injektivní. Surjektivnost zobrazení je zřejmá, neboť $\kappa^{-1}[j_0^r\alpha]_{K_n^{r,s}} = j_0^s\alpha$.

♡

Diferenciálním invariantem nazýváme zobrazení L z levé L_n^r-variety $\mathcal{Q}$ do levé L_n^s-variety $\mathcal{P}$, $r \geq s$, splňující podmínku

$$L(j_0^r\alpha \cdot q) = \pi_n^{r,s}(j_0^r\alpha) \cdot L(q)$$

pro všechna $q \in \mathcal{Q}$ a všechna $j_0^r\alpha \in L_n^r$.

1.4 Tenzorová akce grupy L^1_n

Nechť a^i_j jsou kanonické souřadnice na L^1_n, souřadnice b^i_j definujme vztahem

$$b^i_j(J^1_0\alpha) = a^i_j(J^1_0\alpha^{-1}).$$

Dále zkráceně $A = (a^i_j(J^1_0\alpha)) = (a^i_j)$, horní index je řádkový.

Uvažujme množinu $\mathbf{R}^n$ s přirozenou strukturou hladké variety, přirozenou strukturou vektorového prostoru a působením grupy L^1_n daným v kanonických souřadnicích takto:

$$L^1_n \times \mathbf{R}^n \ni (A,\xi) \to \bar{\xi} = A \cdot \xi = (a^j_i \xi^i) \in \mathbf{R}^n, \tag{1.6}$$

kde $\xi = (\xi^i)$ resp. $\bar{\xi} = (\bar{\xi}^i)$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Zřejmě platí $(\tilde{A}\cdot(A\cdot\xi))^j = \tilde{a}^j_i a^i_k \xi^k = ((\tilde{A}A)\cdot\xi)^j$, vztah (1.6) definuje levou akci L^1_n na $\mathbf{R}^n$.

Uvažujme množinu všech lineárních zobrazení $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, označovanou $\mathbf{R}^{n*}$ s přirozenou strukturou hladké variety, přirozenou strukturou vektorového prostoru a působením grupy L^1_n:

$$L^1_n \times \mathbf{R}^{n*} \ni (A,\omega) \to A\cdot\omega \in \mathbf{R}^{n*}$$

definovaným požadavkem

$$(A\cdot\omega)(A\cdot\xi) = \omega(\xi) \tag{1.7}$$

pro každé $\omega = (\omega_i) \in \mathbf{R}^{n*}$, $\xi = (\xi^i) \in \mathbf{R}^n$. V kanonických souřadnicích můžeme vztah (1.7) zapsat následovně:

$$L^1_n \times \mathbf{R}^{n*} \ni (A,\omega) \to \bar{\omega} = A\cdot\omega = (b^i_j\omega_i) \in \mathbf{R}^{n*}.$$

Zřejmě platí $(\tilde{A}\cdot(A\cdot\omega))_j = \tilde{b}^i_j b^k_i \omega_k = ((\tilde{A}A)\cdot\omega)_j$, vztah (1.7) definuje levou akci grupy L^1_n na $\mathbf{R}^{n*}$.

Uvažujme množinu $Q^p_q(n) = \otimes^p\mathbf{R}^{n*} \otimes^q \mathbf{R}^n$ všech zobrazení

$$\tau : \times^p\mathbf{R}^n \times^q \mathbf{R}^{n*} \to \mathbf{R}$$

lineárních ve všech argumentech s přirozenou strukturou hladké variety, přirozenou strukturou vektorového prostoru a působením grupy L^1_n daným požadavkem

$$(A \cdot \tau)(A \cdot \xi_1, \ldots, A \cdot \xi_p, A \cdot \omega_1, \ldots, A \cdot \omega_q) = \tau(\xi_1, \ldots, \xi_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) \quad (1.8)$$

pro libovolné $\omega_1, \ldots, \omega_q \in \mathbf{R}^{n*}$ a libovolné $\xi_1, \ldots, \xi_p \in \mathbf{R}^n$. V kanonických souřadnicích pak dostáváme

$$L^1_n \times Q^p_q(n) \ni (A, \tau) \to \overline{\tau} = A \cdot \tau =$$

$$= (\overline{\tau}^{l_1 \ldots l_q}_{k_1 \ldots k_p}) = (b^{i_1}_{k_1} \ldots b^{i_p}_{k_p} a^{l_1}_{j_1} \ldots a^{l_q}_{j_q} \tau^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}) \in Q^p_q(n).$$

Vztah (1.8) definuje levou akci grupy L^1_n na $\otimes^p \mathbf{R}^{n*} \otimes^q \mathbf{R}^n$. Akce grupy L^1_n definované v tomto odstavci nazýváme *tenzorové*. Dále označme $\mathrm{Met}\mathbf{R}^n = \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*})$ podmnožinu množiny $Q^2_0(n)$ všech symetrických bilineárních a regulárních (tj. splňujících podmínku $f(\xi, \zeta) = 0 \; \forall \, \xi \in \mathbf{R}^n \;\Rightarrow\; \zeta = 0_{\mathbf{R}^n}$) zobrazení $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Ukážeme, že je invariantní vůči tenzorové akci grupy L^1_n.
Symetrie:
Nechť $\tau \in \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*})$ libovolné, pak

$$\tau(\xi, \zeta) = \tau(\zeta, \xi) \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbf{R}^n \Rightarrow$$

$$(A \cdot \tau)(\xi, \zeta) = \tau(A^{-1} \cdot \xi, A^{-1} \cdot \zeta) = \tau(A^{-1} \cdot \zeta, A^{-1} \cdot \xi) = (A \cdot \tau)(\zeta, \xi).$$

Regulárnost:
Předpokládejme, že $(A \cdot \tau)(\xi, \zeta) = 0$ pro jisté $\zeta \neq 0_{\mathbf{R}^n}$ a všechna $\xi \in \mathbf{R}^n$. Pak $\tau(\xi, A^{-1} \cdot \zeta) = 0$ pro všechna $\xi \in \mathbf{R}^n$. Vzhledem k tomu, že $A^{-1} \cdot \zeta \neq 0_{\mathbf{R}^n}$ dostáváme spor s regulárností τ. Platí tedy implikace

$$\tau \in \mathrm{Met}\mathbf{R}^n \Rightarrow (A \cdot \tau) \in \mathrm{Met}\mathbf{R}^n$$

pro všechna $A \in L^1_n$. Množina $\mathrm{Met}\mathbf{R}^n$ s indukovanou topologií a hladkou strukturou je levou L^1_n-varietou.

Poznámka: Podobně můžeme ukázat, že prostor $P_n \subset (\mathbf{R}^{n*} \wedge \mathbf{R}^{n*}) \otimes (\mathbf{R}^{n*} \wedge \mathbf{R}^{n*})$ zobrazení $\tau : \times^4 \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ antisymetrických v prvních dvou argumentech, antisymetrických v posledních dvou argumentech a symetrických vůči záměně první a druhé dvojice argumentů, navíc splňujících v kanonických souřadnicích rovnost $\tau_{ijkl} + \tau_{iljk} + \tau_{iklj} = 0$ je invariantní vůči tenzorové akci grupy L^1_n. P_n s indukovanou topologií a hladkou strukturou je levou L^1_n-varietou.

Poznámka: Analogicky můžeme definovat tenzorové akce grupy G na prostorech zobrazení $P \to \mathbf{R}$, kde P je kartézským součinem konečného počtu vektorových $\mathbf{R}$-prostorů různých dimenzí $d_1, \ldots, d_k$ a $G = L^1_{d_1} \times \ldots \times L^1_{d_k}$.

Nechť $Q = Q^{p_1}_{q_1}(d_1) \otimes \ldots \otimes Q^{p_k}_{q_k}(d_k)$ je množina zobrazení:

$$\tau : (\times^{p_1} \mathbf{R}^{d_1} \times^{q_1} \mathbf{R}^{d_1 *} \times \ldots \times^{p_k} \mathbf{R}^{d_k} \times^{q_k} \mathbf{R}^{d_k *}) \to \mathbf{R}$$

lineárních ve všech argumentech s přirozenou strukturou hladké variety a přirozenou strukturou vektorového prostoru. Tenzorovou akci grupy G pak definujeme požadavkem

$$\begin{aligned}((A_1, \ldots, A_k) \cdot \tau)(A_1 \cdot \xi^1_1, \ldots, A_1 \cdot \xi^1_{p_1}, A_1 \cdot \omega^1_1, \ldots, A_1 \cdot \omega^1_{q_1}, \ldots,\\ \ldots, A_k \cdot \xi^k_1, \ldots, A_k \cdot \xi^k_{p_k}, A_k \cdot \omega^k_1 \ldots, A_k \cdot \omega^k_{q_k}) =\\ = \tau((\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{p_1}, \omega^1_1, \ldots, \omega^1_{q_1}, \ldots, \xi^k_1, \ldots, \xi^k_{p_k}, \omega^k_1, \ldots, \omega^k_{q_k})\end{aligned}$$

pro každé $(A_1, \ldots, A_k) \in G$ a každé $\omega^j_{i_j} \in \mathbf{R}^{d_j *}, \xi^j_{k_j} \in \mathbf{R}^{d_j}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i_j \leq q_j$, $1 \leq k_j \leq p_j$. Souřadnicová vyjádření, definice symetrie a regularity jsou analogické.

1.5 Prodloužení tenzorové akce

Nechť $Q = Q^p_q(n)$ je prostor s tenzorovou akcí grupy L^1_n. *r-tým prodloužením* tohoto prostoru nazveme prostor $T^r_n Q = J^r_0(\mathbf{R}^n, Q)$ s akcí grupy L^{r+1}_n:

$$L^{r+1}_n \times Q \ni (j^{r+1}_0 \alpha, j^r_0 q) \to j^{r+1}_0 \alpha \cdot j^r_0 q = j^r_0 (j^1_0 \alpha \cdot q) \in T^r_n Q, \qquad (1.9)$$

kde $j_0^1\alpha \cdot q$ je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do Q definované vztahem $(j_0^1\alpha \cdot q)(x) = j_0^1(t_x \alpha t_{-\alpha^{-1}(x)}) \cdot q(\alpha^{-1}(x))$, ve kterém násobením na pravé straně rozumíme tenzorovou akci grupy L_n^1 na Q, $t_y : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ je translace, která bodu $y \in \mathbf{R}^n$ přiřadí bod $0_{\mathbf{R}^n}$. Platí

$$j_0^{r+1}\alpha \cdot (j_0^{r+1}\beta \cdot j_0^r q) = j_0^{r+1}\alpha \cdot [j_0^r(j_0^1\beta \cdot q)] = j_0^r[j_0^1\alpha \cdot (j_0^1\beta \cdot q)]$$

$$j_0^r[(j_0^1\alpha \circ j_0^1\beta) \cdot q] = (j_0^{r+1}\alpha \circ j_0^{r+1}\beta) \cdot q,$$

neboť

$$j_0^1\alpha \cdot (j_0^1\beta \cdot q)(x) = j_0^1(t_x \alpha t_{-\alpha^{-1}(x)}) \cdot (j_0^1\beta \cdot q)(\alpha^{-1}(x)) =$$

$$= j_0^1(t_x \alpha t_{-\alpha^{-1}(x)}) \cdot [j_0^1(t_{\alpha^{-1}(x)} \beta t_{-\beta^{-1}(\alpha^{-1}(x))}) \cdot q(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(x))] =$$

$$= j_0^1(t_x(\alpha \circ \beta) t_{-(\alpha \circ \beta)^{-1}(x)}) \cdot q((\alpha \circ \beta)^{-1}(x)).$$

Jde tedy o levou akci.

Poznámka: Všimněme si fibrovaného prostoru $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times_{L_n^{r+1}} T_n^r Q_q^p(n)$ s typovou vrstvou $T_n^r Q_q^p(n)$ asociovaného s $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}$. Nechť $\mathcal{X}$ je n-rozměrná varieta, $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ jsou souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$ a $x \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$. Zobrazení $\varphi \circ \overline{\varphi}^{-1} : \overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}}) \to \varphi(\mathcal{U})$ je difeomorfismus. Označme

$$\begin{aligned} \zeta_x^r &= j_0^r(\varphi^{-1} t_{-\varphi(x)}), \\ \overline{\zeta}_x^r &= j_0^r(\overline{\varphi}^{-1} t_{-\overline{\varphi}(x)}), \end{aligned}$$

$\zeta_x^r, \overline{\zeta}_x^r \in \mathrm{Imm} J_0^r(\mathbf{R}^n, \mathcal{X})$. Platí

$$\overline{\zeta}_x^r = j_0^r(\varphi^{-1} t_{-\varphi(x)} t_{\varphi(x)} \varphi \overline{\varphi}^{-1} t_{-\overline{\varphi}(x)}) = \zeta_x^r \circ j_0^r(t_{\varphi(x)} \varphi \overline{\varphi}^{-1} t_{-\overline{\varphi}(x)}).$$

Označme $\alpha_x(y) = t_{\varphi(x)} \varphi \overline{\varphi}^{-1} t_{-\overline{\varphi}(x)}(y)$. Toto zobrazení přiřadí bodu $0_{\mathbf{R}^n}$ bod $0_{\mathbf{R}^n}$ a jeho derivace v nule jsou stejné, jako derivace difeomorfismu $\varphi\overline{\varphi}^{-1}$ v bodě $\overline{\varphi}(x)$. Dále označme $A^r_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x} = j_0^r \alpha_x$, $A^r_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x} \in L_n^r$. Uvažujme tenzorové rozvrstvení $\otimes_q^p \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ typu (p, q) na varietě $\mathcal{X}$. Nechť $\tau : \mathcal{X} \to \otimes_q^p \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ je hladké tenzorové pole definované na $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$, $\tau_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q}$ resp.

$\overline{\tau}^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n$, jsou složky tohoto tenzorového pole v bodě x v asociovaném souřadnicovém systému $(\mathcal{U}^p_q, \varphi^p_q)$ resp. $(\overline{\mathcal{U}}^p_q, \overline{\varphi}^p_q)$ na $\otimes^p_q \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Pro složky platí transformační vztah

$$\overline{\tau} = (A^1_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x})^{-1} \cdot \tau,$$

kde násobením rozumíme tenzorovou akci. Tenzorové rozvrstvení lze tedy chápat jako fibrovaný prostor s typovou vrstvou $Q^p_q(n)$ asociovaný s $\mathcal{F}^1\mathcal{X}$. Označme $\tau^{i_1,\ldots,i_q}_{j^1,\ldots,j_p,k_1,\ldots,k_s}$ resp. $\overline{\tau}^{i_1,\ldots,i_q}_{j^1,\ldots,j_p,k_1,\ldots,k_s}$, $1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_s \leq n, 1 \leq s \leq r$, soubory derivací (do řádu r včetně) souřadnicového vyjádření v asociovaném souřadnicovém systému $(\mathcal{U}^p_q, \varphi^p_q)$ resp. $(\overline{\mathcal{U}}^p_q, \overline{\varphi}^p_q)$ tenzorového pole τ v bodě $\varphi(x)$ resp. $\overline{\varphi}(x)$. Soubory těchto čísel určují prvky $\overline{\tau}^r_x, \tau^r_x \in T^r_n(Q^p_q(n))$ $= J^r_0(\mathbf{R}^n, Q^p_q(n))$ a platí

$$\overline{\tau}^r_x = (A^{-1})^{r+1}_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x} \cdot \tau^r_x,$$

kde násobením rozumíme prodloužení tenzorové akce definované vztahem (1.9). Tímto získává struktura $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times_{L^{r+1}_n} T^r_n Q^p_q(n)$ názorný geometrický význam: Dvojice $[\tau^r_x, \zeta^r_x]$ a $[\overline{\tau}^r_x, \overline{\zeta}^r_x]$ nazveme ekvivalentními, jestliže existuje prvek $A \in L^{r+1}_n$ tak, že $\overline{\tau}^r_x = A^{-1} \cdot \tau^r_x$ a $\overline{\zeta}^r_x = \zeta^r_x \circ A$, tj., reprezentují-li soubory τ^r_x resp. $\overline{\tau}^r_x$ tentýž r-jet tenzorového pole v souřadnicových systémech $(\mathcal{U}^p_q, \varphi^p_q)$ resp. $(\overline{\mathcal{U}}^p_q, \overline{\varphi}^p_q)$.

1.6 Tenzorový součin modulů

V tomto odstavci zobecníme pojem tenzorového součinu modulů pro případ dvou modulů nad obecně různými okruhy. Nechť V_1 je modul nad okruhem R_1 resp. V_2 je modul nad okruhem R_2. Uvažujme libovolný homomorfismus okruhů $F : R_2 \to R_1$. *Tenzorovým součinem modulů V_1 a V_2 asociovaným s homomorfismem F* nazýváme modul $V_1 \otimes_F V_2$ nad okruhem R_1 společně se zobrazením $\otimes_F : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes_F V_2$ s vlastnostmi

1) $\otimes_F$ je R_1-lineární v prvním argumentu,

2) $v_1 \otimes_F (av_2 + bu_2) = F(a)(v_1 \otimes_F v_2) + F(b)(v_1 \otimes_F u_2)$ pro všechna $a, b \in R_2, v_1 \in V_1, v_2, u_2 \in V_2$,

3) *univerzální vlastnost*: buď W libovolný R_1-modul a $k : V_1 \times V_2 \to W$ libovolné zobrazení R_1-lineární v prvním argumentu a splňující $k(v_1, av_2 + bu_2) = F(a)k(v_1, v_2) + F(b)k(v_1, u_2)$, pro všechna $a, b \in R_2, v_1 \in V_1, v_2, u_2 \in V_2$, pak existuje jediné R_1-lineární zobrazení $\tilde{k} : V_1 \otimes_F V_2 \to W$ tak, že následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\otimes_F"] \arrow[dr, "k"'] & V_1 \otimes_F V_2 \arrow[d, "\tilde{k}"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

Tenzorový součin $V_1 \otimes_F V_2$ je určen jednoznačně až na izomorfismus.

Příklad 2: Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření dvou hladkých variet. Nechť $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ je $C^\infty(\mathcal{X})$-modul vektorových polí na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ je $C^\infty(\mathcal{Y})$-modul vektorových polí na $\mathcal{Y}$. Zobrazení $f^* : C^\infty(\mathcal{Y}) \to C^\infty(\mathcal{X})$ dané vztahem $f^*\alpha = \alpha \circ f$ je homomorfismem okruhů. Můžeme tedy definovat tenzorový součin $\mathcal{Z}(\mathcal{X}) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$.

Tento $C^\infty(\mathcal{X})$-modul je volný a jeho báze (použijeme-li lokálních souřadnic) je tvořena prvky tvaru $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes_{f^*} \frac{\partial}{\partial y^\sigma}$, kde $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i \in \{1, \ldots, \dim \mathcal{X}\}$ je lokální báze $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ resp. $\frac{\partial}{\partial y^\sigma}$, $\sigma \in \{1, \ldots, \dim \mathcal{Y}\}$ je lokální báze $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$. Prvek $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ lze chápat jako zobrazení, které bodu $x \in \mathcal{X}$ přiřadí tenzor z tenzorového prostoru $T_x\mathcal{X} \otimes T_{f(x)}\mathcal{Y}$ vztahem

$$u(x) = u^{i\sigma}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\right)_{f(x)}.$$

Kapitola 2

Diferenciální invarianty z vnoření variet s metrickými poli

V této kapitole zavedeme základní struktury, jejichž diferenciální invarianty budeme studovat. Definujeme pojem diferenciálního invariantu z vnoření variet s metrikou. Dále bude nalezena báze invariantů prvního řádu s hodnotami v levé $L_n^1 \times L_m^1$-varietě, báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $L_n^2 \times L_m^2$-varietě a báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $L_n^1 \times L_m^1$-varietě. V posledních odstavcích se zabýváme invarianty obecného řádu a odvodíme rekurentní vztah pro jejich výpočet. Zmíníme se také o geometrickém významu těchto nových výsledků.

2.1 Základní struktury

Uvažujme množinu $L_n^r \times L_m^r$ s grupovou operací danou vztahem $(j_0^r\alpha, j_0^r\gamma) \cdot (j_0^r\beta, j_0^r\delta) = (j_0^r(\alpha \circ \beta), j_0^r(\gamma \circ \delta))$, hladkou varietu $\mathcal{X}$ dimenze n resp. hladkou varietu $\mathcal{Y}$ dimenze m. Dále $\pi_{\mathcal{X}}$ resp. $\pi_{\mathcal{Y}}$ je projekce hlavního fibrovaného L_n^r-prostoru $\mathcal{F}^r\mathcal{X}$ resp. hlavního fibrovaného L_m^r-prostoru $\mathcal{F}^r\mathcal{Y}$ a $\pi_\mathcal{X} \times \pi_\mathcal{Y}(Z, W) = (\pi_\mathcal{X}(Z), \pi_\mathcal{Y}(W)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, pro $(Z, W) \in \mathcal{F}^r\mathcal{X} \times \mathcal{F}^r\mathcal{Y}$.

Věta 2.1 *Nechť $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ jsou hladké variety dimenze n resp. m. Čtveřice $(\mathcal{F}^r\mathcal{X} \times \mathcal{F}^r\mathcal{Y}, L_n^r \times L_m^r, \pi_\mathcal{X} \times \pi_\mathcal{Y}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ tvoří pravý hlavní $L_n^r \times L_m^r$-prostor nad varietou $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Důkaz: Označme $G = L_n^r \times L_m^r$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}^r\mathcal{X} \times \mathcal{F}^r\mathcal{Y}$, $\pi = \pi_\mathcal{X} \times \pi_\mathcal{Y}$. Akce grupy G na $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} \times G \ni (p, g) = [(j_0^r\xi, j_0^r\zeta), (j_0^r\alpha, j_0^r\gamma)] \to p \cdot g = (j_0^r(\xi \circ \alpha), j_0^r(\zeta \circ \gamma)) \in \mathcal{P}$$

je pravá, neboť zřejmě platí: $(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 \cdot g_2)$.

1. Akce L_n^r na $\mathcal{F}^r\mathcal{X}$ a L_m^r na $\mathcal{F}^r\mathcal{Y}$ jsou volné $\Rightarrow$ pro libovolné $p \in \mathcal{P}, g \in G : (p \cdot g = p \Rightarrow g = (j_0^r \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}, j_0^r \mathrm{id}_{\mathbf{R}^m}) = e)$, tedy akce G na $\mathcal{P}$ je volná.

2. Dokážeme, že $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P} : \pi(p_1) = \pi(p_2) \Leftrightarrow \exists g \in G$ tak, že $p_1 = p_2 \cdot g$.
$\Rightarrow$:
$p_1 = (p_{1_\mathcal{X}}, p_{1_\mathcal{Y}})$, $p_2 = (p_{2_\mathcal{X}}, p_{2_\mathcal{Y}})$, $\pi(p_1) = (\pi_\mathcal{X}(p_{1_\mathcal{X}}), \pi_\mathcal{Y}(p_{1_\mathcal{Y}})) = (\pi_\mathcal{X}(p_{2_\mathcal{X}}), \pi_\mathcal{Y}(p_{2_\mathcal{Y}})) = \pi(p_2)$. Existují prvky $g_\mathcal{X} \in L_n^r$ a $g_\mathcal{Y} \in L_m^r$ tak, že $p_{1_\mathcal{X}} = p_{2_\mathcal{X}} \cdot g_\mathcal{X}$ a $p_{1_\mathcal{Y}} = p_{2_\mathcal{Y}} \cdot g_\mathcal{Y}$. Pro $g = (g_\mathcal{X}, g_\mathcal{Y})$ platí $p_1 = p_2 \cdot g$.
$\Leftarrow$:
Nechť existuje $g = (g_\mathcal{X}, g_\mathcal{Y}) \in G$ pro které platí $p_1 = p_2 \cdot g$, pak $p_1 = (p_{1_\mathcal{X}}, p_{1_\mathcal{Y}}) = p_2 \cdot g = (p_{2_\mathcal{X}} \cdot g_\mathcal{X}, p_{2_\mathcal{Y}} \cdot g_\mathcal{Y})$ a tedy $\pi(p_1) = \pi(p_2)$.

3. Dokážeme, že rozvrstvení $\mathcal{P}$ nad $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ je lokálně triviální. Vzhledem k lokální triviálnosti rozvrstvení $\mathcal{F}^r\mathcal{X}$ nad $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{F}^r\mathcal{Y}$ nad $\mathcal{Y}$ existuje pro každý bod $x \in \mathcal{X}$ okolí $\mathcal{U}_\mathcal{X}$ a difeomorfismus $\Psi_\mathcal{X} : \pi_\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{X}) \to \mathcal{U}_\mathcal{X} \times L_n^r$ splňující pro každé $p_\mathcal{X} \in \pi_\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{X})$ podmínku $\Psi_\mathcal{X}(p_\mathcal{X}) = (\pi_\mathcal{X}, \eta_\mathcal{X}(p_\mathcal{X}))$, $\Psi_\mathcal{X}(p_\mathcal{X} \cdot g_\mathcal{X}) = (\pi_\mathcal{X}, \eta_\mathcal{X}(p_\mathcal{X}) \cdot g_\mathcal{X})$ resp. pro každý bod $y \in \mathcal{Y}$ okolí $\mathcal{U}_\mathcal{Y}$ a difeomorfismus $\Psi_\mathcal{Y} : \pi_\mathcal{Y}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{Y}) \to \mathcal{U}_\mathcal{Y} \times L_m^r$ splňující pro každé $p_\mathcal{Y} \in \pi_\mathcal{Y}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{Y})$ podmínku $\Psi_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y}) = (\pi_\mathcal{Y}, \eta_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y}))$, $\Psi_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y} \cdot g_\mathcal{Y}) = (\pi_\mathcal{Y}, \eta_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y}) \cdot g_\mathcal{Y})$. Pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ pak existuje okolí $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\mathcal{X} \times \mathcal{U}_\mathcal{Y}$ a difeomorfismus $\Psi = \Psi_\mathcal{X} \times \Psi_\mathcal{Y} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times G$ s požadovanou vlastností.

♡

Věta 2.2 *Množina* $H = i_n^r(L_n^1) \times i_m^r(L_m^1)$ *je Lieovou podgrupou grupy* $G = L_n^r \times L_m^r$*, množina* $K = K_n^r \times K_m^r$ *je její normální Lieovou podgrupou. Lieova grupa* G *je vnitřním semidirektním součinem Lieových podgrup* H *a* K.

Důkaz: Je zřejmé, že K a H jsou Lieovy podgrupy grupy G a platí $K \cap H = \{e\}$. Podgrupa K je normální, neboť je jádrem grupového homomorfismu $\pi_n^r \times \pi_m^r$. Nechť $g \in G$ je libovolný prvek. $\beta(g) = (i_n^r \times i_m^r)[(\pi_n^r \times \pi_m^r)(g)]$ a $\alpha(g) = g \cdot (i_n^r \times i_m^r)[((\pi_n^r \times \pi_m^r)(g))^{-1}]$, kde $\alpha : G \to K$ resp. $\beta : G \to H$ jsou zobrazení definovaná v kapitole 1.1. Platí $\alpha(g) \cdot \beta(g) = g$ a tedy $K \cdot H = G$. Zobrazení $\alpha \times \beta : G \to G$ je izomorfismem Lieových grup.

♡

Označme

$$Q_1 = \mathrm{Met}\mathbf{R}^n,$$

$$Q_2 = \mathrm{Met}\mathbf{R}^m.$$

Q_1 je levá L_n^1-varieta, Q_2 je levá L_m^1-varieta. Nechť

$$Q_3 = \mathrm{Imm}J^1_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

je množina s přirozenou strukturou hladké variety. Na této množině definujeme působení grupy $G = L_n^1 \times L_m^1$ vztahem

$$(L_n^1 \times L_m^1) \times Q_3 \ni ((A,C), j_0^1 f) \to (A,C) \cdot j_0^1 f = j_0^1(\gamma \circ f \circ \alpha^{-1}) \in Q_3,$$

kde $A = j_0^1\alpha, C = j_0^1\gamma$. Dokážeme, že se jedná o levou akci a že množina Q_3 je invariantní vůči působení grupy G:

$$(\tilde{A}, \tilde{C}) \cdot ((A,C) \cdot j_0^1 f) = (\tilde{A}, \tilde{C}) \cdot j_0^1(\gamma \circ f \circ \alpha^{-1}) =$$

$$j_0^1(\tilde{\gamma} \circ \gamma \circ f \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha}^{-1}) = (\tilde{A}A, \tilde{C}C) \cdot j_0^1 f.$$

Nechť $j_0^1 f \in Q_3$ je regulární jet, pak jet $j_0^1(\gamma \circ f \circ \alpha^{-1})$ je opět regulární pro libovolné $(j_0^1\alpha, j_0^1\gamma) \in (L_n^1 \times L_m^1)$.

Nechť $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ jsou hladké variety dimenze n resp. m, $n \leq m$, opatřené metrickými poli h resp. g. Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření.

Označme $\mathcal{R} = Q(\mathcal{F}^1\mathcal{X} \times \mathcal{F}^1\mathcal{Y})$ fibrovaný prostor s typovou vrstvou $Q = Q_1 \times Q_2 \times Q_3$ asociovaný s hlavním $(L^1_n \times L^1_m)$-prostorem $\mathcal{F}^1\mathcal{X} \times \mathcal{F}^1\mathcal{Y}$. Levá akce grupy $L^1_n \times L^1_m$ na typové vrstvě je dána vztahem:

$$\begin{aligned}(L^1_n \times L^1_m) \times Q \ni ((A, C), (h, g, j^1_0 f)) \to (A, C) \cdot (h, g, j^1_0 f) = \\ = (A \cdot h, C \cdot g, (A, C) \cdot j^1_0 f) \in Q.\end{aligned} \tag{2.1}$$

r-tým prodloužením prostoru $\mathcal{R}$ nazveme fibrovaný prostor $\mathcal{R}^r$ s typovou vrstvou $Q^r = T^r_n Q_1 \times T^r_m Q_2 \times \mathrm{Imm} J^{r+1}_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ asociovaný s hlavním $(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)$-prostorem $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}$. Levá akce grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$ na typové vrstvě je dána vztahem:

$$(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m) \times Q^r \ni ((A, C), h, g, j^{r+1}_0 f) \to (A, C) \cdot (h, g, j^{r+1}_0 f) =$$

$$= (A \cdot h, C \cdot g, (A, C) \cdot j^{r+1}_0 f) \in Q,$$

kde

$$L^{r+1}_n \times T^r_n Q_1 \ni (A, h) \to A \cdot h \in T^r_n Q_1$$

resp.

$$L^{r+1}_m \times T^r_m Q_2 \ni (C, g) \to C \cdot g \in T^r_m Q_2$$

je prodloužení tenzorové akce,

$$(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m) \times \mathrm{Imm} J^{r+1}_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \ni ((A, C), j^{r+1}_0 f) \to (A, C) \cdot j^{r+1}_0 f =$$

$$= j^{r+1}_0 (\gamma \circ f \circ \alpha^{-1}) \in \mathrm{Imm} J^{r+1}_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),$$

a $A = j^{r+1}_0 \alpha$, $C = j^{r+1}_0 \gamma$.

Nechť $\mathcal{P}$ je levá $(L^s_n \times L^s_m)$-varieta, $1 \leq s \leq r$. *Diferenciálním invariantem r-tého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v $\mathcal{P}$* nazveme zobrazení $F : Q^r \to \mathcal{P}$ s vlastností:

$$F((A, C) \cdot q) = (\pi^{r+1,s}_n A, \pi^{r+1,s}_m C) \cdot F(q)$$

pro všechna $q \in Q^r$ a všechna $(A, C) \in L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$.

2.2 Vnoření variet s metrikou

Nechť $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ jsou hladké variety dimenze n resp. m, $n \leq m$, s metrikou h resp. g, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření. Uvažujme souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi), (\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ na $\mathcal{X}$, $x \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$, resp. souřadnicové systémy $(\mathcal{V}, \psi)$, $(\overline{\mathcal{V}}, \overline{\psi})$, $y = f(x) \in \mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}}$, na $\mathcal{Y}$. Dále označujeme:

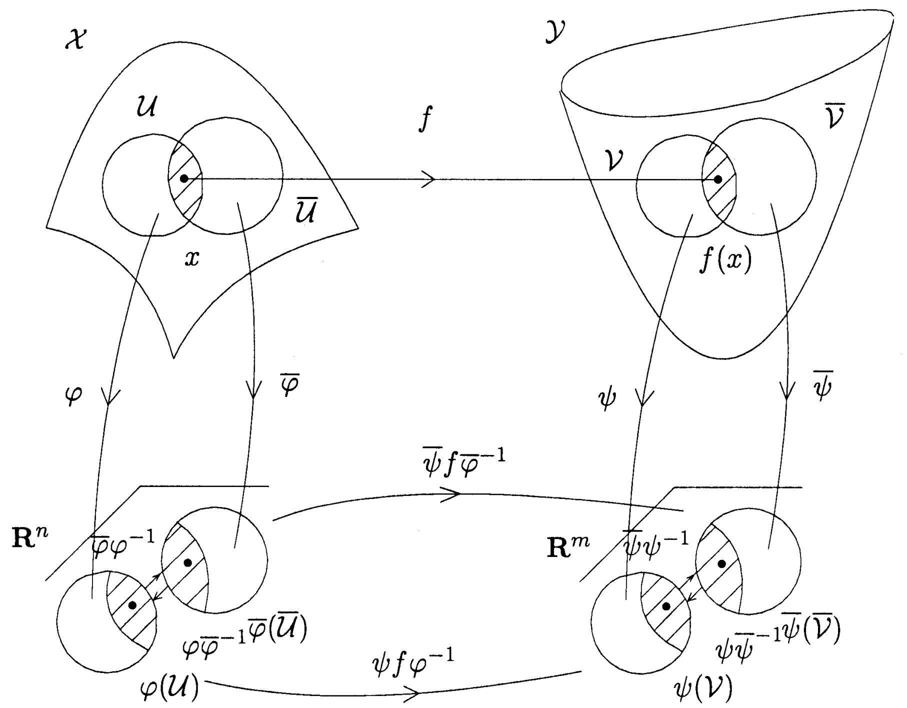
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x^1\varphi(x), \dots, x^n\varphi(x)), \\ \overline{\varphi}(x) &= (\overline{x}^1\overline{\varphi}(x), \dots, \overline{x}^n\overline{\varphi}(x)), \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} \psi(y) &= (y^1\psi(y), \dots, y^m\psi(y)), \\ \overline{\psi}(y) &= (\overline{y}^1\overline{\psi}(y), \dots, \overline{y}^m\overline{\psi}(y)). \end{aligned}$$

Souřadnicové přechody jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} \overline{x}^i\overline{\varphi}(x) &= \overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1}\varphi(x), & \overline{y}^\sigma\overline{\psi}(y) &= \overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1}\psi(y), \\ \overline{x}^i &= \overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n), & \overline{y}^\sigma &= \overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1}(y^1, \dots, y^m), \\ x^i\varphi(x) &= x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1}\overline{\varphi}(x), & y^\sigma\psi(y) &= y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1}\overline{\psi}(y), \\ x^i &= x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1}(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n), & y^\sigma &= y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1}(\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^m). \end{aligned}$$

Jacobiho matice souřadnicových přechodů jsou

$$\begin{aligned} &a^i_j(\overline{\varphi}(x)) = \mathrm{D}_j(x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x)), & &c^\sigma_\nu(\overline{\psi}(y)) = \mathrm{D}_\nu(y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1})(\overline{\psi}(y)), \\ &b^i_j(\varphi(x)) = \mathrm{D}_j(\overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1})(\varphi(x)), & &d^\sigma_\nu(\psi(y)) = \mathrm{D}_\nu(\overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1})(\psi(y)), \\ &1 \leq i, j \leq n, & &1 \leq \sigma, \nu \leq m. \end{aligned}$$

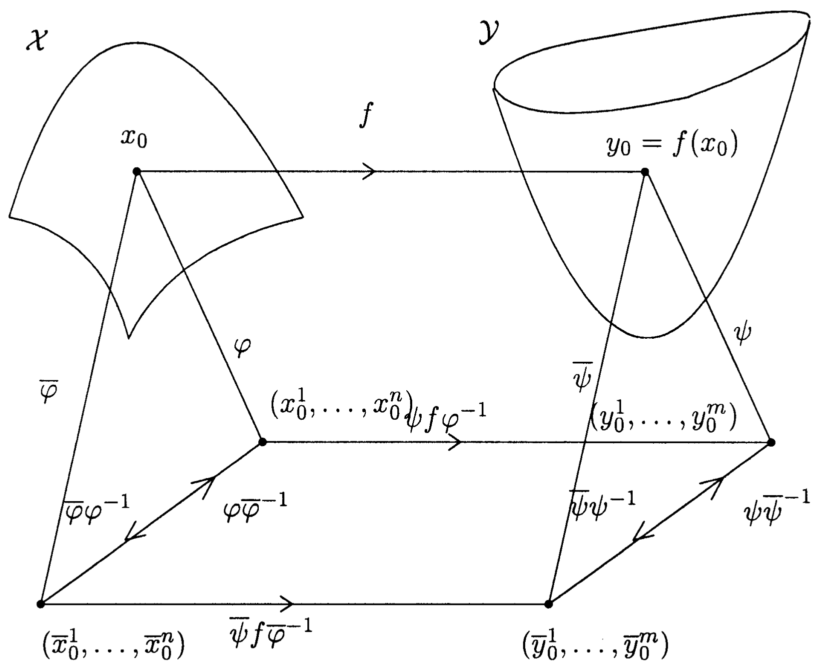


Označme

$$
\begin{aligned}
(x_0^1,\ldots,x_0^n) &= (x^1\varphi(x_0),\ldots,x^n\varphi(x_0)),\\
(\overline{x}_0^1,\ldots,\overline{x}_0^n) &= (\overline{x}^1\overline{\varphi}(x_0),\ldots,\overline{x}^n\overline{\varphi}(x_0)),\\
(y_0^1,\ldots,y_0^m) &= (y^1\psi(y_0),\ldots,y^m\psi(y_0)),\\
(\overline{y}_0^1,\ldots,\overline{y}_0^m) &= (\overline{y}^1\overline{\psi}(y_0),\ldots,\overline{y}^m\overline{\psi}(y_0)),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} x_0^i &= x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1}(\overline{x}_0^1,\dots,\overline{x}_0^n), & y_0^\sigma &= y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1}(\overline{y}_0^1,\dots,\overline{y}_0^m),\\ \overline{x}_0^i &= \overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1}(x_0^1,\dots,x_0^n), & \overline{y}_0^\sigma &= \overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1}(y_0^1,\dots,y_0^m), \end{aligned}$$

kde $y_0 = f(x_0)$.



Platí

$$\begin{aligned} y^\sigma &= y^\sigma\psi f\varphi^{-1}(x^1,\dots,x^n),\\ \overline{y}^\sigma &= \overline{y}^\sigma\overline{\psi}f\overline{\varphi}^{-1}(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n). \end{aligned}$$

Označme

$$f_i^\sigma = f_i^\sigma(x^1,\dots,x^n) = \mathrm{D}_i(y^\sigma\psi f\varphi^{-1})(x^1,\dots,x^n),$$

$$\overline{f}_i^\sigma = \overline{f}_i^\sigma(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n) = \mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma \overline{\psi} f \overline{\varphi}^{-1})(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n).$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}_i^\sigma(\overline{\varphi}(x_0)) &= \mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma \overline{\psi} f \overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma[(\overline{\psi}\psi^{-1} \circ (\psi f \varphi^{-1}) \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1})])(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_\nu(\overline{y}^\sigma \overline{\psi}\psi^{-1})(\psi(y_0)) \cdot \mathrm{D}_j(y^\nu \psi f \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \times \\
&\quad \times \mathrm{D}_i(x^j \varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0)), \\
\overline{f}_i^\sigma(\overline{\varphi}(x_0)) &= d_\nu^\sigma(\psi(f(x_0))) \cdot f_j^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_i^j(\overline{\varphi}(x_0)).
\end{aligned}$$

Označme

$$f_{ij}^\sigma = f_{ij}^\sigma(x^1, \ldots, x^n) = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(y^\sigma \psi f \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n),$$

$$\overline{f}_{ij}^\sigma = \overline{f}_{ij}^\sigma(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n) = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma \overline{\psi} f \overline{\varphi}^{-1})(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n).$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}_{ij}^\sigma(\overline{\varphi}(x_0)) &= \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma \overline{\psi} f \overline{\varphi}^{-1}))(\overline{\varphi}(x_0)) = \mathrm{D}_j(\overline{f}_i^\sigma)(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_j(d_\nu^\sigma \circ (\psi f \varphi^{-1}) \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot f_k^\nu \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot a_i^k)(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_j(d_\nu^\sigma(\psi f \varphi^{-1})(\varphi\overline{\varphi}^{-1}))(\overline{\varphi}(x_0)) \cdot f_k^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_i^k(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d_\nu^\sigma(\psi(y_0)) \cdot \mathrm{D}_j(f_k^\nu \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}))(\overline{\varphi}(x_0)) \cdot a_i^k(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d_\nu^\sigma(\psi(y_0)) \cdot f_k^\nu(\varphi(x_0)) \cdot \mathrm{D}_j(a_i^k)(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_\beta(d_\nu^\sigma)(\psi(y_0)) \cdot \mathrm{D}_l(y^\beta \psi f \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \times \\
&\quad \times \mathrm{D}_j(x^l \varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0)) \cdot f_k^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_i^k(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d_\nu^\sigma(\psi(y_0)) \cdot f_{kl}^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_i^k(\overline{\varphi}(x_0)) \cdot a_j^l(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d_\nu^\sigma(\psi(y_0)) \cdot f_k^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_{ij}^k(\overline{\varphi}(x_0)), \\
\overline{f}_{ij}^\sigma(\overline{\varphi}(x_0)) &= d_{\nu\beta}^\sigma(\psi(f(x_0))) \cdot f_l^\beta(\varphi(x_0)) \cdot f_k^\nu(\varphi(x_0)) \times \\
&\quad \times a_i^k(\overline{\varphi}(x_0)) \cdot a_j^l(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d_\nu^\sigma(\psi(f(x_0))) \cdot f_{kl}^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_i^k(\overline{\varphi}(x_0)) \cdot a_j^l(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d_\nu^\sigma(\psi(f(x_0))) \cdot f_k^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_{ij}^k(\overline{\varphi}(x_0)).
\end{aligned}$$

Označme

$$f^\sigma_{ijk} = f^\sigma_{ijk}(x^1,\dots,x^n) = \mathrm{D}_k\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(y^\sigma\psi f\varphi^{-1})(x^1,\dots,x^n),$$

$$\overline{f}^\sigma_{ijk} = \overline{f}^\sigma_{ijk}(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n) = \mathrm{D}_k\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma\overline{\psi}f\overline{\varphi}^{-1})(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n).$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}^\sigma_{ijk}(\overline{\varphi}(x_0)) &= \mathrm{D}_k(\overline{f}^\sigma_{ij})(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_k(d^\sigma_\nu \circ (\psi f\varphi^{-1}) \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot f^\nu_{pl} \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot a^p_i \cdot a^l_j + \\
&\quad + d^\sigma_{\nu\beta} \circ (\psi f\varphi^{-1}) \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \times \\
&\quad \times f^\beta_l \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot f^\nu_p \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot a^p_i \cdot a^l_j + \\
&\quad + d^\sigma_\nu \circ (\psi f\varphi^{-1}) \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot f^\nu_p \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1}) \cdot a^p_{ij})(\overline{\varphi}(x_0)), \\
\overline{f}^\sigma_{ijk}(\overline{\varphi}(x_0)) &= d^\sigma_{\nu\kappa\alpha}(\psi(f(x_0)))a^s_i(\overline{\varphi}(x_0))a^q_j(\overline{\varphi}(x_0))a^r_k(\overline{\varphi}(x_0)) \times \\
&\quad \times f^\nu_s(\varphi(x_0))f^\kappa_q(\varphi(x_0))f^\alpha_r(\varphi(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_{\nu\kappa}(\psi(f(x_0)))[(f^\nu_{sq}(\varphi(x_0))f^\kappa_r(\varphi(x_0)) + \\
&\quad + f^\nu_{sr}(\varphi(x_0))f^\kappa_q(\varphi(x_0)) + \\
&\quad + f^\kappa_{qr}(\varphi(x_0))f^\nu_s(\varphi(x_0)))a^s_i(\overline{\varphi}(x_0))a^q_j(\overline{\varphi}(x_0))a^r_k(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + f^\nu_s(\varphi(x_0))f^\kappa_q(\varphi(x_0))(a^s_{ik}(\overline{\varphi}(x_0))a^q_j(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + a^s_i(\overline{\varphi}(x_0))a^q_{jk}(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + a^s_{ij}(\overline{\varphi}(x_0))a^q_k(\overline{\varphi}(x_0)))] + \\
&\quad + d^\sigma_\alpha(\psi(f(x_0)))[a^q_{ijk}(\overline{\varphi}(x_0))f^\alpha_q(\varphi(x_0)) + \\
&\quad + a^a_i(\overline{\varphi}(x_0))a^b_j(\overline{\varphi}(x_0))a^c_k(\overline{\varphi}(x_0))f^\alpha_{abc}(\varphi(x_0)) + \\
&\quad + (a^a_{ij}(\overline{\varphi}(x_0))a^b_k(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + a^a_{ik}(\overline{\varphi}(x_0))a^b_j(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + a^a_i(\overline{\varphi}(x_0))a^b_{jk}(\overline{\varphi}(x_0)))f^\alpha_{ab}(\varphi(x_0))].
\end{aligned}$$

Ve výpočtu bylo využito vztahu

$$D_i(F \circ \psi f\varphi^{-1} \circ \varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0)) = D_\alpha(F)(\psi(f(x_0))) \cdot f^\alpha_j(\varphi(x_0)) \cdot a^j_i(\overline{\varphi}(x_0)),$$

kde

$$F = F(y^1, \dots, y^m).$$

Zkráceně můžeme psát transformační vztahy takto:

$$\begin{aligned}
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a, \\
\overline{f}^\sigma_{ij} &= d^\sigma_{\nu\kappa} a^k_i a^l_j f^\nu_k f^\kappa_l + d^\sigma_\nu a^k_{ij} f^\nu_k + d^\sigma_\nu a^k_i a^l_j f^\nu_{kl}, \\
\overline{f}^\sigma_{ijk} &= d^\sigma_{\nu\kappa\alpha} a^s_i a^q_j a^r_k f^\nu_s f^\kappa_q f^\alpha_r + d^\sigma_{\nu\kappa}[(f^\nu_{sq} f^\kappa_r + f^\nu_{sr} f^\kappa_q + f^\kappa_{qr} f^\nu_s) a^s_i a^q_j a^r_k + \\
&\quad + f^\nu_s f^\kappa_q (a^s_{ik} a^q_j + a^s_i a^q_{jk} + a^s_{ij} a^q_k)] + d^\sigma_\alpha [a^q_{ijk} f^\alpha_q + \\
&\quad + a^a_i a^b_j a^c_k f^\alpha_{abc} + (a^a_{ij} a^b_k + a^a_{ik} a^b_j + a^a_i a^b_{jk}) f^\alpha_{ab}].
\end{aligned}$$

V dalších kapitolách budeme užívat také značení $f^\sigma_i(x)$ místo $f^\sigma_i(\varphi(x))$ atd., tam, kde nemůže dojít k nedorozumění.

A. Invarianty prvního řádu

2.3 Akce grupy $L^2_n \times L^2_m$ na typové vrstvě Q^1 v kanonických souřadnicích

V tomto odstavci uvádíme vzorce pro přímé výpočty akce grupy $L^2_n \times L^2_m$ na typové vrstvě Q^1 v kanonickém globálním souřadnicovém systému (Q^1, ϕ), $\phi = (h_{jk}, g_{\nu\eta}, h_{jk,i}, g_{\nu\eta,\sigma}, f^\sigma_i, f^\sigma_{jk})$. Pro zjednodušení označujeme $\overline{q} = (A^{-1}, C^{-1}) \cdot q$ pro $q \in Q^1$, $A = (a^i_j, a^i_{jk})$ $C = (c^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta})$, $A^{-1} = (b^i_j, b^i_{jk})$, $C^{-1} = (d^\sigma_\nu, d^\sigma_{\nu\eta})$ a při značení souřadnic bodu q: $\phi(q) = (h_{jk}(q)$, $g_{\sigma\nu}(q)$, $\dots$, $f^\sigma_{jk}(q))$ budeme vyznačení bodu q vynechávat, tj. $h_{ij}(q) = h_{ij}$ resp. $h_{ij}(\overline{q}) = \overline{h}_{ij}$, atd., $1 \le i, j \le k \le n$; $1 \le \sigma, \nu \le \eta \le m$.

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a^a_i a^b_j h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a, \\
\overline{h}_{ij,k} &= (a^a_{ik} a^b_j + a^a_i a^b_{jk}) h_{ab} + a^a_i a^b_j a^c_k h_{ab,c},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{g}_{\sigma\nu,\eta} &= (c^\alpha_{\sigma\eta}c^\beta_\nu + c^\alpha_\sigma c^\beta_{\eta\nu})g_{\alpha\beta} + c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_\eta g_{\alpha\beta,\gamma}, \\
\overline{f}^\sigma_{ik} &= d^\sigma_{\nu\kappa}a^j_i a^l_k f^\nu_j f^\kappa_l + d^\sigma_\nu a^j_{ik} f^\nu_j + d^\sigma_\nu a^j_i a^l_k f^\nu_{jl}.
\end{aligned}$$

Vztahy pro souřadnice f^σ_i, f^σ_{ij}, byly odvozeny v kapitole 2.2. Určíme dimenzi prostoru Q^1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{dim} T^1_n Q_1 &= N_1 = \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= \frac{n}{2} n(n+1)^2, \\
\mathrm{dim} T^1_m Q_2 &= M_1 = \frac{m(m+1)}{2} + m \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \\
&= \frac{m}{2} m(m+1)^2, \\
\mathrm{dim} J^2_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) &= P_1 = m\left(n + \frac{n(n+1)}{2}\right), \\
\mathcal{D}_1 = \mathrm{dim} Q^1 &= N_1 + M_1 + P_1.
\end{aligned}$$

2.4 Diferenciální invarianty prvního řádu s hodnotami v levé $(L^1_n \times L^1_m)$-varietě

Místo souřadnic

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^\sigma_i, h_{ij,k}, g_{\sigma\nu,\eta}, f^\sigma_{jk})$$

zvolme nové souřadnice

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^\sigma_i, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, K^\sigma_{jk})$$

definované transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f^\sigma_i &= f^\sigma_i, \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha}), \\
K^{\sigma}_{jk} &= \Gamma^{i}_{jk} f^{\sigma}_{i} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} f^{\nu}_{j} f^{\eta}_{k} - f^{\sigma}_{jk}.
\end{aligned}
$$

Ukážeme, že nové souřadnice definují na typové vrstvě Q^1 globální souřadnicový systém (Q^1, Ψ^1). Souřadnice Γ^{i}_{jk},$\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}$, K^{σ}_{jk} jsou symetrické v dolních indexech.

Dále platí

$$
h^{ij} h_{jk} = \delta^{i}_{k},
$$

$$
g^{\sigma\nu} g_{\nu\eta} = \delta^{\sigma}_{\eta}.
$$

Inverzní transformace je dána rovnicemi:

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f^{\sigma}_{i} &= f^{\sigma}_{i}, \\
h_{ij,k} &= h_{qi}\Gamma^{q}_{jk} + h_{qj}\Gamma^{q}_{ik}, \\
g_{\sigma\nu,\eta} &= g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\eta} + g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\eta}, \\
f^{\sigma}_{jk} &= \Gamma^{i}_{jk} f^{\sigma}_{i} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} f^{\nu}_{j} f^{\eta}_{k} - K^{\sigma}_{jk}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Přechody mezi souřadnicemi jsou hladké, složením vztahů (2.2) a (2.3) lze prověřit, že se jedná o transformaci souřadnic. Zkontrolujeme počet nezávislých souřadnic:

$$
\begin{aligned}
\dim(h_{ij}, \Gamma^{i}_{jk}) &= \frac{1}{2} n(n+1)^2, \\
\dim(g_{\sigma\nu}, \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}) &= \frac{1}{2} m(m+1)^2, \\
\dim(f^{\sigma}_{i}) &= m \cdot n, \\
\dim(K^{\sigma}_{ij}) &= m \cdot \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že součet těchto dimenzí je shodný s dimenzí $\mathcal{D}_1$.

Označme

$$q = \{h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, K^\sigma_{jk}\},$$

$$\overline{q} = \{\overline{h}_{ij}, \overline{g}_{\sigma\nu}, \overline{f}_i^\sigma, \overline{\Gamma}^i_{jk}, \overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta}, \overline{K}^\sigma_{jk}\}.$$

Akce grupy $L^2_n \times L^2_m$: $\overline{q} = (A^{-1}, C^{-1}) \cdot q$ v nových souřadnicích je dána rovnicemi:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a_i^a a_j^b h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c_\sigma^\alpha c_\nu^\beta g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}_i^\sigma &= d_\alpha^\sigma a_i^a f_a^\alpha, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= b_a^i a_j^b a_k^c \Gamma^a_{bc} + b_l^i a^l_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= d^\sigma_\alpha c_\nu^\beta c_\eta^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= d^\sigma_\alpha a_j^p a_k^l K^\alpha_{pl}.
\end{aligned}$$

Odvodíme zde poslední ze vztahů.

$$\begin{aligned}
\overline{K}^\sigma_{jk} &= \overline{\Gamma}^i_{jk}\overline{f}_i^\sigma - \overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta}\overline{f}_j^\nu\overline{f}_k^\eta - \overline{f}^\sigma_{jk} = (b_c^i a_j^a a_k^b \Gamma^c_{ab} + a^a_{jk} b_a^i) d^\sigma_\alpha a_i^t f_t^\alpha - \\
&\quad (d^\sigma_\alpha c_\nu^\delta c_\eta^\epsilon \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}) d^\nu_\beta a_j^a d^\eta_\gamma a_k^b f_a^\beta f_b^\gamma - \\
&\quad -(d^\sigma_{\beta\gamma} a_j^a a_k^b f_a^\beta f_b^\gamma + d^\sigma_\alpha a^a_{jk} f_a^\alpha + d^\sigma_\alpha a_j^a a_k^b f^\alpha_{ab}) = \\
&= d^\sigma_\alpha a_j^a a_k^b \Gamma^c_{ab} f_c^\alpha + d^\sigma_\alpha a^a_{jk} f_a^\alpha - \\
&\quad -d^\sigma_\alpha a_j^a a_k^b \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} f_a^\beta f_b^\gamma - c^\alpha_{\nu\eta} d^\sigma_\alpha d^\nu_\beta d^\eta_\gamma a_j^a a_k^b f_a^\beta f_b^\gamma - \\
&\quad (-d^\sigma_{\beta\gamma} a_j^a a_k^b f_a^\beta f_b^\gamma + d^\sigma_\alpha a^a_{jk} f_a^\alpha + d^\sigma_\alpha a_j^a a_k^b f^\alpha_{ab}) = \\
&= d^\sigma_\alpha a_j^a a_k^b [\Gamma^c_{ab} f_c^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} f_a^\beta f_b^\gamma - f^\alpha_{ab}] = d^\sigma_\alpha a_j^a a_k^b K^\alpha_{ab}.
\end{aligned}$$

Ve výpočtu bylo využito následujících rovností:

$$\begin{aligned}
d^\sigma_{\nu\eta} &= -c^\alpha_{\beta\gamma} d^\sigma_\alpha d^\beta_\nu d^\gamma_\eta, \\
a_k^i b_j^k &= \delta_j^i, \\
c_\beta^\alpha d_\gamma^\beta &= \delta_\gamma^\alpha.
\end{aligned}$$

Zúžením akce na podgrupu $K^2_n \times K^2_m$(tj. pro $a_j^i = \delta_j^i$, $c_\nu^\sigma = \delta_\nu^\sigma$) dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= h_{ij}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
\overline{f}_i^\sigma &= f_i^\sigma, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + a^i_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= \Gamma^\sigma_{\nu\eta} + c^\sigma_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= K^\sigma_{jk}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Popíšeme množinu $Q^1/(K^2_n \times K^2_m)$. Prvky $q, \overline{q} \in Q^1$ nazveme $(K^2_n \times K^2_m)$-*ekvivalentními* a píšeme $q \sim_{(K^2_n \times K^2_m)} \overline{q}$, jestliže existuje prvek $k \in (K^2_n \times K^2_m)$ tak, že $\overline{q} = k \cdot q$. Pro souřadnice dvou $(K^2_n \times K^2_m)$-ekvivalentních prvků $\overline{q}, q$ v globálním souřadnicovém systému (Q^1, Ψ^1) platí vztahy (2.4). Z těchto vztahů je vidět, že každé dva ekvivalentní prvky mají stejný soubor souřadnic $h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K^\sigma_{ij}$ a naopak, mají-li dva prvky stejný soubor těchto souřadnic, pak jsou ekvivalentní. Příslušný prvek $k \in (K^2_n \times K^2_m)$ má v kanonických souřadnicích tvar

$$k = ((\delta^i_j, \overline{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}), (\delta^\sigma_\nu, \overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} - \Gamma^\sigma_{\nu\eta})).$$

Každý prvek množiny $Q^1/(K^2 \times K^2_m)$ lze tedy jednoznačně reprezentovat souborem souřadnic $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K^\sigma_{ij})$.

Věta 2.3 *Množina $Q^1/(K^2_n \times K^2_m)$ má strukturu orbit-variety. Hladká struktura je dána globálním souřadnicovým systémem $(Q^1/(K^2_n \times K^2_m), \Phi)$, $\Phi = (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K^\sigma_{ij})$, $1 \leq i \leq j \leq n$, $1 \leq \sigma \leq \nu \leq m$ a faktorová projekce $\pi : Q^1 \to Q^1/(K^2_n \times K^2_m)$,*

$$\pi : (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, K^\sigma_{ij}) \to (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K^\sigma_{ij})$$

je submerze.

Důkaz: $K^2_n \times K^2_m$-asociovanost globálního souřadnicového systému (Q^1, Ψ^1) plyne přímo z jeho definice. Z definice ekvivalence $q_1 \sim q_2$ plyne, že ke každému $q_1, q_2 \in Q^1$, $[q_1] \neq [q_2]$ existují $(K_n^2 \times K_m^2)$-invariantní otevřené množiny $W_{q_1}, W_{q_2} \subset Q^1$ takové, že $q_1 \in W_{q_1}$, $q_2 \in W_{q_2}$ a $W_{q_1} \cap W_{q_2} = \emptyset$, neboť topologie na Q^1 je euklidovská. Tvrzení tedy plyne z věty 1.3.

$\heartsuit$

Vztah (1.1) definuje na $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ levou akci grupy $H = i_n^2(L_n^1) \times i_m^2(L_m^1)$. Tato grupa je izomorfní s $L_n^1 \times L_m^1$, izomorfismus je dán vtahem $\kappa : H \ni ((a_j^i, 0), (c_\nu^\sigma, 0)) \to ((a_j^i), (c_\nu^\sigma)) \in L_n^1 \times L_m^1$. Souřadnicové vyjádření akce je hladké, množina $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ má tedy strukturu levé $L_n^1 \times L_m^1$-variety.

Uvažujme varietu

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 = \mathrm{Met}\mathbf{R}^n \times \mathrm{Met}\mathbf{R}^m \times \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m) \times \\ \times (\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m) \end{aligned} \tag{2.5}$$

s tenzorovou akcí grupy $L_n^1 \times L_m^1$.

Platí následující tvrzení:

Věta 2.4 *Levá* $(L_n^1 \times L_m^1)$*-varieta* $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ *je izomorfní s* $\mathcal{P}_1$.

Důkaz: Uvažujme globální souřadnicový systém $(Q^1/(K_n^2 \times K_m^2), \Phi)$ na $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ a kanonický globální souřadnicový systém na $\mathcal{P}_1$. Hledaný izomorfismus ι získáme, přiřadíme-li prvku $[q] \in Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ prvek prostoru $\mathcal{P}_1$ o stejných souřadnicích. Zobrazení ι je difeomorfismem, neboť jeho souřadnicové vyjádření je $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^{\dim \mathcal{P}_1}}$, $(L_n^1 \times L_m^1)$-ekvivariantnost zobrazení ι plyne ze skutečnosti, že souřadnicové vyjádření levé akce grupy $L_n^1 \times L_m^1$ je pro obě variety totožné.

$\heartsuit$

Věta 2.5 *Každý diferenciální invariant prvního řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé* $(L_n^1 \times L_m^1)$*-varietě lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic* $h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma$.

Důkaz: Tvrzení plyne ze vztahů (2.4), věty 2.2 a věty 1.1 následovně: Podle věty 2.2 je grupa $G = L_n^2 \times L_m^2$, působící zleva na varietě Q^1 vnitřním semidirektním součinem svých podgrup $H = i_n^2(L_n^1) \times i_m^2(L_m^1)$ a $K = K_n^2 \times K_m^2$. Nechť $g = (A, C) \in G$, v souřadnicích $g = ((a_j^i, a_{jk}^i), (c_\nu^\sigma, c_{\nu\eta}^\sigma))$. Pro zobrazení α, β definovaná v odstavci 1.1 platí $\alpha(g) = ((\delta_j^i, a_{jk}^i), (\delta_\nu^\sigma, c_{\nu\eta}^\sigma))$, $\beta(g) = ((a_j^i, 0)(c_\nu^\sigma, 0)) = (i_n^2 \circ \pi_n^2(A), i_m^2 \circ \pi_m^2(C)) = ((i_n^2 \circ \pi_n^2) \times (i_m^2 \circ \pi_m^2))(g)$. Nechť $\mathcal{P}$ je libovolná levá $(L_n^1 \times L_m^1)$-varieta. Grupa H je izomorfní s $L_n^1 \times L_m^1$, lze tedy definovat její levou akci na $\mathcal{P}$ vztahem $((a_j^i, 0), (c_\nu^\sigma, 0)) \cdot p = (a_j^i, c_\nu^\sigma) \cdot p$, pro všechna $p \in \mathcal{P}$ a všechna $(a_j^i, c_\nu^\sigma) \in L_n^1 \times L_m^1$. Dále, pro každý diferenciální invariant $L : Q^1 \to \mathcal{P}$ platí

$$L(g \cdot q) = L((A, C) \cdot q) = (\pi_n^2(A), \pi_m^2(C)) \cdot L(q) =$$

$$((i_n^2 \circ \pi_n^2) \times (i_m^2 \circ \pi_m^2))(g) \cdot L(q) = \beta(g) \cdot L(q)$$

pro libovolné $g = (A, C) \in G$ a libovolné $q \in Q^1$. Pro Q^1, $\mathcal{P}$, L jsou tedy splněny předpoklady věty 1.1. Jednoznačně určené H-ekvivariantní zobrazení $l : Q^1/(K_n^2 \times K_m^2) \to \mathcal{P}$, zaručené větou 1.1, ovšem závisí pouze na souřadnicích na $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$, tj. na $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma)$.

♡

Souřadnice h_{ij}, $g_{\sigma\nu}$, K_{ij}^σ, f_i^σ tvoří tzv. *bázi invariantů prvního řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé $L_n^1 \times L_m^1$-varietě.*

2.5 Geometrický význam souřadnice K_{ij}^σ

V tomto odstavci se zabýváme geometrickým významem invariantů prvního řádu. V první části dokazujeme, že souřadnice K_{ij}^σ jsou komponentami jistého geometrického objektu v daných souřadnicových systémech, v druhé části jsou uvedeny jednoduché konkrétní příklady. Jako dosud budeme uvažovat varietu $\mathcal{X}$ dimenze n s metrikou h, varietu $\mathcal{Y}$ dimenze m, $m \geq n$, s metrikou g a vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. V této kapitole předpokládáme, že zobrazení f je injektivní. Případ obecně neinjektivního vnoření bude řešen v kapitole 2.7.

Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$ resp. $(\mathcal{V}, \psi)$ jsou souřadnicová okolí bodu $x \in \mathcal{X}$ resp. $f(x) \in \mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ resp. $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ značí modul vektorových polí na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$,

$\mathcal{Z}^*(\mathcal{X})$ resp. $\mathcal{Z}^*(\mathcal{Y})$ značí modul diferenciálních 1-forem na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$. Nechť

$$\nabla^h : \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \ni (u,v) \to \nabla^h_u v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$$

resp.

$$\nabla^g : \mathcal{Z}(\mathcal{Y}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{Y}) \ni (\alpha,\beta) \to \nabla^g_\alpha \beta \in \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$$

je kovariantní derivace na varietě $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ daná v souřadnicích Levi–Civitovou konexí:

$$\begin{aligned} \Gamma(h)^i_{jk} &= \frac{1}{2} h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}), \\ \Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha}). \end{aligned}$$

Pro zavedení dalších pojmů využejeme následujícího pomocného tvrzení:

Lemma: Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je injektivní vnoření. Ke každému vektorovému poli u podél $f(\mathcal{X})$ existuje otevřená množina $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ taková, že $f\mathcal{X}) \subset \mathcal{V}$ a vektorové pole $\tilde{u}$ na $\mathcal{V}$ tak, že $\tilde{u}|_{f(\mathcal{X})} = u$.

Důkaz: Dále budeme uvažovat pouze souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$, adaptované k vnoření f, tj. takové, pro které je souřadnicové vyjádření $z = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ vnoření f vložením kartézských prostorů. Nechť $(\mathcal{V}_i, \psi_i)$, $\psi_i = (y^\sigma_i)$, $i \in I$, jsou souřadnicová okolí na varietě $\mathcal{Y}$ taková, že $f(\mathcal{X}) \subset \cup_{i \in I} \mathcal{V}_i$. Nechť $u|_{\mathcal{V}_i \cap f(\mathcal{X})} = u^\sigma_i \frac{\partial}{\partial y^\sigma_i}$. Pro každé $i \in I$ definujeme vektorové pole v_i na $\mathcal{V}_i$ vztahem $v_i = v^\sigma_i \frac{\partial}{\partial y^\sigma_i}$, kde

$$v^\sigma_i(y) = u^\sigma_i(f \circ \varphi_i^{-1} \circ \mathrm{pr} \circ \psi_i(y)),$$

kde $y \in \mathcal{V}_i$ a pr značí projekci na prvních n komponent. Nechť χ_i je rozklad jednotky asociovaný s pokrytím $\mathcal{V}_i$. Pak vztahem

$$\tilde{u} = \sum_{i \in I} \chi_i u^\sigma_i \frac{\partial}{\partial y^\sigma_i}$$

je definováno vektorové pole na $\mathcal{Y}$. Je zřejmé, že $\tilde{u}|_{f(\mathcal{X})} = u$ neboť $v^\sigma_i(f(x)) = u^\sigma_i(f(x))$ pro všechna $i \in I$.

♡

Vektorové pole $\tilde{u}$ není určeno jednoznačně. Každé vektorové pole $\tilde{u}$, pro které $\tilde{u}|_{f(\mathcal{X})} = u$, budeme nazývat *rozšířením* vektorového pole u.

Nechť $u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ jsou hladká vektorová pole na $\mathcal{X}$, f_*u, f_*v jejich tečné obrazy vnořením f. Označme $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ (nějaké) rozšíření vektorových polí f_*u, f_*v na otevřené okolí množiny $f(\mathcal{X})$ v $\mathcal{Y}$. Vzhledem k injektivnosti zobrazení f můžeme definovat objekt $K_f \in (\mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \odot \mathcal{Z}^*(\mathcal{X})) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ vztahem

$$K_f(u, v, \omega) = \omega(f_*(\nabla^h_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v}).$$

Definice je nezávislá na konkrétní volbě rozšíření vektorových polí f_*u, f_*v.

Věta 2.6 *Objekt K_f má lokální souřadnicové vyjádření*

$$K_f = K^\sigma_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes_{f^*} \frac{\partial}{\partial y^\sigma}, \tag{2.6}$$

kde

$$K^\sigma_{jk}(x) = \Gamma(h)^i_{jk}(x) f^\sigma_i(x) - \Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta}(f(x)) f^\nu_j(x) f^\eta_k(x) - f^\sigma_{jk}(x). \tag{2.7}$$

Důkaz: Nechť $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ resp. $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ a nechť $\omega = \omega_\nu \mathrm{d}y^\nu$. Platí

$$\begin{aligned}
\nabla^h_u v &= (u^i v^j \Gamma(h)^k_{ij} + u^i \frac{\partial v^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^k}, \\
f_*(\nabla^h_u v) &= (f^\sigma_k u^i v^j \Gamma(h)^k_{ij} + f^\sigma_k u^i \frac{\partial v^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial y^\sigma}, \\
\nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v} &= (f^\gamma_i u^i f^\alpha_j v^j \Gamma(g)^\sigma_{\gamma\alpha} + f^\gamma_i u^i \frac{\partial}{\partial y^\gamma}(f^\sigma_j v^j)) \frac{\partial}{\partial y^\sigma}.
\end{aligned}$$

S využitím vztahu:

$$f^\gamma_i \frac{\partial}{\partial y^\gamma}(f^\sigma_j v^j) = \frac{\partial y^\gamma f(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial (f^\sigma_j v^j)(f(x))}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^i}(f^\sigma_j v^j) = f^\sigma_{ij} v^j + f^\sigma_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$$

dostáváme

$$f_*(\nabla^h_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v} = (\Gamma(h)^k_{ij} f^\sigma_k - \Gamma(g)^\sigma_{\gamma\alpha} f^\gamma_i f^\alpha_j - f^\sigma_{ij}) u^i v^j \frac{\partial}{\partial y^\sigma} =$$

$$= K^\sigma_{ij} u^i v^j \frac{\partial}{\partial y^\sigma}.$$

Pak $K_f(u,v,\omega) = K^\sigma_{ij} u^i v^j \omega_\sigma$, tj. $K^\sigma_{ij} = K_f(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \mathrm{d}y^\sigma)$.

♡

Poznámka: K_f můžeme chápat jako symetrické bilineární zobrazení $\mathcal{Z}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$,

$$K_f(u,v) = K^\sigma_{ij} u^i v^j \frac{\partial}{\partial y^\sigma},$$

kde $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. V dalším textu budeme pro názornost užívat právě tuto interpretaci objektu K_f.

Poznámka: Speciálně platí:

$$K^\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} = f_*(\nabla^h_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}) - \nabla^g_{f_* \widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}} \widetilde{f_* \frac{\partial}{\partial x^j}}.$$

Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se nazývá *afinní*, jestliže pro každou geodetiku $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{X}$ na varietě $\mathcal{X}$ je křivka $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{Y}$ geodetikou na varietě $\mathcal{Y}$.

Věta 2.7 *Nechť křivka $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{X}$ je libovolná geodetika, pak křivka $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{Y}$, $\beta = f \circ \alpha$ je geodetikou právě tehdy, když $K^\sigma_{jk} \equiv 0$.*

Důkaz: Z předpokladu věty vyplývá:

$$\Gamma(h)^i_{jk} \dot{\alpha}^j \dot{\alpha}^k + \ddot{\alpha}^q = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Křivka $\beta = f \circ \alpha$ je geodetikou právě tehdy když jsou splněny rovnice geodetiky:

$$\Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta} \dot{\beta}^\nu \dot{\beta}^\eta + \ddot{\beta}^\sigma = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq m,$$

tj.

$$\Gamma(g)^{\sigma}_{\nu\eta} f^{\nu}_j f^{\eta}_k \dot{\alpha}^j \dot{\alpha}^k + f^{\sigma}_{jk} \dot{\alpha}^j \dot{\alpha}^k + f^{\sigma}_i \ddot{\alpha}^i = 0.$$

S využitím předpokladu platnosti rovnice geodetiky pro α nabývají předchozí rovnice tvaru:

$$(\Gamma(h)^i_{jk} f^{\sigma}_i - \Gamma(g)^{\sigma}_{\nu\eta} f^{\nu}_j f^{\eta}_k - f^{\sigma}_{jk}) \dot{\alpha}^j \dot{\alpha}^k = 0, \quad \text{tj.} \quad K^{\sigma}_{jk} \dot{\alpha}^j \dot{\alpha}^k = 0.$$

Vzhledem k libovolnosti geodetiky α je křivka $f \circ \alpha$ geodetikou právě tehdy, je-li $K^{\sigma}_{jk} = 0$, $1 \leq j \leq k \leq n$, $1 \leq \sigma \leq m$.

♡

Věta 2.8 *Následující po*

1. $K^{\sigma}_{jk} \equiv 0$,
2. *Zobrazení f je afinı*
3. $f_* \circ \nabla^h = \nabla^g \circ (f_*$:

Zobrazením $f_* \times f_*$ přito:
$\mathcal{Z}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \ni (u, v) \to$

OPRAVENKA:

str. 36, správné znění věty 2.8

Věta 2.8 Následující podmínky jsou ekvivalentní

1. $K_f = 0$,
2. zobrazení f je afinní.
3. $f_* \circ \nabla^h(u, v) = \nabla^g(\tilde{u}, \tilde{v})$, kde $\tilde{u}, \tilde{v}$ jsou libovolná rozšíření vektorových polí $f_* u, f_* v$.

Důkaz: Věta je důsledk~~em vět 2.6 a 2.7.~~

♡

Příklad 1: Uvažujme $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ s kanonickým globálním souřadnicovým systémem a metrikou $h = dx \otimes dx$, $\mathcal{Y}$ nechť je libovolná m-rozměrná varieta s metrikou, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ vnoření. Pak vztahy $K^{\sigma}_{11} = 0$, $\sigma = 1, \ldots, m$ jsou rovnicemi geodetiky na varietě $\mathcal{Y}$. Skutečně, zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ představuje křivku v $\mathcal{Y}$. Označme proto $f^{\sigma}_1 = \dot{f}^{\sigma}$, $f^{\sigma}_{11} = \ddot{f}^{\sigma}$. Platí $\Gamma(h)^1_{11} = 0$, tj.

$$-K^{\sigma}_{11} = \Gamma(\mathcal{Y})^{\sigma}_{\nu\eta} \dot{f}^{\nu} \dot{f}^{\eta} + \ddot{f}^{\sigma}.$$

$-K^{\sigma}_{11}$ je tedy přímo levou stranou rovnic geodetiky na $\mathcal{Y}$. Příklad tak názorně dokumentuje speciální případ věty 2.7.

Příklad 2: Nechť $\mathcal{X} = S^2$, $(\mathcal{U}, \phi)$, $\phi = (\varphi, \vartheta)$, $\mathcal{U} \subset S^2$ je systém sférických souřadnic. $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^3$ uvažujeme s kanonickým globálním souřadnicovým systémem a metrikou danou v těchto souřadnicích vztahem $g_{\sigma\nu} = \delta_{\sigma\nu}$. Vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ nechť je dáno vztahy:

$$\begin{aligned} f^1(\varphi, \vartheta) &= \cos\varphi \sin\vartheta, \\ f^2(\varphi, \vartheta) &= \sin\varphi \sin\vartheta, \\ f^3(\varphi, \vartheta) &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Na $\mathcal{X}$ uvažujme indukovanou metriku $h = f^*g$, tj. $h_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta, h_{\varphi\vartheta} = 0, h_{\vartheta\vartheta} = 1$. Platí: $\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta} = \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\vartheta} = 0$, $\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$, $\Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \cot\vartheta$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} K^1_{\varphi\varphi} &= \cos\varphi \sin^3\vartheta, \\ K^1_{\varphi\vartheta} &= 0, \\ K^1_{\vartheta\vartheta} &= \cos\varphi\sin\vartheta, \\ K^2_{\varphi\varphi} &= \sin\varphi\sin^3\vartheta, \\ K^2_{\varphi\vartheta} &= 0, \\ K^2_{\vartheta\vartheta} &= -\sin\varphi\sin\vartheta, \\ K^3_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta\cos\vartheta, \\ K^3_{\varphi\vartheta} &= 0, \\ K^3_{\vartheta\vartheta} &= -\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Vnoření f tedy není afinní.

Příklad 3: Uvažujeme-li vnoření f dvou variet s plochou metrikou, pak $K^{\sigma}_{ij} = -f^{\sigma}_{ij}$. V takovém případě je totiž $\Gamma(h)^i_{jk} = 0$, $\Gamma(\mathcal{Y})^{\sigma}_{\nu\eta} = 0$ pro $1 \leq i, j, k \leq n$, $1 \leq \sigma, \nu, \eta \leq m$.

Příklad 4: Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření, g je metrika na $\mathcal{Y}$, $h = f^*g$ indukovaná metrika na $\mathcal{X}$. V souřadnicích platí: $h_{ij} = f^{\sigma}_i f^{\nu}_j g_{\sigma\nu}$. Dále nechť h^{ab} je kontravariantní metrika na $\mathcal{X}$, splňující vztah $h^{ab} f^{\sigma}_a f^{\nu}_c g_{\sigma\nu} = \delta^b_c$. Pak

$$K^{\sigma}_{jk} = (h^{iq} f^{\alpha}_q f^{\sigma}_i - g^{\alpha\sigma}) f^{\beta}_j f^{\gamma}_k \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + h^{iq} f^{\alpha}_i f^{\sigma}_q f^{\beta}_{jk} g_{\alpha\beta} - f^{\sigma}_{jk},$$

kde $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = g_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}$.

Příklad 5: Nechť $\mathcal{X} = S^1$, $\mathcal{Y} = S^2$, na $\mathcal{X}$ uvažujeme souřadnicový systém $(\mathcal{U}, t)$, $t \in (0, 2\pi)$ a metriku $h = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$, na $\mathcal{Y}$ uvažujeme sférické souřadnice, g je metrika na S^2 z příkladu 2, tj. $g_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta$, $g_{\varphi\vartheta} = 0$, $g_{\vartheta\vartheta} = 1$. Uvažujme vnoření $f : S^1 \to S^2$:

$$\begin{aligned} f^{\varphi} &= t, \\ f^{\vartheta} &= \vartheta_0 = \text{konst}. \end{aligned}$$

kde $\vartheta_0 \in (0, \pi)$. Pak

$$\begin{aligned} K^{\varphi}_{11} &= 0, \\ K^{\vartheta}_{11} &= -\sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Požadujeme-li, aby zobrazení f bylo afinní, dostáváme očekávaný závěr $K^{\vartheta}_{11} = 0 \Leftrightarrow \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$.

2.6 Druhá fundamentální forma

Ukážeme souvislost K_f s tzv. druhou fundamentální formou, která představuje běžný geometrický pojem v případě riemannovských metrik. Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je injektivní vnoření, $\dim\mathcal{X} = n$, $\dim\mathcal{Y} = m$, g resp. ∇^g je metrika resp. kovariantní derivace na $\mathcal{Y}$ příslušná Levi–Civitově konexi. Předpokládejme, že metrika g je riemannovská. Na $\mathcal{X}$ uvažujeme indukovanou metriku

$$\tilde{h} = f^* g.$$

Lze ukázat, že metrika h je rovněž riemannovská. Pro libovolné $\xi \in T_{f(x)}\mathcal{Y}$ označme $\xi^{\top}$ resp. $\xi^{\perp}$ ortogonální průmět na podprostor $f_*(T_x\mathcal{X}) \subset T_{f(x)}\mathcal{Y}$, resp. jeho ortogonální doplněk $f_*(T_x\mathcal{X})^{\perp} \subset T_{f(x)}\mathcal{Y}$, vzhledem ke skalárnímu součinu zadanému na $T_{f(x)}\mathcal{Y}$ metrikou g. Dále definujme indukovanou kovariantní derivaci na $\mathcal{X}$ vztahem

$$\tilde{\nabla}_u v = f_*^{-1}(\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^{\top}.$$

Definice je korektní, neboť zobrazení f_* je injektivní. Výpočtem v souřadnicích lze ukázat, že indukovaná kovariantní derivace je totožná s kovariantní derivací určenou Levi–Civitovou konexí příslušnou indukované metrice $\tilde{h}$. Pro případ, kdy na varietě $\mathcal{X}$ uvažujeme indukovanou konexi a indukovanou metriku, budeme objekt K_f označovat symbolem $\tilde{K}_f$. Platí

$$\begin{aligned} \tilde{K}_f(u,v) &= f_*(\tilde{\nabla}_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v} = \\ &= f_*(\tilde{\nabla}_u v) - (\nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v})^\top - (\nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v})^\perp = \\ &= -(\nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v})^\perp. \end{aligned}$$

Nechť $\nu \in \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ je vektorové pole, splňující $g(\nu(f(x)), (f_*u)(f(x))) = 0$ pro všechna $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ a všechna $x \in \mathcal{X}$. Takové pole nazýváme *transverzální* k $f(\mathcal{X})$. Definujeme *druhou fundamentální formu příslušnou* ν vztahem

$$l_\nu(u,v) = \tilde{h}(f_*^{-1}(\nabla^g_{\tilde{u}} \nu)^\top, v),$$

kde $u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Platí

$$\begin{aligned} l_\nu(u,v) &= g((\nabla^g_{\tilde{u}} \nu)^\top, f_*v) = g(\nabla^g_{\tilde{u}} \nu, f_*v) = \\ &= -g(\nu, \nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v}) = -g(\nu, (\nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v})^\perp) = \\ &= g(\nu, \tilde{K}_f(u,v)). \end{aligned}$$

Poznámka: Pro libovolné transverzální pole ν je $l_\nu(u,v) = g(\nu, \tilde{K}_f(u,v))$, $\forall u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Dále pro libovolné pole η, pro které $\exists w \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, tak, že $\eta|_{f(\mathcal{X})} = f_*w$, platí $g(\eta, \tilde{K}_f(u,v)) = 0$, $\forall u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Objekt $\tilde{K}_f$ tedy jednoznačně určuje soubor druhých fundamentálních forem l_ν a sám je tímto souborem jednoznačně určen.

Pro $m = n + 1$ a pro normované vektorové pole ν, tj. takové, pro něž $|g(\nu,\nu)| = 1$ se druhé fundamentální formě l_ν říká také *vnější křivost*. Pro dimenze $m > n$ libovolné a $|g(\nu,\nu)| = 1$ budeme druhým fundamentálním formám říkat *zobecněné vnější křivosti*.

Nyní se zabývejme případem, kdy na $\mathcal{X}$ uvažujeme zcela obecnou metriku h a příslušnou kovariantní derivací ∇^h, určenou Levi–Civitovou konexí.

Pak

$$\begin{aligned} K_f(u,v) &= f_*(\nabla^h_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v} = \\ &= f_*(\nabla^h_u v) - (\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\top - (\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\perp, \\ K_f(u,v) &= f_*(\nabla^h_u v - \tilde{\nabla}_u v) + \tilde{K}_f(u,v). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Souřadnicové systémy $(\mathcal{U},\varphi)$ na $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V},\psi)$ na $\mathcal{Y}$ nazýváme *adaptované k vnoření* f jestliže zobrazení $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je kanonické vložení. Potom pro komponenty f v těchto souřadnicích platí $f^\sigma_i = \delta^\sigma_i$ pro $\sigma, i, j = 1,\dots,n$, $f^\sigma_i = 0$ pro $\sigma = n+1,\dots,m; i,j = 1,\dots,n$ a $f^\sigma_{ij} = 0$ pro $\sigma = 1,\dots,m; i,j = 1,\dots n$. Pro K_f v adaptovaných souřadnicích dostáváme

$$\begin{aligned} K^\sigma_{ij} &= \Gamma(h)^\sigma_{ij} - \Gamma(g)^\sigma_{ij} \quad \text{pro } \sigma = 1,\dots,n, \\ K^\sigma_{ij} &= -\Gamma(g)^\sigma_{ij} \qquad\qquad\quad \text{pro } \sigma = n+1,\dots,m \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \tilde{K}^\sigma_{ij} &= 0 \qquad\qquad\quad \text{pro } \sigma = 1,\dots,n, \\ \tilde{K}^\sigma_{ij} &= -\Gamma(g)^\sigma_{ij} \quad \text{pro } \sigma = n+1,\dots,m. \end{aligned}$$

Existují-li na varietách $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ takové souřadnicové systémy $(\mathcal{U},\varphi)$ a $(\mathcal{V},\psi)$ adaptované k vnoření f, které jsou zároveň geodetickými souřadnicovými systémy, pak zobrazení f je afinní na množině $\mathcal{U}$, neboť $K_f \equiv 0$.

Věta 2.9 *Injektivní vnoření* $f : (\mathcal{X}, \nabla^h) \to (\mathcal{Y}, \nabla^g)$ *je afinní právě tehdy, když*

(i) všechny druhé fundamentální formy jsou identicky rovny nule,

(ii) zobrazení $id : (\mathcal{X}, \nabla^h) \to (\mathcal{X}, \tilde{\nabla})$ *je afinní transformace, tj.* $\nabla^h = \tilde{\nabla}$.

Důkaz: Podmínky (i) a (ii) platí současně právě tehdy, je-li $K_f = 0$. Tvrzení tedy plyne z věty 2.8.

♡

Důsledkem tohoto tvrzení je např. známá skutečnost, že izometrické vnoření je afinní právě tehdy, když všechny druhé fundamentální formy jsou identicky rovny nule.

2.7 Případ obecně neinjektivního vnoření

Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření. Zvolme atlas $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$, $i \in I$ na $\mathcal{X}$ tak, že $f|_{\mathcal{U}_i}$ je injektivní. Definujme zobrazení $K_{f|_{\mathcal{U}_i}} : \mathcal{Z}(\mathcal{U}_i) \times \mathcal{Z}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ vztahem

$$K_{f|_{\mathcal{U}_i}}(u, v) = f_*(\nabla^h_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v},$$

kde $u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}_i)$, $\tilde{u}, \tilde{v}$ jsou rozšíření polí $f_* u, f_* v$ na otevřené okolí $f(\mathcal{U}_i)$ v $\mathcal{Y}$. Zobrazení $K_{f|_{\mathcal{U}_i}}$ má lokální souřadnicové vyjádření dané vztahem (2.6).

Věta 2.10 *Zobrazení f je afinní právě tehdy, když $K_{f|_{\mathcal{U}_i}} \equiv 0 \quad \forall i \in I$.*

Důkaz: Věta je důsledkem věty 2.7.

♡

Poznámka: Objekt K_f nemůže být definován globálně, neboť v případě neinjektivního vnoření není obecně $f_* u$ resp. $f_* v$ vektorovým polem na $f(\mathcal{X})$.

B. Invarianty druhého řádu

2.8 Akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ na typové vrstvě Q^2 v kanonických souřadnicích

V tomto odstavci uvádíme vzorce pro přímé výpočty akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ na typové vrstvě Q^2 v kanonickém globálním souřadnicovém systému (Q^2, ϕ), $\phi = (h_{jk}, g_{\nu\eta}, h_{jk,i}, h_{jk,il}, g_{\nu\eta,\sigma}, g_{\nu\eta,\sigma\omega}, f^\sigma_i, f^\sigma_{jk}, f^\sigma_{jkl})$. Pro zjednodušení označujeme, obdobně jako v odstavci A, $\overline{q} = (A^{-1}, C^{-1}) \cdot q$ pro $q \in Q^2$, $A = (a^i_j, a^i_{jk}, a^i_{jkl})$ $C = (c^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta}, c^\sigma_{\nu\eta\omega})$, $A^{-1} = (b^i_j, b^i_{jk}, b^i_{jkl})$, $C^{-1} = (d^\sigma_\nu, d^\sigma_{\nu\eta}, d^\sigma_{\nu\eta\omega})$ a při označení souřadnic bodu q: $\phi(q) = (h_{jk}(q), \ldots, f^\sigma_{jkl}(q))$ budeme vyznačení bodu q vynechávat, tj. $h_{ij}(q) = h_{ij}$ resp. $h_{ij}(\overline{q}) = \overline{h}_{ij}$, atd., latinské indexy nabývají hodnot $1, \ldots, n$, řecké $1, \ldots, m$.

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a_i^a a_j^b h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c_\sigma^\alpha c_\nu^\beta g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}_i^\sigma &= d_\alpha^\sigma a_i^a f_a^\alpha, \\
\overline{h}_{ij,k} &= (a_{ik}^a a_j^b + a_i^a a_{jk}^b) h_{ab} + a_i^a a_j^b a_k^c h_{ab,c}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu,\eta} &= (c_{\sigma\eta}^\alpha c_\nu^\beta + c_\sigma^\alpha c_{\eta\nu}^\beta) g_{\alpha\beta} + c_\sigma^\alpha c_\nu^\beta c_\eta^\gamma g_{\alpha\beta,\gamma}, \\
\overline{f}_{ik}^\sigma &= d_{\nu\kappa}^\sigma a_i^j a_k^l f_j^\nu f_l^\kappa + d_\nu^\sigma a_{ik}^j f_j^\nu + d_\nu^\sigma a_i^j a_k^l f_{jl}^\nu, \\
\overline{h}_{ah,oj} &= (a_{aoj}^p a_h^q + a_{ao}^p a_{hj}^q + a_{aj}^p a_{oh}^q + a_a^p a_{hoj}^q) h_{pq} + a_a^v a_h^l a_o^k a_j^u h_{vl,ku} \\
&\quad + (a_a^v a_h^l a_{oj}^k + a_{aj}^v a_h^l a_o^k + a_a^v a_{jh}^l a_o^k + a_{ao}^v a_h^l a_j^k + a_a^v a_{ho}^l a_j^k) h_{vl,k}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu,\eta\omega} &= (c_{\sigma\eta\omega}^\alpha c_\nu^\beta + c_{\sigma\eta}^\alpha c_{\nu\omega}^\beta + c_{\sigma\omega}^\alpha c_{\eta\nu}^\beta + c_\sigma^\alpha c_{\nu\eta\omega}^\beta) g_{\alpha\beta} + c_\sigma^\alpha c_\nu^\beta c_\eta^\gamma c_\omega^\delta g_{\alpha\beta,\gamma\delta} \\
&\quad + (c_\sigma^\alpha c_\nu^\beta c_{\eta\omega}^\gamma + c_{\sigma\omega}^\alpha c_\nu^\beta c_\eta^\gamma + c_\sigma^\alpha c_{\omega\nu}^\beta c_\eta^\gamma + c_{\sigma\eta}^\alpha c_\nu^\beta c_\omega^\gamma + c_\sigma^\alpha c_{\nu\eta}^\beta c_\omega^\gamma) g_{\alpha\beta,\gamma}, \\
\overline{f}_{hop}^\sigma &= d_{\nu\kappa\alpha}^\sigma a_h^s a_o^q a_p^r f_s^\nu f_q^\kappa f_r^\alpha + d_{\nu\kappa}^\sigma [(f_{sq}^\nu f_r^\kappa + f_{sr}^\nu f_q^\kappa + f_{qr}^\kappa f_s^\nu) a_h^s a_o^q a_p^r + \\
&\quad + f_s^\nu f_q^\kappa (a_{hp}^s a_o^q + a_h^s a_{op}^q + a_{ho}^s a_p^q)] + d_\alpha^\sigma [a_{hop}^i f_i^\alpha + \\
&\quad + a_h^a a_o^b a_p^c f_{abc}^\alpha + (a_{ho}^a a_p^b + a_{hp}^a a_o^b + a_h^a a_{op}^b) f_{ab}^\alpha].
\end{aligned}
$$

Vztahy pro souřadnice $f_i^\sigma, f_{ij}^\sigma, f_{ijk}^\sigma$ byly odvozeny v kapitole 2.2. Určíme dimenzi prostoru Q^2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dim} T_n^2 Q_1 &= N_2 = \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \\
&= \frac{n}{4}(n+2)(n+1)^2, \\
\mathrm{dim} T_m^2 Q_2 &= M_2 = \frac{m(m+1)}{2} + m \cdot \frac{m(m+1)}{2} + \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 = \\
&= \frac{m}{4}(m+2)(m+1)^2, \\
\mathrm{dim} J_{(0,0)}^3(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) &= P_2 = m\left(n + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right), \\
\mathcal{D}_2 = \mathrm{dim} Q^2 &= N_2 + M_2 + P_2.
\end{aligned}
$$

2.9 Diferenciální invarianty druhého řádu s hodnotami v levé $L_n^2 \times L_m^2$-varietě

Místo souřadnic

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, h_{ij,k}, g_{\sigma\nu,\eta}, f_{jk}^\sigma, h_{ij,kl}, g_{\sigma\nu,\eta\omega}, f_{jkl}^\sigma)$$

zvolme na Q^2 nové souřadnice

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S^i_{jkl}, S^\sigma_{\nu\eta\omega}, K^\sigma_{jk}, Q^\sigma_{jkl}),$$

přičemž transformační vztahy jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f_i^\sigma &= f_i^\sigma, \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}), \\
R_{ijkl} &= \frac{1}{2}(h_{il,jk} + h_{jk,il} - h_{ik,jl} - h_{jl,ik}) + h_{bc}(\Gamma^b_{jk}\Gamma^c_{il} - \Gamma^b_{jl}\Gamma^c_{ik}), \\
S^i_{jkl} &= h^{iq}[\frac{1}{3}(h_{qj,kl} + h_{ql,jk} + h_{qk,lj}) - \frac{1}{6}(h_{jk,lq} + h_{lj,kq} + h_{kl,jq})], \\
\Gamma^\sigma_{\nu\eta} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha}), \\
R_{\sigma\nu\eta\omega} &= \frac{1}{2}(g_{\sigma\omega,\nu\eta} + g_{\nu\eta,\sigma\omega} - g_{\sigma\eta,\nu\omega} - g_{\nu\omega,\sigma\eta}) + g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\nu\eta}\Gamma^\beta_{\sigma\omega} - \Gamma^\alpha_{\nu\omega}\Gamma^\beta_{\sigma\eta}), \\
S^\sigma_{\nu\eta\omega} &= g^{\alpha\sigma}[\frac{1}{3}(g_{\alpha\nu,\eta\omega} + g_{\alpha\omega,\nu\eta} + g_{\alpha\eta,\omega\nu}) - \frac{1}{6}(g_{\nu\eta,\omega\alpha} + g_{\omega\nu,\eta\alpha} + g_{\eta\omega,\nu\alpha})], \\
K^\sigma_{jk} &= \Gamma^i_{jk} f_i^\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\eta} f_j^\nu f_k^\eta - f^\sigma_{jk}, \\
Q^\sigma_{jkl} &= S^i_{jkl} f_i^\sigma - S^\sigma_{\beta\gamma\delta} f_j^\beta f_k^\gamma f_l^\delta - f^\sigma_{jkl}.
\end{aligned}$$

Souřadnice Γ^i_{jk},$\Gamma^\sigma_{\nu\eta}$, K^σ_{jk}, Q^σ_{jkl}, S^i_{jkl}, $S^\sigma_{\nu\eta\omega}$ jsou symetrické v dolních indexech, souřadnice R_{ijkl}, resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega}$ jsou antisymetrické v prvních dvou indexech, antisymetrické v posledních dvou indexech a symetrické vůči záměně první a druhé dvojice indexů, navíc splňují rovnost $R_{ijkl} + R_{iljk} - R_{kilj} = 0$

resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega} + R_{\sigma\omega\eta\nu} - R_{\eta\sigma\omega\nu} = 0$. Ukážeme, že nové souřadnice definují na typové vrstvě Q^2 globální souřadnicový systém (Q^2, Ψ^2). Platí

$$h^{ij}h_{jk} = \delta^i_k,$$
$$g^{\sigma\nu}g_{\nu\eta} = \delta^\sigma_\eta.$$

Inverzní transformace je dána rovnicemi:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij},\\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu},\\
f^\sigma_i &= f^\sigma_i,\\
h_{ij,k} &= h_{iq}\Gamma^q_{jk} + h_{jq}\Gamma^q_{ik},\\
g_{\sigma\nu,\eta} &= g_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\eta} + g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\eta},\\
f^\sigma_{jk} &= \Gamma^i_{jk}f^\sigma_i - \Gamma^\sigma_{\nu\eta}f^\nu_j f^\eta_k - K^\sigma_{jk},\\
h_{ij,kl} &= h_{iq}S^q_{jkl} + h_{jq}S^q_{ikl} - \frac{1}{3}(R_{ikjl} + R_{jkil}) +\\
&\quad + \frac{1}{3}h_{rq}(\Gamma^q_{il}\Gamma^r_{kj} + \Gamma^q_{jl}\Gamma^r_{ki} - 2\Gamma^q_{ij}\Gamma^r_{kl}),\\
g_{\sigma\nu,\eta\omega} &= g_{\sigma\alpha}S^\alpha_{\nu\eta\omega} + g_{\nu\alpha}S^\alpha_{\sigma\eta\omega} - \frac{1}{3}(R_{\sigma\eta\nu\omega} + R_{\nu\eta\sigma\omega}) +\\
&\quad + \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\sigma\omega}\Gamma^\beta_{\eta\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\omega}\Gamma^\beta_{\eta\sigma} - 2\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\beta_{\eta\omega}),\\
f^\sigma_{jkl} &= S^i_{jkl}f^\sigma_i - S^\sigma_{\beta\gamma\delta}f^\beta_j f^\gamma_k f^\delta_l - Q^\sigma_{jkl}.
\end{aligned}$$

Přechody mezi souřadnicemi jsou hladké, složením obou vztahů lze prověřit, že se jedná o transformaci souřadnic. Zkontrolujeme počet nezávislých souřadnic:

$$\begin{aligned}
\dim(h_{ij}, \Gamma^i_{jk}) &= \frac{1}{2}n(n+1)^2,\\
\dim(R_{ijkl}) &= \frac{n^2}{12}(n^2-1),\\
\dim(S^i_{jkl}) &= \frac{n^2}{6}(n+1)(n+2),\\
N_2 &= \dim(h_{ij}, \Gamma^i_{jk}, R_{ijkl}, S^i_{jkl}),
\end{aligned}$$

analogicky

$$M_2 = \dim(g_{\sigma\nu}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S^\sigma_{\nu\eta\omega}),$$

$$\begin{aligned}
\dim(f^\sigma_i) &= m \cdot n, \\
\dim(K^\sigma_{ij}) &= m \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \\
\dim(Q^\sigma_{ijk}) &= m \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right), \\
P_2 &= \dim(f^\sigma_i, K^\sigma_{ij}, Q^\sigma_{ijk}).
\end{aligned}$$

Akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ v nových souřadnicích je dána rovnicemi:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a^a_i a^b_j h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= b^i_a a^b_j a^c_k \Gamma^a_{bc} + b^i_l a^l_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= d^\sigma_\alpha c^\beta_\nu c^\gamma_\eta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= d^\sigma_\alpha a^p_j a^l_k K^\alpha_{pl}, \\
\overline{R}_{ijkl} &= a^a_i a^b_j a^c_k a^d_l R_{abcd}, \\
\overline{S}^i_{jkl} &= a^a_j a^b_k a^c_l b^i_d S^d_{abc} + a^r_{jkl} b^i_r + \\
&\quad + (a^s_j a^r_{kl} + a^s_k a^r_{jl} + a^s_l a^r_{kj}) b^i_u \Gamma^u_{sr} + \\
&\quad + \frac{1}{3}(a^s_{kj} a^r_l + a^s_{lj} a^r_k + a^s_{kl} a^r_j) b^i_u \Gamma^q_{pr} h_{sq} h^{up} + \\
&\quad + \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^s_j a^r_l + a^p_{jq} a^s_k a^r_l + a^p_{lq} a^s_j a^r_k) b^i_u b^q_v h^{uv} h_{pt} \Gamma^t_{sr} + \\
&\quad + \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^r_{jl} + a^p_{lq} a^r_{jk} + a^p_{jq} a^r_{kl}) b^i_a b^q_b h_{pr} h^{ab}, \\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_\eta c^\delta_\omega R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
\overline{S}^\sigma_{\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\nu c^\beta_\eta c^\gamma_\omega d^\sigma_\delta S^\delta_{\alpha\beta\gamma} + c^\varrho_{\nu\eta\omega} d^\sigma_\varrho + \\
&\quad + (c^\phi_\nu c^\varrho_{\eta\omega} + c^\phi_\eta c^\varrho_{\nu\omega} + c^\phi_\omega c^\varrho_{\eta\nu}) d^\sigma_\varepsilon \Gamma^\varepsilon_{\phi\varrho} +
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{3}(c^{\phi}_{\eta\nu}c^{\varrho}_{\omega}+c^{\phi}_{\omega\nu}c^{\varrho}_{\eta}+c^{\phi}_{\eta\omega}c^{\varrho}_{\nu})d^{\sigma}_{\varepsilon}\Gamma^{\zeta}_{\pi\varrho}g_{\phi\zeta}g^{\varepsilon\pi}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\pi}_{\eta\xi}c^{\phi}_{\nu}c^{\varrho}_{\omega}+c^{\pi}_{\nu\xi}c^{\phi}_{\eta}c^{\varrho}_{\omega}+c^{\pi}_{\omega\xi}c^{\phi}_{\nu}c^{\varrho}_{\eta})d^{\sigma}_{\varepsilon}d^{\xi}_{\chi}g^{\varepsilon\chi}g_{\pi\zeta}\Gamma^{\zeta}_{\phi\varrho}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\pi}_{\eta\xi}c^{\varrho}_{\nu\omega}+c^{\pi}_{\omega\xi}c^{\varrho}_{\nu\eta}+c^{\pi}_{\nu\xi}c^{\varrho}_{\eta\omega})d^{\sigma}_{\alpha}d^{\xi}_{\beta}g_{\pi\varrho}g^{\alpha\beta},\\
\overline{Q}^{\sigma}_{jkl} = {} & d^{\sigma}_{\alpha}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}Q^{\alpha}_{abc}+\\
& +d^{\sigma}_{\alpha}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}c^{\alpha}_{\nu\eta}(d^{\nu}_{\pi\xi}d^{\eta}_{\phi}+d^{\nu}_{\pi\phi}d^{\eta}_{\xi}+d^{\nu}_{\phi\xi}d^{\eta}_{\pi})f^{\pi}_{a}f^{\xi}_{b}f^{\phi}_{c}+\\
& +d^{\sigma}_{\alpha}(a^{s}_{j}a^{r}_{kl}+a^{s}_{k}a^{r}_{lj}+a^{s}_{l}a^{r}_{kj})f^{\alpha}_{c}\Gamma^{c}_{sr}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{s}_{kj}a^{r}_{l}+a^{s}_{lj}a^{r}_{k}+a^{s}_{kl}a^{r}_{j})f^{\alpha}_{c}\Gamma^{t}_{pr}h_{st}h^{cp}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{p}_{kq}a^{s}_{j}a^{r}_{l}+a^{p}_{jq}a^{s}_{k}a^{r}_{l}+a^{p}_{lq}a^{s}_{j}a^{r}_{k})f^{\alpha}_{c}h^{cv}b^{q}_{v}h_{pt}\Gamma^{t}_{sr}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{p}_{kq}a^{r}_{jl}+a^{p}_{lq}a^{r}_{jk}+a^{p}_{jq}a^{r}_{kl})f^{\alpha}_{c}h^{cv}b^{q}_{v}h_{pr}-\\
& -[(c^{\delta}_{\nu}d^{\beta}_{\eta\omega}+c^{\delta}_{\eta}c^{\beta}_{\nu\omega}+c^{\delta}_{\omega}c^{\beta}_{\nu\eta})\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\delta}_{\nu\eta}c^{\beta}_{\omega}+c^{\delta}_{\nu\omega}c^{\beta}_{\eta}+c^{\delta}_{\eta\omega}c^{\beta}_{\nu})\Gamma^{\zeta}_{\gamma\beta}g_{\delta\zeta}g^{\alpha\gamma}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\delta}_{\eta\varepsilon}c^{\beta}_{\nu}c^{\gamma}_{\omega}+c^{\delta}_{\nu\varepsilon}c^{\beta}_{\eta}c^{\gamma}_{\omega}+c^{\delta}_{\omega\varepsilon}c^{\beta}_{\nu}c^{\gamma}_{\eta})d^{\varepsilon}_{\varrho}g^{\alpha\varrho}g_{\delta\zeta}\Gamma^{\zeta}_{\beta\gamma}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\delta}_{\eta\varepsilon}c^{\beta}_{\nu\omega}+c^{\delta}_{\omega\varepsilon}c^{\beta}_{\nu\eta}+c^{\delta}_{\nu\varepsilon}c^{\beta}_{\eta\omega})d^{\varepsilon}_{\varrho}g^{\alpha\varrho}g_{\delta\beta}]\times\\
& \times d^{\sigma}_{\alpha}d^{\nu}_{\pi}d^{\eta}_{\xi}d^{\omega}_{\phi}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}f^{\pi}_{a}f^{\xi}_{b}f^{\phi}_{c}-\\
& -d^{\sigma}_{\alpha\beta}[(f^{\alpha}_{ab}f^{\beta}_{c}+f^{\alpha}_{ac}f^{\beta}_{b}+f^{\alpha}_{bc}f^{\beta}_{a})a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}+\\
& +f^{\alpha}_{a}f^{\beta}_{b}(a^{a}_{jl}a^{b}_{k}+a^{a}_{j}a^{b}_{kl}+a^{a}_{jk}a^{b}_{l})]-\\
& -d^{\sigma}_{\alpha}(a^{a}_{jk}a^{b}_{l}+a^{a}_{jl}a^{b}_{k}+a^{a}_{j}a^{b}_{kl})f^{\alpha}_{ab}.
\end{aligned}
$$

Odvodíme zde pouze vztah pro souřadnici Q^{σ}_{jkl}. Vztah pro K^{σ}_{jk} byl odvozen v kapitole 2.4.

$$
\begin{aligned}
\overline{Q}^{\sigma}_{jkl} &= \overline{S}^{i}_{jkl}\overline{f}^{\sigma}_{i}-\overline{S}^{\sigma}_{\nu\eta\omega}\overline{f}^{\nu}_{j}\overline{f}^{\eta}_{k}\overline{f}^{\omega}_{l}-\overline{f}^{\sigma}_{jkl}=\\
&= a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}b^{i}_{p}d^{\sigma}_{\alpha}a^{d}_{i}S^{p}_{abc}f^{\alpha}_{d}+a^{r}_{jkl}b^{i}_{r}a^{c}_{i}d^{\sigma}_{\alpha}f^{\alpha}_{c}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+d^\sigma_\alpha(a^s_j a^r_{kl} + a^s_k a^r_{lj} + a^s_l a^r_{kj})b^i_u a^c_i f^\alpha_c \Gamma^u_{sr} + \\
&+\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^s_{kj}a^r_l + a^s_{lj}a^r_k + a^s_{kl}a^r_j)b^i_u a^c_i f^\alpha_c \Gamma^t_{pr}h_{st}h^{up} + \\
&+\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^p_{kq}a^s_j a^r_l + a^p_{jq}a^s_k a^r_l + a^p_{lq}a^s_j a^r_k)b^i_u a^c_i f^\alpha_c h^{uv}b^q_v h_{pt}\Gamma^t_{sr} + \\
&+\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^p_{kq}a^r_{jl} + a^p_{lq}a^q_{jk} + a^p_{jq}a^q_{kl})b^i_u a^c_i f^\alpha_c h^{uv}b^q_v h_{pr} - \\
&-c^\alpha_\nu c^\beta_\eta c^\gamma_\omega d^\sigma_\delta d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi a^a_j a^b_k a^c_l S^\delta_{\alpha\beta\gamma} f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c - \\
&-c^\alpha_{\nu\eta\omega}d^\sigma_\alpha d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi a^a_j a^b_k a^c_l f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c - \\
&-[(c^\delta_\nu c^\beta_{\eta\omega} + c^\delta_\eta c^\beta_{\nu\omega} + c^\delta_\omega c^\beta_{\nu\eta})\Gamma^\alpha_{\delta\beta} + \\
&+\frac{1}{3}(c^\delta_{\nu\eta}c^\beta_\omega + c^\delta_{\nu\omega}c^\beta_\eta + c^\delta_{\eta\omega}c^\beta_\nu)\Gamma^\zeta_{\gamma\beta}g_{\delta\zeta}g^{\alpha\gamma} + \\
&+\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon}c^\beta_\nu c^\gamma_\omega + c^\delta_{\nu\varepsilon}c^\beta_\eta c^\gamma_\omega + c^\delta_{\omega\varepsilon}c^\beta_\nu c^\gamma_\eta)d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho}g_{\delta\zeta}\Gamma^\zeta_{\beta\gamma} + \\
&+\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon}c^\beta_{\nu\omega} + c^\delta_{\omega\varepsilon}c^\beta_{\nu\eta} + c^\delta_{\nu\varepsilon}c^\beta_{\eta\omega})d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho}g_{\delta\beta}] \times \\
&\times d^\sigma_\alpha d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi a^a_j a^b_k a^c_l f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c - d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k a^c_l f^\alpha_{abc} - \\
&-d^\sigma_{\alpha\beta\gamma}a^a_j a^b_k a^c_l f^\alpha_a f^\beta_b f^\gamma_c - d^\sigma_\alpha a^q_{jkl}f^\alpha_q - \\
&-d^\sigma_{\alpha\beta}[(f^\alpha_{ab}f^\beta_c + f^\alpha_{ac}f^\beta_b + f^\alpha_{bc}f^\beta_a)a^a_j a^b_k a^c_l + \\
&+f^\alpha_a f^\beta_b(a^a_{jl}a^b_k + a^a_j a^b_{kl} + a^a_{jk}a^b_l)] - \\
&-d^\sigma_\alpha(a^a_{jk}a^b_l + a^a_{jl}a^b_k + a^a_j a^b_{kl})f^\alpha_{ab} = \\
= \quad & d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k a^c_l(S^q_{abc}f^\alpha_q - S^\alpha_{\delta\beta\gamma}f^\delta_a f^\beta_b f^\gamma_c - f^\alpha_{abc}) + \\
&+d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k a^c_l c^\alpha_{\nu\eta}(d^\nu_{\pi\xi}d^\eta_\phi + d^\nu_{\pi\phi}d^\eta_\xi + d^\nu_{\phi\xi}d^\eta_\pi)f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c + \\
&+d^\sigma_\alpha(a^s_j a^r_{kl} + a^s_k a^r_{lj} + a^s_l a^r_{kj})f^\alpha_c \Gamma^c_{sr} + \\
&+\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^s_{kj}a^r_l + a^s_{lj}a^r_k + a^s_{kl}a^r_j)f^\alpha_c \Gamma^t_{pr}h_{st}h^{cp} + \\
&+\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^p_{kq}a^s_j a^r_l + a^p_{jq}a^s_k a^r_l + a^p_{lq}a^s_j a^r_k)f^\alpha_c h^{cv}b^q_v h_{pt}\Gamma^t_{sr} + \\
&+\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^p_{kq}a^r_{jl} + a^p_{lq}a^r_{jk} + a^p_{jq}a^r_{kl})f^\alpha_c h^{cv}b^q_v h_{pr} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-[(c^\delta_\nu d^\beta_{\eta\omega} + c^\delta_\eta c^\beta_{\nu\omega} + c^\delta_\omega c^\beta_{\nu\eta})\Gamma^\alpha_{\delta\beta} + \\
&+\frac{1}{3}(c^\delta_{\nu\eta} c^\beta_\omega + c^\delta_{\nu\omega} c^\beta_\eta + c^\delta_{\eta\omega} c^\beta_\nu)\Gamma^\zeta_{\gamma\beta} g_{\delta\zeta} g^{\alpha\gamma} + \\
&+\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon} c^\beta_\nu c^\gamma_\omega + c^\delta_{\nu\varepsilon} c^\beta_\eta c^\gamma_\omega + c^\delta_{\omega\varepsilon} c^\beta_\nu c^\gamma_\eta) d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho} g_{\delta\zeta} \Gamma^\zeta_{\beta\gamma} + \\
&+\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon} c^\beta_{\nu\omega} + c^\delta_{\omega\varepsilon} c^\beta_{\nu\eta} + c^\delta_{\nu\varepsilon} c^\beta_{\eta\omega}) d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho} g_{\delta\beta}] \times \\
&\times d^\sigma_\alpha d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi a^a_j a^b_k a^c_l f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c - \\
&-d^\sigma_{\alpha\beta}[(f^\alpha_{ab} f^\beta_c + f^\alpha_{ac} f^\beta_b + f^\alpha_{bc} f^\beta_a) a^a_j a^b_k a^c_l + \\
&+f^\alpha_a f^\beta_b (a^a_{jl} a^b_k + a^a_j a^b_{kl} + a^a_{jk} a^b_l)] - \\
&-d^\sigma_\alpha (a^a_{jk} a^b_l + a^a_{jl} a^b_k + a^a_j a^b_{kl}) f^\alpha_{ab}.
\end{aligned}
$$

Ve výpočtu bylo využito následujících rovností:

$$
\begin{aligned}
d^\sigma_{\pi\xi\phi} &= -d^\sigma_\alpha d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi c^\alpha_{\nu\eta\omega} - d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}(d^\nu_{\pi\xi} d^\eta_\phi + d^\nu_{\pi\phi} d^\eta_\xi + d^\nu_{\xi\phi} d^\eta_\pi), \\
d^\sigma_{\nu\eta} &= -c^\alpha_{\beta\gamma} d^\sigma_\alpha d^\beta_\nu d^\gamma_\eta, \\
a^i_k b^k_j &= \delta^i_j, \\
c^\alpha_\beta d^\beta_\gamma &= \delta^\alpha_\gamma.
\end{aligned}
$$

Nechť $\pi^{3,2}_n$ resp. $\pi^{3,2}_m$ je projekce $L^3_n \to L^2_n$ resp. $L^3_m \to L^2_m$. Označme $K^{3,2}_n$ resp. $K^{3,2}_m$ jádro této projekce. Množina $(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m) \subset (L^3_n \times L^3_m)$ je tvořena prvky $((\delta^i_j, 0, a^i_{jkl}), (\delta^\sigma_\nu, 0, c^\sigma_{\nu\eta\omega}))$ a je normální podgrupou grupy $L^3_n \times L^3_m$. Zúžením akce grupy na tuto podgrupu dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= h_{ij}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= f^\sigma_i, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk}, \\
\overline{R}_{ijkl} &= R_{ijkl}, \qquad (2.10) \\
\overline{S}^i_{jkl} &= S^i_{jkl} + a^i_{jkl},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\eta} &= \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}, \\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= R_{\sigma\nu\eta\omega}, \\
\overline{S}^{\sigma}_{\nu\eta\omega} &= S^{\sigma}_{\nu\eta\omega} + c^{\sigma}_{\nu\eta\omega}, \\
\overline{K}^{\sigma}_{jk} &= K^{\sigma}_{jk}, \\
\overline{Q}^{\sigma}_{jkl} &= Q^{\sigma}_{jkl}.
\end{aligned}$$

Analogicky jako v kapitole 2.4 je ze vztahů (2.10) vidět, že každou třídu $Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$ lze jednoznačně reprezentovat souborem souřadnic $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}$, f^{σ}_j, K^{σ}_{jk}, Γ^i_{jk}, $\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}$, R_{ijkl}, $R_{\sigma\nu\eta\omega}$, $Q^{\sigma}_{jkl})$. Na množině $Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$ definujeme levou akci grupy $L^2_n \times L^2_m$ vztahem:

$$(A, C) \cdot [q] = [(i^{2,3}_n A, i^{2,3}_m C) \cdot q],$$

kde $i^{2,3}_n : L^2_n \to L^3_n$ resp. $i^{2,3}_m : L^2_m \to L^3_m$ je kanonické vložení. Dokážeme, že akce je korektně definována, t.j. nezávisí na volbě reprezentanta q a platí

$$(A, C)((S, T) \cdot [q]) = (AS, CT) \cdot [q]. \tag{2.11}$$

Nezávislost na volbě reprezentanta je zřejmá ze vztahů (2.10) a (2.9), dále platí

$$(\pi^{3,2}_n(i^{2,3}_n A \cdot i^{2,3}_n S), \pi^{3,2}_m(i^{2,3}_m C \cdot i^{2,3}_m T)) = (\pi^{3,2}_n i^{2,3}_n(AS), (\pi^{3,2}_m i^{2,3}_m(CT)),$$

tedy

$$[(i^{2,3}_n A \cdot i^{2,3}_n S, i^{2,3}_m C \cdot i^{2,3}_m T) \cdot q] = [(i^{2,3}_n(AS), i^{2,3}_m(CT)) \cdot q],$$

což implikuje vztah (2.11).

Vztah (1.4) definuje levou akci grupy $(L^3_n \times L^3_n)/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$ na množině $Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$.

Věta 2.11 *Nechť $\pi : Q^2 \to Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$ je faktorová projekce. Ke každému diferenciálnímu invariantu L druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé $(L^2_n \times L^2_m)$ varietě $\mathcal{P}$ existuje právě jedno $(L^2_n \times L^2_m)$-ekvivariantní zobrazení $l : Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m) \to \mathcal{P}$ splňující $L = l \circ \pi$.*

Důkaz: Věta je důsledkem vět 1.2 a 1.5. Zde značíme $G = L^3_n \times L^3_m$, $Q = Q^2$, $F = L$, $f = l$, $\beta = \pi^{3,2}_n \times \pi^{3,2}_m$ a podle věty 1.5 $G/K = (L^3_n \times L^3_m)/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m) \sim L^2_n \times L^2_m$. Předpoklady věty 1.2 jsou tedy splněny.

♡

Věta 2.12 *Každý diferenciální invariant druhého řádu z vnoření variet s metrikou lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic* $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^\sigma_j, K^\sigma_{jk}, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, Q^\sigma_{jkl})$.

Důkaz: Věta je přímým důsledkem věty 2.11.

♡

Souřadnice h_{ij}, $g_{\sigma\nu}$, K^σ_{ij}, f^σ_i, Γ^i_{jk}, $\Gamma^\sigma_{\nu\eta}$, R_{ijkl}, $R_{\sigma\nu\eta\omega}$, Q^σ_{jkl}) tvoří tzv. *bázi invariantů druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé $L^2_n \times L^2_m$-varietě.*

2.10 Diferenciální invarianty druhého řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě

Místo souřadnic

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^\sigma_i, h_{ij,k}, g_{\sigma\nu,\eta}, f^\sigma_{jk}, h_{ij,kl}, g_{\sigma\nu,\eta\omega}, f^\sigma_{jkl})$$

zvolme na Q^2 nové souřadnice

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^\sigma_i, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S^i_{jkl}, S^\sigma_{\nu\eta\omega}, K^\sigma_{jk}, P^\sigma_{jkl}),$$

přičemž transformační vztahy jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f^\sigma_i &= f^\sigma_i, \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \frac{1}{2}(h_{il,jk} + h_{jk,il} - h_{ik,jl} - h_{jl,ik}) + h_{bc}(\Gamma^b_{jk}\Gamma^c_{il} - \Gamma^b_{jl}\Gamma^c_{ik}), \\
S^i_{jkl} &= h^{iq}[\frac{1}{3}(h_{qj,kl} + h_{ql,jk} + h_{qk,lj}) - \frac{1}{6}(h_{jk,lq} + h_{lj,kq} + h_{kl,jq})], \\
\Gamma^\sigma_{\nu\eta} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha}), \\
R_{\sigma\nu\eta\omega} &= \frac{1}{2}(g_{\sigma\omega,\nu\eta} + g_{\nu\eta,\sigma\omega} - g_{\sigma\eta,\nu\omega} - g_{\nu\omega,\sigma\eta}) + g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\nu\eta}\Gamma^\beta_{\sigma,\omega} - \Gamma^\alpha_{\nu\omega}\Gamma^\beta_{\sigma\eta}), \\
S^\sigma_{\nu\eta\omega} &= g^{\alpha\sigma}[\frac{1}{3}(g_{\alpha\nu,\eta\omega} + g_{\alpha\omega,\nu\eta} + g_{\alpha\eta,\omega\nu}) - \frac{1}{6}(g_{\nu\eta,\omega\alpha} + g_{\omega\nu,\eta\alpha} + g_{\eta\omega,\nu\alpha})], \\
K^\sigma_{jk} &= \Gamma^i_{jk}f^\sigma_i - \Gamma^\sigma_{\nu\eta}f^\nu_j f^\eta_k - f^\sigma_{jk}, \\
P^\sigma_{ijk} &= \frac{1}{3}[\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(f^\alpha_k K^\beta_{ij} + f^\alpha_j K^\beta_{ik} + f^\alpha_i K^\beta_{jk}) - \\
&\quad -2(K^\sigma_{qj}\Gamma^q_{ki} + K^\sigma_{qk}\Gamma^q_{ji} + K^\sigma_{qi}\Gamma^q_{kj}) + \\
&\quad +K^\sigma_{ij,k} + K^\sigma_{ik,j} + K^\sigma_{jk,i}].
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
K^\sigma_{ij,k} &= \Gamma^q_{ij,k}f^\sigma_q + \Gamma^q_{ij}f^\sigma_{qk} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta,\gamma}f^\alpha_i f^\beta_j f^\gamma_k - \\
&\quad -\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(f^\alpha_{ik}f^\beta_j + f^\alpha_i f^\beta_{jk}) - f^\sigma_{ijk}, \\
\Gamma^q_{ij,k} &= -h_{ab,k}h^{bq}\Gamma^a_{ij} + \frac{1}{2}h^{cq}(h_{ci,jk} + h_{cj,ik} - h_{ij,ck}), \\
\Gamma^\sigma_{\alpha\beta,\gamma} &= -g_{\nu\eta,\gamma}g^{\nu\sigma}\Gamma^\eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\kappa\sigma}(g_{\kappa\alpha,\beta\gamma} + g_{\kappa\beta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\beta,\kappa\gamma}).
\end{aligned}$$

Souřadnice Γ^i_{jk},$\Gamma^\sigma_{\nu\eta}$, K^σ_{jk}, P^σ_{jkl}, S^i_{jkl}, $S^\sigma_{\nu\eta\omega}$ jsou symetrické v dolních indexech, souřadnice R_{ijkl}, resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega}$ jsou antisymetrické v prvních dvou indexech, antisymetrické v posledních dvou indexech a symetrické vůči záměně první a druhé dvojice indexů, navíc splňují rovnost $R_{ijkl} + R_{iljk} - R_{kilj} = 0$ resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega} + R_{\sigma\omega\eta\nu} - R_{\eta\sigma\omega\nu} = 0$. Ukážeme, že nové souřadnice definují na Q^2 globální souřadnicový systém (Q^2, Ψ). Platí

$$h^{ij}h_{jk} = \delta^i_k,$$

$$g^{\sigma\nu}g_{\nu\eta} = \delta^\sigma_\eta.$$

Inverzní transformace je dána rovnicemi:

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f_i^\sigma &= f_i^\sigma, \\
h_{ij,k} &= h_{iq}\Gamma^q_{jk} + h_{jq}\Gamma^q_{ik}, \\
g_{\sigma\nu,\eta} &= g_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\eta} + g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\eta}, \\
f^\sigma_{jk} &= \Gamma^i_{jk}f^\sigma_i - \Gamma^\sigma_{\nu\eta}f^\nu_j f^\eta_k - K^\sigma_{jk}, \\
h_{ij,kl} &= h_{iq}S^q_{jkl} + h_{jq}S^q_{ikl} - \frac{1}{3}(R_{ikjl} + R_{jkil}) + \\
&\quad + \frac{1}{3}h_{rq}(\Gamma^q_{il}\Gamma^r_{kj} + \Gamma^q_{jl}\Gamma^r_{ki} - 2\Gamma^q_{ij}\Gamma^r_{kl}), \\
g_{\sigma\nu,\eta\omega} &= g_{\sigma\alpha}S^\alpha_{\nu\eta\omega} + g_{\nu\alpha}S^\alpha_{\sigma\eta\omega} - \frac{1}{3}(R_{\sigma\eta\nu\omega} + R_{\nu\eta\sigma\omega}) + \\
&\quad + \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\sigma\omega}\Gamma^\beta_{\eta\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\omega}\Gamma^\beta_{\eta\sigma} - 2\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\beta_{\eta\omega}), \\
f^\sigma_{ijk} &= \frac{1}{3}[\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(f^\alpha_k K^\beta_{ij} + f^\alpha_j K^\beta_{ik} + f^\alpha_i K^\beta_{jk}) - \\
&\quad -2(K^\sigma_{qj}\Gamma^q_{ki} + K^\sigma_{qk}\Gamma^q_{ji} + K^\sigma_{qi}\Gamma^q_{kj}) + \\
&\quad + f^\sigma_q(\Gamma^q_{ij,k} + \Gamma^q_{ik,j} + \Gamma^q_{jk,i}) + \Gamma^q_{ij}f^\sigma_{qk} + \Gamma^q_{ik}f^\sigma_{qj} + \\
&\quad + \Gamma^q_{jk}f^\sigma_{iq} - (\Gamma^\sigma_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma^\sigma_{\beta\alpha,\gamma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma,\beta})f^\alpha_k f^\beta_i f^\gamma_j - \\
&\quad -2\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}(f^\beta_{ik}f^\gamma_j + f^\beta_{ij}f^\gamma_k + f^\beta_{kj}f^\gamma_i)] - P^\sigma_{ijk}.
\end{aligned}
$$

Přechody mezi souřadnicemi jsou hladké, složením obou vztahů lze prověřit, že se jedná o transformaci souřadnic. Zkontrolujeme počet nezávislých souřadnic:

$$
\begin{aligned}
\dim(h_{ij}, \Gamma^i_{jk}) &= \frac{1}{2}n(n+1)^2, \\
\dim(R_{ijkl}) &= \frac{n^2}{12}(n^2-1), \\
\dim(S^i_{jkl}) &= \frac{n^2}{6}(n+1)(n+2),
\end{aligned}
$$

$$N_2 = \dim(h_{ij}, \Gamma^i_{jk}, R_{ijkl}, S^i_{jkl}),$$

analogicky

$$M_2 = \dim(g_{\sigma\nu}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S^\sigma_{\nu\eta\omega}),$$

$$\begin{aligned}
\dim(f^\sigma_i) &= m \cdot n, \\
\dim(K^\sigma_{ij}) &= m \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \\
\dim(P^\sigma_{ijk}) &= m\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right), \\
P_2 &= \dim(f^\sigma_i, K^\sigma_{ij}, P^\sigma_{ijk}).
\end{aligned}$$

Akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ v nových souřadnicích je dána rovnicemi:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a^a_i a^b_j h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= b^i_a a^b_j a^c_k \Gamma^a_{bc} + b^i_l a^l_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= d^\sigma_\alpha c^\beta_\nu c^\gamma_\eta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= d^\sigma_\alpha a^p_j a^l_k K^\alpha_{pl}, \\
\overline{R}_{ijkl} &= a^a_i a^b_j a^c_k a^d_l R_{abcd}, \\
\overline{S}^i_{jkl} &= a^a_j a^b_k a^c_l b^i_d S^d_{abc} + a^r_{jkl} b^i_r + \\
&\quad + (a^s_j a^r_{kl} + a^s_k a^r_{jl} + a^s_l a^r_{kj}) b^i_u \Gamma^u_{sr} + \\
&\quad + \frac{1}{3}(a^s_{kj} a^r_l + a^s_{lj} a^r_k + a^s_{kl} a^r_j) b^i_u \Gamma^q_{pr} h_{sq} h^{up} + \\
&\quad + \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^s_j a^r_l + a^p_{jq} a^s_k a^r_l + a^p_{lq} a^s_j a^r_k) b^i_u b^q_v h^{uv} h_{pt} \Gamma^t_{sr} + \\
&\quad + \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^r_{jl} + a^p_{lq} a^r_{jk} + a^p_{jq} a^r_{kl}) b^i_a b^q_b h_{pr} h^{ab}, \\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_\eta c^\delta_\omega R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
\overline{S}^\sigma_{\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\nu c^\beta_\eta c^\gamma_\omega d^\sigma_\delta S^\delta_{\alpha\beta\gamma} + c^\varrho_{\nu\eta\omega} d^\sigma_\varrho +
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & & +(c_\nu^\phi c_{\eta\omega}^\varrho + c_\eta^\phi c_{\nu\omega}^\varrho + c_\omega^\phi c_{\eta\nu}^\varrho) d_\varepsilon^\sigma \Gamma_{\phi\varrho}^\varepsilon + \\
 & & +\frac{1}{3}(c_{\eta\nu}^\phi c_\omega^\varrho + c_{\omega\nu}^\phi c_\eta^\varrho + c_{\eta\omega}^\phi c_\nu^\varrho) d_\varepsilon^\sigma \Gamma_{\pi\varrho}^\zeta g_{\phi\zeta} g^{\varepsilon\pi} + \\
 & & +\frac{1}{3}(c_{\eta\xi}^\pi c_\nu^\phi c_\omega^\varrho + c_{\nu\xi}^\pi c_\eta^\phi c_\omega^\varrho + c_{\omega\xi}^\pi c_\nu^\phi c_\eta^\varrho) d_\varepsilon^\sigma d_\chi^\xi g^{\varepsilon\chi} g_{\pi\zeta} \Gamma_{\phi\varrho}^\zeta + \\
 & & +\frac{1}{3}(c_{\eta\xi}^\pi c_{\nu\omega}^\varrho + c_{\omega\xi}^\pi c_{\nu\eta}^\varrho + c_{\nu\xi}^\pi c_{\eta\omega}^\varrho) d_\alpha^\sigma d_\beta^\xi g_{\pi\varrho} g^{\alpha\beta}, \\
\overline{P}_{ijk}^\sigma & = & d_\alpha^\sigma a_i^a a_j^b a_k^c P_{abc}^\alpha.
\end{array}
$$

Odvodíme vztah pro souřadnici P_{ijk}^σ. Označme

$$T_{ijk}^\sigma = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma f_k^\alpha K_{ij}^\beta - K_{ai}^\sigma \Gamma_{kj}^a - K_{aj}^\sigma \Gamma_{ki}^a + K_{ij,k}^\sigma.$$

Dále platí

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{K}_{ij,k}^\sigma & = & a_i^a a_j^b a_k^c d_\alpha^\sigma K_{ab,c}^\alpha + a_i^a a_j^b a_k^c d_{\alpha\beta}^\sigma f_c^\beta K_{ab}^\alpha + \\
 & & +(a_{ik}^a a_j^b + a_i^a a_{jk}^b) d_\alpha^\sigma K_{ab}^\alpha.
\end{array}
$$

Dostáváme tedy

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{T}_{ijk}^\sigma & = & (c_\alpha^\xi c_\beta^\nu d_\omega^\sigma \Gamma_{\xi\nu}^\omega + c_{\alpha\beta}^\omega d_\omega^\sigma)(a_k^a d_\epsilon^\alpha f_a^\epsilon)(a_i^c a_j^d d_\varrho^\beta K_{cd}^\varrho) - \\
 & & -(a_k^t a_i^r b_s^a \Gamma_{tr}^s + a_{ki}^t b_t^a)(a_a^l a_j^f d_\varrho^\sigma K_{lf}^\varrho) \\
 & & -(a_k^t a_j^r b_s^a \Gamma_{tr}^s + a_{kj}^t b_t^a)(a_a^l a_i^f d_\varrho^\sigma K_{lf}^\varrho) + \\
 & & a_i^a a_j^b a_k^c d_\alpha^\sigma K_{ab,c}^\alpha + a_i^a a_j^b a_k^c d_{\alpha\beta}^\sigma f_c^\beta K_{ab}^\alpha + \\
 & & +(a_{ik}^a a_j^b + a_i^a a_{jk}^b) d_\alpha^\sigma K_{ab}^\alpha = \\
 & = & d_\alpha^\sigma a_k^a a_i^c a_j^d (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha f_a^\beta K_{cd}^\gamma - \Gamma_{ac}^q K_{qd}^\alpha - \Gamma_{ad}^q K_{qc}^\alpha + K_{cd,a}^\alpha) + \\
 & & +a_k^a a_i^c a_j^d d_\kappa^\alpha d_\nu^\beta d_\omega^\sigma c_{\alpha\beta}^\omega f_a^\kappa K_{cd}^\nu - a_{ki}^l a_j^f d_\alpha^\sigma K_{lf}^\alpha - a_{kj}^l a_i^f d_\alpha^\sigma K_{lf}^\alpha + \\
 & & +(a_{ki}^l a_j^f + a_{kj}^l a_i^f) d_\alpha^\sigma K_{lf}^\alpha + d_{\alpha\beta}^\sigma a_i^c a_j^d a_k^a f_a^\alpha K_{cd}^\beta = \\
 & = & d_\alpha^\sigma a_k^a a_i^c a_j^d T_{cda}^\alpha.
\end{array}
$$

Při výpočtu bylo využito vztahů

$$a_k^i b_j^k \;=\; \delta_j^i,$$

$$
\begin{aligned}
c^{\alpha}_{\beta} d^{\beta}_{\gamma} &= \delta^{\alpha}_{\gamma}, \\
d^{\sigma}_{\nu\eta} &= -c^{\alpha}_{\beta\gamma} d^{\sigma}_{\alpha} d^{\beta}_{\nu} d^{\gamma}_{\eta}.
\end{aligned}
$$

Platí $T^{\sigma}_{ijk} = T^{\sigma}_{jik}$ a $P^{\sigma}_{ijk} = \frac{1}{3}(T^{\sigma}_{ijk} + T^{\sigma}_{ikj} + T^{\sigma}_{kji})$, tedy

$$
\overline{P}^{\sigma}_{ijk} = a^a_i a^b_j a^c_k d^{\sigma}_{\alpha} P^{\alpha}_{abc}.
$$

Zúžením akce na podgrupu $K^3_n \times K^3_m$ (tj. pro $a^i_j = \delta^i_j$, $c^{\sigma}_{\nu} = \delta^{\sigma}_{\nu}$) dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= h_{ij}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
\overline{f}^{\sigma}_i &= f^{\sigma}_i, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + a^i_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\eta} &= \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} + c^{\sigma}_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^{\sigma}_{jk} &= K^{\sigma}_{jk}, \\
\overline{R}_{ijkl} &= R_{ijkl}, \\
\overline{S}^i_{jkl} &= S^i_{jkl} + a^i_{jkl} + \\
&\quad +(\delta^s_j a^r_{kl} + \delta^s_k a^r_{jl} + \delta^s_l a^r_{kj}) \delta^i_u \Gamma^u_{sr} + \\
&\quad +\frac{1}{3}(a^s_{kj} \delta^r_l + a^s_{lj} \delta^r_k + a^s_{kl} \delta^r_j) \delta^i_u \Gamma^q_{pr} h_{sq} h^{up} + \\
&\quad +\frac{1}{3}(a^p_{kq} \delta^s_j \delta^r_l + a^p_{jq} \delta^s_k \delta^r_l + a^p_{lq} \delta^s_j \delta^r_k) \delta^i_u \delta^q_v h^{uv} h_{pt} \Gamma^t_{sr} + \\
&\quad +\frac{1}{3}(a^p_{kq} a^r_{jl} + a^p_{lq} a^r_{jk} + a^p_{jq} a^r_{kl}) \delta^i_a \delta^q_b h_{pr} h^{ab}, \\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= R_{\sigma\nu\eta\omega}, \qquad (2.13) \\
\overline{S}^{\sigma}_{\nu\eta\omega} &= S^{\sigma}_{\nu\eta\omega} + c^{\sigma}_{\nu\eta\omega} + \\
&\quad +(\delta^{\phi}_{\nu} c^{\varrho}_{\eta\omega} + \delta^{\phi}_{\eta} c^{\varrho}_{\nu\omega} + \delta^{\phi}_{\omega} c^{\varrho}_{\eta\nu}) \delta^{\sigma}_{\varepsilon} \Gamma^{\varepsilon}_{\phi\varrho} + \\
&\quad +\frac{1}{3}(c^{\phi}_{\eta\nu} \delta^{\varrho}_{\omega} + c^{\phi}_{\omega\nu} \delta^{\varrho}_{\eta} + c^{\phi}_{\eta\omega} \delta^{\varrho}_{\nu}) \delta^{\sigma}_{\varepsilon} \Gamma^{\zeta}_{\pi\varrho} g_{\phi\zeta} g^{\varepsilon\pi} + \\
&\quad +\frac{1}{3}(c^{\pi}_{\eta\xi} \delta^{\phi}_{\nu} \delta^{\varrho}_{\omega} + c^{\pi}_{\nu\xi} \delta^{\phi}_{\eta} \delta^{\varrho}_{\omega} + c^{\pi}_{\omega\xi} \delta^{\phi}_{\nu} \delta^{\varrho}_{\eta}) \delta^{\sigma}_{\varepsilon} \delta^{\xi}_{\chi} g^{\varepsilon\chi} g_{\pi\zeta} \Gamma^{\zeta}_{\phi\varrho} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{3}(c^{\pi}_{\eta\xi}c^{\varrho}_{\nu\omega} + c^{\pi}_{\omega\xi}c^{\varrho}_{\nu\eta} + c^{\pi}_{\nu\xi}c^{\varrho}_{\eta\omega})\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\xi}_{\beta}g_{\pi\varrho}g^{\alpha\beta}, \\
\overline{P}^{\sigma}_{ijk} &= P^{\sigma}_{ijk}.
\end{aligned}
$$

Na základě platnosti vztahů (2.13), dospějeme analogickou úvahou jako v kapitole 2.4 k závěru, že každou třídu $[q]_{(K^3_n \times K^3_m)} \in Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ lze jednoznačně reprezentovat souborem souřadnic $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^{\sigma}_i, K^{\sigma}_{ij}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, P^{\sigma}_{ijk})$.

Věta 2.13 *Množina $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ má strukturu orbit-variety. Hladká struktura je dána globálním souřadnicovým systémem $(Q^2/(K^3_n \times K^3_m), \Theta)$, $\Theta = (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^{\sigma}_i, K^{\sigma}_{ij}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, P^{\sigma}_{ijk})$ a faktorová projekce $\pi : Q^2 \to Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ je submerze.*

Důkaz: $(K^3_n \times K^3_m)$-asociovanost globální souřadnicového systému (Q^2, Ψ) plyne přímo z jeho definice. Z definice ekvivalence $q_1 \sim q_2$ plyne, že ke každému $q_1, q_2 \in Q^2$, $[q_1] \neq [q_2]$ existují $(K^3_n \times K^3_m)$-invariantní otevřené množiny $W_{q_1}, W_{q_2} \subset Q^2$ takové, že $q_1 \in W_{q_1}$, $q_2 \in W_{q_2}$ a $W_{q_1} \cap W_{q_2} = \emptyset$, neboť topologie na Q^2 je euklidovská. Tvrzení tedy vyplývá z věty 1.3.

♡

Vztah (1.1) definuje na $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ levou akci grupy $H = i^3_n(L^1_n) \times i^3_m(L^1_m)$. Tato grupa je izomorfní s $L^1_n \times L^1_m$, izomorfismus je dán vtahem $\kappa : H \ni ((a^i_j, 0, 0), (c^{\sigma}_{\nu}, 0, 0)) \to ((a^i_j), (c^{\sigma}_{\nu})) \in L^1_n \times L^1_m$. Souřadnicové vyjádření akce je hladké, množina $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ má tedy strukturu levé $L^1_n \times L^1_m$-variety.

Uvažujme varietu

$$
\begin{gathered}
\mathcal{P}_2 = \mathrm{Met}(\mathbf{R}^n \times \mathrm{Met}(\mathbf{R}^m \times \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m) \times \\
\times (\mathbf{R}^n \odot \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^{m*}) \times P_n \times P_m \times (\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m)
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$, kde P_k je podprostor tenzorového prostoru $(\mathbf{R}^{k*} \wedge \mathbf{R}^{k*}) \odot (\mathbf{R}^{k*} \wedge \mathbf{R}^{k*})$ určený v kanonických souřadnicích rovnicí $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$, $i, j, k, l \in \{1, \ldots, k\}$.

Platí následující tvrzení:

Věta 2.14 *Levá $(L^1_n \times L^1_m)$-varieta $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ je izomorfní s $\mathcal{P}_2$.*

Důkaz: Uvažujme globální souřadnicový systém $(Q^2/(K^3_n \times K^3_m), \Theta)$ na $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ a kanonický globální souřadnicový systém na $\mathcal{P}_2$. Hledaný izomorfismus ι získáme, přiřadíme-li prvku $[q] \in Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ prvek prostoru $\mathcal{P}_2$ o stejných souřadnicích. Zobrazení ι je difeomorfismem, neboť jeho souřadnicové vyjádření je $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^{\dim \mathcal{P}_2}}$, $(L^1_n \times L^1_m)$-ekvivariantnost zobrazení ι plyne ze skutečnosti, že souřadnicové vyjádření levé akce grupy $L^1_n \times L^1_m$ je pro obě variety totožné.

♡

Věta 2.15 *Každý diferenciální invariant druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé $(L^1_n \times L^1_m)$-varietě lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic h_{ij}, $g_{\sigma\nu}$, f^σ_i, K^σ_{ij}, R_{ijkl}, $R_{\sigma\nu\eta\omega}$, P^σ_{ijk}.*

Důkaz: Tvrzení plyne ze vztahů (2.13), věty 2.2 a věty 1.1 následovně: Podle věty 2.2 je grupa $G = L^3_n \times L^3_m$, působící zleva na varietě Q^2 vnitřním semidirektním součinem svých podgrup $H = i^3_n(L^1_n) \times i^3_m(L^1_m)$ a $K = K^3_n \times K^3_m$. Nechť $g = (A, C) \in G$, v souřadnicích $g = ((a^i_j, a^i_{jk}, a^i_{jkl}), (c^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta}, c^\sigma_{\nu\eta\omega}))$. Pro zobrazení α, β definovaná v odstavci 1.1 platí $\alpha(g) = ((\delta^i_j, a^i_{jk}, a^i_{jkl}),$ $(\delta^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta}, c^\sigma_{\nu\eta\omega}))$, $\beta(g) = ((a^i_j, 0, 0)(c^\sigma_\nu, 0, 0)) = (i^3_n \circ \pi^3_n(A), i^3_m \circ \pi^3_m(C)) = ((i^3_n \circ \pi^3_n) \times (i^3_m \circ \pi^3_m))(g)$. Nechť $\mathcal{P}$ je libovolná levá $(L^1_n \times L^1_m)$-varieta. Grupa H je izomorfní s $L^1_n \times L^1_m$, lze tedy definovat její levou akci na $\mathcal{P}$ vztahem $((a^i_j, 0, 0), (c^\sigma_\nu, 0, 0)) \cdot p = (a^i_j, c^\sigma_\nu) \cdot p$, pro všechna $p \in \mathcal{P}$ a všechna $(a^i_j, c^\sigma_\nu) \in L^1_n \times L^1_m$. Dále, pro každý diferenciální invariant $L : Q^2 \to \mathcal{P}$ platí

$$L(g \cdot q) = L((A, C) \cdot q) = (\pi^3_n(A), \pi^3_m(C)) \cdot L(q) =$$
$$((i^3_n \circ \pi^3_n) \times (i^3_m \circ \pi^3_m))(g) \cdot L(q) = \beta(g) \cdot L(q)$$

pro libovolné $g = (A, C) \in G$ a libovolné $q \in Q^2$. Pro Q^2, $\mathcal{P}$, L jsou tedy splněny předpoklady věty 1.1. Jednoznačně určené H-ekvivariantní zobrazení $l : Q^2/(K^3_n \times K^3_m) \to \mathcal{P}$, zaručené větou 1.1, ovšem závisí pouze na souřadnicích na $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$, tj. na $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^\sigma_i, K^\sigma_{ij}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, P^\sigma_{ijk})$.

$\heartsuit$

Souřadnice $(h_{ij},\ g_{\sigma\nu},\ K^\sigma_{ij},\ f^\sigma_i,\ R_{ijkl},\ R_{\sigma\nu\eta\omega},\ P^\sigma_{jkl})$ tvoří tzv. *bázi invariantů druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě.*

2.11 Geometrický význam souřadnice P^σ_{ijk}

V tomto odstavci používáme stejného značení, jako v kapitole 2.5, f je injektivní vnoření, $\tilde{w}$ je rozšíření vektorového pole f_*w na otevřené okolí množiny $f(\mathcal{X})$, pro $w \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

Definujme objekty

$$T_f, P_f \in \mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \odot \mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$$

vztahem

$$T_f(x)(u,v,w,\omega) = \omega(f(x))[\nabla^g_{\tilde{w}}(K_f(u,v)) - K_f(\nabla^h_w u, v) - K_f(\nabla^h_w v, u)],$$

$$P_f(x)(u,v,w,\omega) = \frac{1}{3}(T_f(u,v,w,\omega) + T_f(u,w,v,\omega) + T_f(w,v,u,\omega)),$$

kde $u, v, w \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}), \omega \in \mathcal{Z}^*\mathcal{Y}$.

Věta 2.16 *Objekt P_f má lokální souřadnicové vyjádření*

$$P_f = P^\sigma_{ijk} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes_{f^*} \frac{\partial}{\partial y^\sigma},$$

kde

$$\begin{aligned} P^\sigma_{ijk}(x) &= \frac{1}{3}[\Gamma(g)^\sigma_{\alpha\beta}(f(x))(f^\alpha_k(x)K^\beta_{ij}(x) + f^\alpha_j(x)K^\beta_{ik}(x) + f^\alpha_i(x)K^\beta_{jk}(x)) - \\ &\quad -2(K^\sigma_{qj}(x)\Gamma(h)^q_{ki}(x) + K^\sigma_{qk}(x)\Gamma(h)^q_{ji}(x) + K^\sigma_{qi}(x)\Gamma(h)^q_{kj}(x)) + \\ &\quad +K^\sigma_{ij,k}(x) + K^\sigma_{ik,j}(x) + K^\sigma_{jk,i}(x)]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Důkaz: Zřejmě $P^\sigma_{ijk} = T^\sigma_{ijk} + T^\sigma_{ikj} + T^\sigma_{kij}$, kde T^σ_{ijk} jsou komponenty objektu T_f. Nechť $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $w = w^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Nechť $\omega = \omega_\sigma dy^\sigma$. Platí

$$\begin{aligned}
\nabla^g_{\tilde{w}}(K(u,v)) &= \nabla^g_{f^\alpha_k w^k \frac{\partial}{\partial y^\alpha}}(K^\sigma_{ij} u^i v^j \frac{\partial}{\partial y^\sigma}) = \\
&= (K^\sigma_{ij,k} + f^\alpha_k \Gamma(g)^\sigma_{\alpha\beta} K^\beta_{ij}) u^i v^j w^k + K^\sigma_{ij}(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} v^j + u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^k}) w^k, \\
K(\nabla^h_w v, u) &= K^\sigma_{aj} \Gamma(h)^a_{ik} u^i v^j w^k + K^\sigma_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} v^j w^k, \\
K(\nabla^h_w u, v) &= K^\sigma_{ai} \Gamma(h)^a_{jk} u^i v^j w^k + K^\sigma_{ij} u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^k} w^k,
\end{aligned}$$

Získáváme tedy $T_f(u,v,w,\omega) = T^\sigma_{ijk} u^i v^j w^k \omega_\sigma$, kde

$$T^\sigma_{ijk} = K^\sigma_{ij,k} + f^\alpha_k \Gamma(g)^\sigma_{\alpha\beta} K^\beta_{ij} - K^\sigma_{aj} \Gamma(h)^a_{ik} - K^\sigma_{ai} \Gamma(h)^a_{jk}.$$

A pro P^σ_{ijk} platí vztah (2.15).

♡

Poznámka: P_f můžeme chápat jako symetrické trilineární zobrazení $\mathcal{Z}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$,

$$P_f(u,v,w) = P^\sigma_{ijk} u^i v^j w^k \frac{\partial}{\partial y^\sigma},$$

kde $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $w = w^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

C. Invarianty obecného řádu

2.12 Akce grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$ na typové vrstvě Q^r v kanonických souřadnicích

Kanonické souřadnice na Q^r označujeme

$$h_{ij}, h_{ij,k_1}, \dots, h_{ij,k_1\dots k_r}, g_{\sigma\nu}, g_{\sigma\nu,\eta_1}, \dots, g_{\sigma\nu,\eta_1,\dots,\eta_r}, f^\sigma_{k_1}, \dots, f^\sigma_{k_1,\dots,k_{r+1}},$$

latinské indexy probíhají soubor hodnot $\{1,\dots,n\}$, řecké indexy probíhají soubor hodnot $\{1,\dots,m\}$. Akci grupy $L_n^{r+1}\times L_m^{r+1}$ v kanonických souřadnicích získáme následujícím rekurentním výpočtem.

Nechť pro $1<s\le r+1$ platí

$$\overline{f}^{\sigma}_{k_1\dots k_{s-1}} = p(a^i_{k_1},\dots,a^i_{k_1\dots k_{s-1}},d^{\sigma}_{\nu_1},\dots,d^{\sigma}_{\nu_1\dots\nu_{s-1}},f^{\nu}_{i_1},\dots,f^{\nu}_{i_1\dots i_{s-1}}),$$

pak

$$\overline{f}^{\sigma}_{k_1\dots k_s} = \sum_{t=1}^{s-1}\left(\frac{\partial p}{\partial a^i_{j_1\dots j_t}}a^i_{j_1\dots j_t k_s}+\frac{\partial p}{\partial d^{\alpha}_{\nu_1\dots\nu_t}}d^{\alpha}_{\nu_1\dots\nu_t\beta}f^{\beta}_c a^c_{k_s}+\frac{\partial p}{\partial f^{\alpha}_{i_1\dots i_t}}f^{\alpha}_{i_1\dots i_t c}a^c_{k_s}\right).$$

Nechť pro $1\le s\le r$ platí

$$\begin{aligned}\overline{h}_{ij,k_1\dots k_{s-1}} &= p^{ab}(a^i_j,a^i_{jk_1},\dots,a^i_{jk_1,\dots k_{s-1}})h_{ab}+\dots+\\ &\quad +p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}(a^i_j,a^i_{jk_1},\dots,a^i_{jk_1,\dots k_{s-1}})h_{ab,i_1\dots i_{s-1}},\end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned}\overline{h}_{ij,k_1\dots k_s} &= \left(\frac{\partial p^{ab}}{\partial a^i_j}a^i_{jk_s}+\dots+\frac{\partial p^{ab}}{\partial a^i_{jk_1\dots k_{s-1}}}a^i_{jk_1\dots k_{s-1}k_s}\right)h_{ab}+\\ &\quad +p^{ab}a^c_{k_s}h_{ab,c}+\dots+\left(\frac{\partial p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}}{\partial a^i_j}a^i_{jk_s}+\right.\\ &\quad \left.+\dots+\frac{\partial p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}}{\partial a^i_{jk_1\dots k_{s-1}}}a^i_{jk_1\dots k_{s-1}k_s}\right)h_{ab,i_1\dots i_{s-1}}+\\ &\quad +p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}a^{i_s}_{k_s}h_{ab,i_1\dots i_{s-1}i_s}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Analogicky nechť pro $1<s\le r$ platí

$$\begin{aligned}\overline{g}_{\sigma\nu,\eta_1\dots\eta_{s-1}} &= p^{\alpha\beta}(c^{\sigma}_{\nu},c^{\sigma}_{\nu\eta_1},\dots,c^{\sigma}_{\nu\eta_1,\dots\eta_{s-1}})g_{\alpha\beta}+\dots+\\ &\quad +p^{\alpha\beta,\sigma_1\dots\sigma_{s-1}}(c^{\sigma}_{\nu},c^{\sigma}_{\nu\eta_1},\dots,c^{\sigma}_{\nu\eta_1,\dots\eta_{s-1}})g_{\alpha\beta,\sigma_1\dots\sigma_{s-1}},\end{aligned}$$

pak

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{\sigma\nu,\eta_1\ldots\eta_s} &= \left(\frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial c^\sigma_\nu} c^\sigma_{\nu\eta_s} + \ldots + \frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}}} c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}\eta_s}\right) g_{\alpha\beta} + \\
&+ p^{\alpha\beta} c^\gamma_{\eta_s} g_{\alpha\beta,\gamma} + \ldots + \left(\frac{\partial p^{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}}}{\partial c^\sigma_\nu} c^\sigma_{\nu\eta_s} + \right. \\
&+ \ldots + \left. \frac{\partial p^{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}}}{\partial c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}}} c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}\eta_s}\right) g_{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}} + \\
&+ p^{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}} c^{\sigma_s}_{\eta_s} g_{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}\sigma_s}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

2.13 Invarianty obecného řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě

Místo kanonicých souřadnic $f^\sigma_{i_1\ldots i_s}$, $s \in \{1,\ldots,r+1\}$, $1 \le i_1 \le \ldots \le i_s \le n$, $\sigma \in \{1,\ldots,m\}$ zavedeme nové souřadnice rekurentními transformačními vztahy

$$
\begin{aligned}
K^\sigma_{i_1} &= f^\sigma_{i_1}, \\
K^\sigma_{i_1 i_2} &= S[K^\sigma_{i_1,i_2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} K^\alpha_{i_2} K^\beta_{i_1} - \Gamma^a_{i_2 i_1} K^\sigma_a], \\
&\vdots \\
K^\sigma_{i_1\ldots i_{r+1}} &= S[K^\sigma_{i_1\ldots i_r,i_{r+1}} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} K^\alpha_{i_{r+1}} K^\beta_{i_1\ldots i_r} - \\
&- \Gamma^a_{i_{r+1}i_1} K^\sigma_{a i_2\ldots i_r} - \Gamma^a_{i_{r+1}i_2} K^\sigma_{a i_1 i_3\ldots i_r} - \\
&- \ldots - \Gamma^a_{i_{r+1}i_r} K^\sigma_{a i_1\ldots i_{r-1}}].
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Nechť I_s je multiindex délky s, $s \in \{2,\ldots,r+1\}$. S použitím multiindexů můžeme vztahy (2.18) napsat ve tvaru

$$
K^\sigma_{I_{s-1}i_s} = S[K^\sigma_{I_{s-1},i_s} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} K^\alpha_{i_s} K^\beta_{I_{s-1}} - \sum_{i \in I_{s-1}} \Gamma^a_{i_s i} K^\sigma_{a(I_{s-1}\setminus\{i\})}].
$$

S značí symetrizaci ve všech dolních indexech, $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{im}(h_{mj,k} + h_{mk,j} - h_{jk,m})$, $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$. Ještě je potřeba říci, co značíme symbolem K_{I_{s-1},i_s}. Nechť $K = K(h_{ij,I_t}, g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}, f^\sigma_{I_{t+1}})$, kde I_t, Υ_t jsou multiindexy délky t, $t \in \{0,\dots,r-1\}$. Pak symbolem $K_{,u}$ značíme funkci danou vztahem

$$K_{,u} = \sum_{t=0}^{r-1} \left(\frac{\partial K}{\partial h_{ij,I_t}} h_{ij,I_t u} + \frac{\partial K}{\partial g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}} g_{\sigma\nu,\Upsilon_t \eta} f^\eta_u + \frac{\partial K}{\partial f^\sigma_{I_{t+1}}} f^\sigma_{I_{t+1}u} \right).$$

Z uvedené konstrukce je zřejmé, jak lze získat inverzní transformaci pro libovolné konečné r, přechody mezi souřadnicemi jsou hladké a jedná se o transformaci souřadnic. Souřadnice $K^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}}$ jsou symetrické v dolních indexech. Vybereme-li ze souřadnic $h_{ij,I_t}, g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}, K^\sigma_{I_{t+1}}), t \in \{1,\dots,r\}$ nezávislé, získáme globální souřadnicový systém (Q^r, Ψ'^r).

Nyní přepíšeme působení grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$ na Q^r v nových souřadnicích. Souřadnice h_{ij,I_t}, $g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}$ jsou totožné s kanonickými, platí pro ně tedy vztahy uvedené v kapitole 2.12. Odvodíme vztah pro působení grupy na souřadnici $K^\sigma_{I_{t+1}}$. Platí $\overline{K}^\sigma_i = a^a_i d^\sigma_\nu K^\nu_a$. Předpokládejme, že platí $\overline{K}^\sigma_{i_1\dots i_t} = a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_t}_{i_t} d^\sigma_\nu K^\nu_{j_1\dots j_t}$ pro nějaké $t \geq 1$ pak

$$\begin{aligned}
\overline{K}^\sigma_{i_1\dots i_t,i_{t+1}} &= a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu K^\nu_{j_1\dots j_t,j_{t+1}} + \\
&\quad + d^\sigma_\nu (a^{j_1}_{i_1 i_{t+1}} a^{j_2}_{i_2}\dots a^{j_t}_{i_t} + \dots + \\
&\quad + a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_{t-1}}_{i_{t-1}} a^{j_t}_{i_t i_{t+1}}) K^\nu_{i_1\dots i_t} + \\
&\quad + d^\sigma_{\nu\eta} f^\eta_c a^c_{i_{t+1}} a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_t}_{i_t} K^\nu_{j_1\dots j_t} \\
-\overline{\Gamma}^a_{i_{t+1}i_1} \overline{K}^\sigma_{ai_2\dots i_t} &= -a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu \Gamma^a_{j_{t+1}j_1} K^\nu_{aj_2\dots j_t} - \\
&\quad - a^a_{i_{t+1}i_1} a^{j_2}_{i_2}\dots a^{j_t}_{i_t} d^\sigma_\nu K^\nu_{aj_2\dots j_t} \\
&\vdots \\
-\overline{\Gamma}^a_{i_{t+1}i_t} \overline{K}^\sigma_{ai_1\dots i_{t-1}} &= -a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu \Gamma^a_{j_{t+1}j_t} K^\nu_{aj_1\dots j_{t-1}} - \\
&\quad - a^a_{i_{t+1}i_t} a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_{t-1}}_{i_{t-1}} d^\sigma_\nu K^\nu_{aj_1\dots j_{t-1}} \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta} \overline{K}^\alpha_{i_{t+1}} \overline{K}^\beta_{i_1\dots i_t} &= a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu \Gamma^\nu_{\alpha\beta} K^\alpha_{j_{t+1}} K^\beta_{j_1\dots j_t} + \\
&\quad + a^{j_1}_{i_1}\dots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} c^\gamma_{\nu\eta} d^\sigma_\gamma d^\nu_\alpha d^\eta_\beta K^\alpha_{j_{t+1}} K^\beta_{j_1\dots j_t}.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic a symetrizací v dolních indexech získáváme s využitím vztahu $d^\sigma_{\nu\eta} = -c^\gamma_{\alpha\beta} d^\sigma_\gamma d^\alpha_\nu d^\beta_\eta$:

$$\overline{K}^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}} = a^{j_1}_{i_1} \dots a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu K^\nu_{j_1\dots j_{t+1}}$$

pro libovolné $t \in \{0 \dots r\}$. Zúžením akce na podgrupu $K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m$ dostáváme pro tyto nové souřadnice $\overline{K}^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}} = K^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}}$.

Nechť $\mathcal{F}^{r+1}_{T^r_n \mathrm{Met}\mathbf{R}^n} \mathcal{X}$ resp. $\mathcal{F}^{r+1}_{T^r_m \mathrm{Met}\mathbf{R}^m} \mathcal{Y}$ je fibrovaný prostor metrik r-tého řádu na varietě $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$. Na typové vrstvě $T^r_n \mathrm{Met}\mathbf{R}^n$ působí grupa L^{r+1}_n, na typové vrstvě $T^r_m \mathrm{Met}\mathbf{R}^m$ působí grupa L^{r+1}_m. V kanonických souřadnicích je toto působení dáno vztahy (2.16) a (2.17).

Množiny $T^r_n \mathrm{Met}\mathbf{R}^n / K^{r+1}_n$ resp. $T^r_m \mathrm{Met}\mathbf{R}^m / K^{r+1}_m$ mají strukturu orbitvariety s globálním souřadnicovým systémem, viz. [15]. Tyto globální souřadnicové systémy označíme $(T^r_n \mathrm{Met}\mathbf{R}^n / K^{r+1}_n, \Phi^r_n)$, $\Phi^r_n = (R_I)$, $I = \{1, \dots, \dim(T^r_n(\mathrm{Met}\mathbf{R}^n / K^{r+1}_n)$ resp. $(T^r_m(\mathrm{Met}\mathbf{R}^m / K^{r+1}_m, \Phi^r_m)$, $\Phi^r_m = (R_\Sigma)$, $\Sigma = \{1, \dots, \dim(T^r_m(\mathrm{Met}\mathbf{R}^m / K^{r+1}_m)$. Souřadnice R_I resp. R_Σ tvoří bázi invariantů r-tého řádu z metrického tenzoru na n-rozměrné resp. $m-$rozměrné varietě.

Věta 2.17 *Množina $Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$ má strukturu orbitvariety, která je dána globálním souřadnicovým systémem $(Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m), \Phi^r)$, $\Phi^r = (R_I, R_\Sigma, K^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}})$, $t \in \{0, \dots r\}$, $\sigma \in \{1, \dots, m\}$, $1 \le i_1 \le \dots \le i_{t+1} \le n$, kde souřadnice R_I resp. R_Σ tvoří bázi invariantů r-tého řádu z metrického tenzoru na n-rozměrné resp. m-rozměrné varietě.*

Důkaz: Z předpokladů věty vyplývá, že každá třída $[q] \in Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$ je jednoznačně reprezentována souřadnicemi $R_I, R_\Sigma, K^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}}$, existuje tedy pokrytí množiny Q^r G-asociovanými souřadnicovými systémy a důkaz je analogický důkazu vět 2.3 a 2.13.

♡

Vztahem (1.1) je na množině $Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$ definována struktura levé $L^1_n \times L^1_m$-variety. Ze souřadnicového vyjádření této akce je zřejmé, že pro každé r existuje vektorový prostor $\mathcal{P}_r$ s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$, který je izomorfní s $Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$.

Věta 2.18 *Každý diferenciální invariant r tého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé $L^1_n \times L^1_m$ varietě lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic R_I, R_Σ, $K^\sigma_{i_1 \dots i_{t+1}}$.*

Důkaz: Důkaz je analogický důkazu vět 2.5 a 2.15.

♡

Souřadnice R_I, R_Σ, $K^\sigma_{i_1 \dots i_{t+1}}$ tvoří tzv. *bázi invariantů r-tého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě.*

2.14 Geometrický význam souřadnic $K^\sigma_{i_1 \dots i_{t+1}}$

V této kapitole používáme stejného značení, jako v kapitole 2.5. Nechť funkce $K^\sigma_{I_t}(x)$ reprezentují v nějakých lokálních souřadnicích lineární zobrazení

$$K^t_f : \times^t \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y}).$$

Pak funkce $K^\sigma_{I_{t+1}}(x)$ zavedené vztahy (2.18) reprezentují v těchto souřadnicích lineární zobrazení

$$K^{t+1}_f : \times^{t+1} \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y}),$$

které je dáno vztahem

$$K^{t+1}_f(u_1, \dots, u_{t+1}) = S[\nabla^g_{\tilde{u}_{t+1}} K^t_f(u_1, \dots, u_t) - K^t_f(\nabla^h_{u_{t+1}} u_1, u_2, \dots, u_t) -$$

$$- K^t_f(u_1, \nabla^h_{u_{t+1}} u_2, u_3, \dots, u_t) - \dots - K^t_f(u_1, \dots, u_{t-1}, \nabla^h_{u_{t+1}} u_t)],$$

kde S značí symetrizaci ve všech argumentech, $u_1, \dots, u_{t+1} \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Dokážeme toto tvrzení.

$$\begin{aligned}
\nabla^g_{\tilde{u}_{t+1}} K^t_f(u_1, \dots, u_t) &= \nabla^g_{f^\alpha_c u^c_{t+1} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}} (K^\sigma_{i_1 \dots i_t} u^{i_1}_1 \dots u^{i_t}_t) \\
&= (K^\sigma_{i_1 \dots i_t, i_{t+1}} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} f^\alpha_{i_{t+1}} K^\beta_{i_1 \dots i_t}) u^{i_1}_1 \dots u^{i_t}_1 u^{i_{t+1}}_{t+1} + \\
&\quad + K^\sigma_{i_1 \dots i_t} \left(\frac{\partial u^{i_1}_1}{\partial x^c} u^{i_2}_2 \dots u^{i_t}_t u^c_{t+1} + \dots + \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& & & +u_1^{i_1}\dots u_{t-1}^{i_{t-1}}\frac{\partial u_t^{i_t}}{\partial x^c}u_{t+1}^c\Big),\\
-K_f^t(\nabla^h_{u_{t+1}}u_1,\dots,u_t) &=& & -\Gamma^a_{i_{t+1}i_1}K^\sigma_{ai_2\dots i_t}u_1^{i_1}\dots u_t^{i_t}u_{t+1}^{i_{t+1}}-\\
& & & -K^\sigma_{i_1\dots i_t}\frac{\partial u_1^{i_1}}{\partial x^c}u_2^{i_2}\dots u_t^{i_t}u_{t+1}^c,\\
&\vdots& & \\
-K_f^t(u_1,\dots,\nabla^h_{u_{t+1}}u_t) &=& & -\Gamma^a_{i_{t+1}i_t}K^\sigma_{ai_1i_2\dots i_{t-1}}u_1^{i_1}\dots u_t^{i_t}u_{t+1}^{i_{t+1}}-\\
& & & -K^\sigma_{i_1\dots i_t}u_2^{i_2}\dots u_{t-1}^{i_{t-1}}\frac{\partial u_t^{i_t}}{\partial x^c}u_{t+1}^c.
\end{aligned}
$$

Sečtením těchto rovnic a symetrizací dostáváme

$$
\begin{aligned}
K_f^{t+1}(u_1,\dots,u_{t+1}) &= S[\nabla^g_{f_*u_{t+1}}K_f^t(u_1,\dots,u_t)-K_f^t(\nabla^h_{u_{t+1}}u_1,u_2,\dots,u_t)-\\
&-K_f^t(u_1,\nabla^h_{u_{t+1}}u_2,u_3,\dots,u_t)-\dots-K_f^t(u_1,\dots,u_{t-1},\nabla^h_{u_{t+1}})]=\\
&S[K^\sigma_{i_1\dots i_t,i_{t+1}}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}K^\alpha_{i_{t+1}}K^\beta_{i_1\dots i_t}-\Gamma^a_{i_{t+1}i_1}K^\sigma_{ai_2\dots i_t}-\dots-\\
&-\Gamma^a_{i_{t+1}i_t}K^\sigma_{ai_1\dots i_{t-1}}]u_1^{i_1}\dots u_{t+1}^{i_{t+1}}=K^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}}u_1^{i_1}\dots u_{t+1}^{i_{t+1}}.
\end{aligned}
$$

Zobrazení $K_f^1=f_*$, funkce K_i^σ reprezentují v souřadnicích tečné zobrazení. Zobrazení K_f^2 je až na znaménko totožné se zobrazením K_f zavedeným v kapitole 2.5 a K_f^3 je totožné se zobrazením P_f zavedeným v kapitole 2.11.

Kapitola 3

Využití invariantů ve fyzikálních teoriích

V této kapitole definujeme přirozenou Lagrangeovu strukturu a uvedeme tento pojem do souvislosti s diferenciálními invarianty, které byly studovány v kapitole 2. Ukáže se, že problém hledání přirozených Lagrangeových struktur se redukuje na hledání diferenciálních invariantů příslušných typových vrstev. Zavedeme pojem funkcionálu akce, dále se stručně zmíníme o konstrukci Lagrangiánů z báze invariantů nalezené v kapitole 2.4 a 2.10.

3.1 Přirozené Lagrangeovy struktury

Nechť $\mathcal{D}_n = (\mathrm{Ob}\mathcal{D}_n, \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n, \circ)$ je kategorie hladkých variet dimenze n a jejich vložení. Uvažujme kategorii $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m = (\mathrm{Ob}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Ob}\mathcal{D}_m, \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n, \circ \times \circ)$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Ob}\mathcal{D}_m$, $\alpha \times \beta \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Mor}\mathcal{D}_m$ a levou $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$-varietu Q^r, $r \geq 0$ ($Q^0 = Q$). $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}$ je pravý hlavní L^r_n-prostor reperů na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}$ je pravý hlavní L^r_m-postor reperů na $\mathcal{Y}$. Symbolem $\mathcal{F}^{r+1}\alpha$ resp. $\mathcal{F}^{r+1}\beta$ rozumíme $\mathcal{F}^{r+1}$-lifting zobrazení $\alpha : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ resp. $\beta : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$. Definujme následující přiřazení:

$$\mathcal{F}^{r+1}_{mn}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y},$$

$$\mathcal{F}^{r+1}_{mn}(\alpha \times \beta) \to \mathcal{F}^{r+1}\alpha \times \mathcal{F}^{r+1}\beta,$$

kde $\mathcal{F}^{r+1}$-lifting zobrazení $\alpha : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ je dán vztahem

$$\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_1 \ni j_0^{r+1}\zeta \to \mathcal{F}^{r+1}\alpha(j_0^{r+1}\zeta) = j_0^{r+1}(\alpha \circ \zeta) \in \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_2,$$

analogicky pro β. $\mathcal{F}^{r+1}_{mn}$ je kovariantní funktor z kategorie $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n$ do kategorie pravých hlavních $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$-prostorů. Definujme přiřazení

$$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r.$$

Pro morfismy $\alpha : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$, $\beta : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$ definujme $\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}$-lifting zobrazení $\alpha \times \beta$

$$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta) : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_1 \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}_1) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to$$

$$\to (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_2 \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}_2) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r,$$

vztahem

$$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta)([j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi, q]) = [j_0^{r+1}(\alpha \circ \zeta), j_0^{r+1}(\beta \circ \xi), q]$$

pro libovolné $j_0^{r+1}\zeta \in \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}$, $j_0^{r+1}\xi \in \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}$, $q \in Q^r$.

$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}$ je kovariantní funktor z kategorie $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ do kategorie asociovaných $(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)$-prostorů. Projekce označujeme následovně

$$\pi^{r+1}_{mn} = \pi^{r+1}_{\mathcal{X}} \times \pi^{r+1}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

$$\pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

$$p_1 \circ \pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to \mathcal{X}.$$

$$p_2 \circ \pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to \mathcal{Y}.$$

Definujme působení grupy $L^1_n \times L^1_m = GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})$ na $\mathbf{R}$ vztahem

$$(GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})) \times \mathbf{R} \ni ((A, C), t) \to |\det A|^{-1} \cdot t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Působení druhé komponenty grupy $L_n^1 \times L_m^1$ je triviální. Množina $\mathbf{R}$ s touto akcí má strukturu levé $L_n^1 \times L_m^1$-variety, kterou budeme označovat $\tilde{\mathbf{R}}$.

Přirozenou Lagrangeovou strukturou r-tého řádu budeme rozumět dvojici $(\mathcal{F}_{Q^r}^{r+1}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \lambda)$, $r \geq 0$, kde λ je zobrazení definované na otevřené podmnožině $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}_{Q^r}^{r+1}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$:

$$\lambda : \mathcal{W} \to \mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}}^1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$$

a splňující pro každé $\alpha \times \beta \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Mor}\mathcal{D}_m$, $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\beta : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$

1.
$$\mathcal{F}_{Q^r}^{r+1}(\alpha \times \beta)(\mathcal{W}) = \mathcal{W}, \tag{3.2}$$

2.
$$\lambda \circ \mathcal{F}_{Q^r}^{r+1}(\alpha \times \beta) = \mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}}^1(\alpha \times \beta) \circ \lambda. \tag{3.3}$$

Poznámka: Vzhledem k tomu, že druhá komponenta grupy $L_n^1 \times L_m^1$ působí na $\mathbf{R}$ triviálně a pro libovolné $y \in \mathcal{Y}$ a $j_0^1\zeta \in \mathcal{F}^1\mathcal{X}$ je její působení na $\{j_0^1\zeta\} \times \pi_{\mathcal{Y}}^{-1}(y)$ tranzitivní, můžeme množinu $\mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}}^1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ ztotožnit s množinou $\mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}'}^1\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, kde $\tilde{\mathbf{R}}'$ je levá L_n^1-varieta s akcí $L_n^1 \times \mathbf{R} \ni (A, t) \to |\det A|^{-1} \cdot t \in \mathbf{R}$ a $\mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}'}^1$ je $\tilde{\mathbf{R}}'$-lifting asociovaný $\mathcal{F}^1$-liftingem. Dále platí, že $\mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}'}^1\mathcal{X} \sim \mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}'}^1\mathcal{X} \otimes \Lambda^n T^*\mathcal{X}$ je prostor lichých n-forem na varietě $\mathcal{X}$. Jak se dále ukáže, zobrazení λ zachovává bázi, může být tedy zapsáno jako $\lambda = \lambda_{\mathcal{X}} \times (p_2 \circ \pi_{Q^r}^{r+1})$, kde $\lambda_{\mathcal{X}}$ přiřazuje každé třídě $[j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi, q] \in \mathcal{F}_{Q^r}^{r+1}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ lichou n-formu na $\mathcal{X}$, je tedy lagrangiánem v běžně užívaném smyslu.

Nechť $L : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$ je diferenciální invariant. *Realizací diferenciálního invariantu L na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$* nazveme zobrazení

$$\lambda_L : \mathcal{F}_{Q^r}^{r+1}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathcal{F}_{\tilde{\mathbf{R}}}^1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$$

definované vztahem

$$\lambda_L([j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi, q] = [j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L(q)].$$

Věta 3.1 *Platí*

1. *Každá přirozená Lagrangeova struktura* $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}),\lambda)$ *je realizací jednoznačně určeného diferenciálního invariantu* $L : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$.

2. *Dvojice* $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}),\lambda_L)$, *kde* λ_L *je realizace diferenciálního invariantu* $L : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$, *je přirozenou Lagrangeovou strukturou.*

Důkaz: 1. Nejprve ukážeme, že zobrazení λ splňující vztah (3.3) zachovává bázi, tj. zobrazení λ_0 definované následujícím diagramem

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi^{r+1}_{Q^r}"'] & \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}) \arrow[d, "\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}"] \\
\mathcal{X}\times\mathcal{Y} \arrow[r, "\lambda_0"] & \mathcal{X}\times\mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

je identita. Z definice jednotlivých zobrazení a komutativity odpovídajících diagramů plyne: $\pi^{r+1}_{Q^r}\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta) = (\alpha\times\beta)\circ\pi^{r+1}_{Q^r}$, $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha\times\beta) = (\alpha\times\beta)\circ\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}$, $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda = \lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r}$ (definice λ_0). Ze vztahu (3.3) dostáváme (působením projekce $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}$ zleva): $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha\times\beta)\circ\lambda = \pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta)$. Užitím předchozích vztahů nabudou pravá resp. levá strana poslední rovnosti tvaru: $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta) = \lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r}\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta) = \lambda_0\circ(\alpha\times\beta)\circ\pi^{r+1}_{Q^r}$ resp. $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha\times\beta)\circ\lambda = (\alpha\times\beta)\circ\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda = (\alpha\times\beta)\circ\lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r}$. Odtud $(\alpha\times\beta)\circ\lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r} = \lambda_0\circ(\alpha\times\beta)\circ\pi^{r+1}_{Q^r} \Rightarrow (\alpha\times\beta)\circ\lambda_0 = \lambda_0\circ(\alpha\times\beta)$, tj. $\lambda_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\times\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$.

Nyní zkonstruujeme k dané přirozené Lagrangeově struktuře diferenciální invariant $L : Q^r \to \tilde{R}$. Definujeme zobrazení $L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi} : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$ následovně

$$\lambda[j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi, q] = [j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}(q)]$$

Ukážeme, že zobrazení $L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}$ nezávisí na volbě $j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi$. Pro $\alpha\times$

$\beta \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Mor}\mathcal{D}_m$ platí

$$\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha \times \beta) \circ \lambda([j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi, q]) = \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}([j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_{j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi}(q)]) =$$

$$= [j_0^1(\alpha \circ \zeta), j_0^1(\beta \circ \xi), L_{j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi}(q)] = \lambda \circ \mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta)([j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi, q]) =$$

$$= \lambda([j^{r+1}(\alpha \circ \zeta), j^{r+1}(\beta \circ \xi), q]) = [j_0^1(\alpha \circ \zeta), j_0^1(\beta \circ \xi), L_{j_0^{r+1}(\alpha\circ\zeta), j_0^{r+1}(\beta\circ\xi)}(q)].$$

V předchozím výpočtu jsme mj. užili vztah (3.3).

Položíme-li nyní $\alpha = \zeta\mu\zeta^{-1}$ a $\beta = \xi\sigma\xi^{-1}$, kde $\mu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ resp. $\sigma : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ s počátkem a koncem v $0_{\mathbf{R}^n}$ resp $0_{\mathbf{R}^m}$, dostáváme $L_{\overline{j_0^{r+1}\zeta}, \overline{j_0^{r+1}\xi}} = L_{j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi}$, kde $\overline{j_0^{r+1}\zeta} = j_0^{r+1}\zeta \cdot j_0^{r+1}\mu$ resp. $\overline{j_0^{r+1}\xi} = j_0^{r+1}\xi \cdot j_0^{r+1}\sigma$. Můžeme tedy psát $L_{j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi} = L_{\zeta(0),\xi(0)}$, neboť zobrazení $L_{j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi}$ nezávisí na bázích v daných bodech $\zeta(0) = x, \xi(0) = y$.

Zvolíme-li $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ a morfismus $\alpha \times \beta$ tak, že $(\alpha \times \beta)(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, $\zeta(0) = x_1$, $\xi(0) = y_1$, dostáváme $L_{x_1,y_1} = L_{x_2,y_2}$,tj. zobrazení nezávisí na bodu (x, y). Položíme tedy $L_{x,y} = L$.

Ukážeme, že $L : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$ je diferenciální invariant. Nechť $(j_0^{r+1}\mu, j_0^{r+1}\sigma) \in L_n^{r+1} \times L_m^{r+1}$, $(\pi_n^{r+1,1} \times \pi_m^{r+1,1})(j_0^{r+1}\mu, j_0^{r+1}\sigma) = (j_0^1\mu, j_0^1\sigma) \in L_n^1 \times L_m^1$.

$$[j_0^1(\zeta \circ \mu), j_0^1(\xi \circ \sigma), ((j_0^1\mu)^{-1}, (j_0^1\sigma)^{-1}) \cdot L(q)] = [j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L(q)] =$$

$$\lambda([j_0^{r+1}\zeta, j_0^{r+1}\xi, q]) = \lambda([j_0^{r+1}(\zeta\circ\mu), j_0^{r+1}(\xi\circ\sigma), ((j_0^{r+1}\mu)^{-1}, (j_0^{r+1}\sigma)^{-1})\cdot q]) =$$

$$= [j_0^1(\zeta \circ \mu), j_0^1(\xi \circ \sigma), (L((j_0^1\mu)^{-1}, (j_0^1\sigma)^{-1}) \cdot q)].$$

Jednoznačnost ukážeme sporem. Předpokládejme, že $L_1, L_2 : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$ jsou dva různé diferenciální invarianty, jejichž realizace je λ. Pak pro $q \in Q^r$ libovolné platí

$$([j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_1(q)] = [j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_2(q)]) \Rightarrow$$

existuje $(j_0^1\mu, j_0^1\sigma) \in L_n^1 \times L_m^1$ tak, že

$$(j_0^1\mu, j_0^1\sigma) \cdot (j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_1(q)) = (j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_2(q)).$$

Vzhledem k tomu, že akce $L^1_n \times L^1_m$ na $\mathcal{F}^1\mathcal{X} \times \mathcal{F}^1\mathcal{Y}$ je volná, platí $j^1_0\mu = j^1_0\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$, $j^1_0\sigma = j^1_0\mathrm{id}_{\mathbf{R}^m}$ a tedy $L_1 = L_2$.

2. Podmínka (3.2) je splněna, neboť definiční obor λ_L je $\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Přímým dosazením z definice realizace diferenciálního invariantu do vztahu (3.3) a porovnáním levé a pravé strany prověříme platnost podmínky (3.3).

♡

Poznámka: Přirozené Lagrangeovy struktury jsou tedy v bijektivní korespondenci s diferenciálními invarianty příslušných typových vrstev. Problém hledání přirozených Lagrangeových struktur (nebo také *invariantních Lagrangiánů*) se redukuje na hledání diferenciálních invariantů, jemuž je věnována tato práce. Fyzikální význam mají diferenciální invarianty r-tého řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě $\tilde{R}$. V další kapitole se stručně zmíníme o konstrukci těchto Lagrangiánů z báze invariantů nalezené v 2.4 a 2.10.

Nechť $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \lambda)$ je přirozená Lagrangeova struktura a $\mathcal{W}$ definiční obor λ. Uvažujme n rozměrnou kompaktní podvarietu $\Omega \subset p_1 \circ \pi^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{W})$ s okrajem. Symbolem $\Gamma_{\Omega,\mathcal{W}}(p_1 \circ \pi^{r+1}_{Q^r})$ značíme množinu všech hladkých řezů γ fibrované variety

$$p_1 \circ \pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to \mathcal{X}$$

definovaných na Ω takových, že $\gamma(\Omega) \subset \mathcal{W}$. Zobrazení λ pak definuje funkci

$$\Gamma_{\Omega,\mathcal{W}}(p_1 \circ \pi^{r+1}_{Q^r}) \ni \gamma \to \lambda_\Omega(\gamma) = \int_\Omega \lambda \circ \gamma \in \mathbf{R},$$

kterou nazýváme *funkcionálem akce přirozené Lagrangeovy struktury* $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \lambda)$.

3.2 Harmonická zobrazení

Jako v předchozí kapitole uvažujeme variety $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, metriky h na $\mathcal{X}$ resp. g na $\mathcal{Y}$ a vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi), \varphi = (x^i), i =$

$1,\dots,n, x \in \mathcal{U}$ a $(\mathcal{V},\psi), \psi = (y^\sigma), \sigma = 1,\dots,m, f(x) \in \mathcal{V}$, $h = h_{ij}\mathrm{d}x^i \odot \mathrm{d}x^j$ resp. $g = g_{\sigma\nu}\mathrm{d}y^\sigma \odot \mathrm{d}y^\nu$ je metrika na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$, $h^{ij}h_{jk} = \delta^i_k$, $g_{\sigma\nu}g^{\nu\alpha} = \delta^\alpha_\sigma$.

Definujme *hustotu energie zobrazení* f vztahem

$$e(f)(x) = \frac{1}{2}h^{ij}(x)f^\sigma_i(x)f^\nu_j(x)g_{\sigma\nu}(f(x)).$$

Takto definovaná funkce $e(f) : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ nezávisí na výběru souřadnicových systémů, neboť platí

$$\overline{h}^{ij}(x)\overline{f}^\sigma_i(x)\overline{f}^\nu_j(x)\overline{g}_{\sigma\nu}(f(x)) = h^{ij}(x)f^\sigma_i(x)f^\nu_j(x)g_{\sigma\nu}(f(x)).$$

Poznámka: Tuto funkci lze geometricky interpretovat jako stopu tenzorového součinu pullbacku metriky g zadané na $\mathcal{Y}$ zobrazením f a kontravariantní metriky na $\mathcal{X}$ určené metrikou h:

$$2e(f) = (f^*g)_{ij}h^{ij} = \langle f_*\frac{\partial}{\partial x^i}|f_*\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle\langle \mathrm{d}x^i|\mathrm{d}x^j\rangle.$$

Energií zobrazení f nazveme integrál

$$E(f) = \int_{\mathcal{X}} e(f)(x)\sqrt{|\det(h)|}(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Věta 3.2 *Soustava Eulerových-Lagrangeových rovnic pro E má tvar:*

$$\frac{1}{\sqrt{|\det h|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|\det h|}h^{ij}f^\sigma_j)(x) + h^{ij}(x)\Gamma^\sigma_{\nu\eta}(f(x))f^\nu_i(x)f^\eta_j(x) = 0, \quad (3.4)$$

kde $1 \le \sigma \le m$, $\Gamma^\sigma_{\nu\eta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha})$.

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení je přímý a mj. je uveden v monografii [5].

♡

Řešení f rovnice (3.4) nazýváme *harmonické zobrazení.* S využitím vztahů

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|\det h|}) = \sqrt{|\det h|}h^{ab}h_{ab,i}$$

a

$$h^{ij}_{\ ,i} = -h^{ab}h^{ij}h_{ai,b} = -\frac{1}{2}h^{ab}(h_{ai,b} + h_{bi,a})$$

dostáváme Eulerovy-Lagrangeovy rovnice ve tvaru

$$h^{ij}(x)(\Gamma^q_{ij}(x)f^\sigma_q(x) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(f(x))f^\alpha_i(x)f^\beta_j(x) - f^\sigma_{ij}(x)) = 0, \tag{3.5}$$

$$\text{tj. } h^{ij}(x)K^\sigma_{ij}(x) = 0,$$

kde

$$\Gamma^q_{ij} = \frac{1}{2}h^{kq}(h_{ki,j} + h_{kj,i} - h_{ij,k}).$$

Nechť $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ je podvarieta variety $\mathcal{Y}$ a nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření. Řekneme, že vnořená podvarieta $\mathcal{X}$ je *minimální*, je-li f kritickým bodem funkcionálu energie, tj. řešením jeho Eulerových-Lagrangeových rovnic.

Věta 3.3 *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$\mathcal{X}$ je minimální podvarieta $\mathcal{Y}$,*
2. *$h^{ij}K^\sigma_{ij} = 0, \quad \forall \sigma \in \{1, \dots, m\}$,*
3. *f je harmonické.*

Důkaz: Tvrzení plyne ze vztahů (3.4) a (3.5).

♡

3.3 Konstrukce lagrangiánů

Zabývejme se nyní konstrukcí lagrangiánů z vnoření variet s metrickými poli. S využitím věty 3.1 a vět 2.4 a 2.5 resp. 2.14 a 2.15 můžeme říci, že přirozené Lagrangeovy struktury nultého řádu jsou v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$- ekvivariantními zobrazeními

$$Q \to \tilde{\mathbf{R}},$$

přirozené Lagrangeovy struktury prvního řádu jsou v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$-ekvivariantními zobrazeními

$$\mathcal{P}_1 \to \tilde{\mathbf{R}}$$

a přirozené Lagrangeovy struktury druhého řádu jsou v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$-ekvivariantními zobrazeními

$$\mathcal{P}_2 \to \tilde{\mathbf{R}}.$$

Levá akce grupy $L^1_n \times L^1_m$ na Q je zavedena vztahem (2.1), $\mathcal{P}_1$ resp. $\mathcal{P}_2$ jsou levé $L^1_n \times L^1_m$-variety s tenzorovou akcí zavedené vztahy (2.5) resp. (2.14) a $\tilde{R}$ je varieta s levou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$ definovanou vztahem (3.1). Uvidíme, že tato ekvivariantní zobrazení jsou určitým typem tzv. tenzorových invariantů. Dále budeme také označovat $Q = \mathcal{P}_0$. Analogicky jsou přirozené Lagrangeovy struktury r-tého řádu pro $r \geq 2$ v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$-ekvivariantními zobrazeními $\mathcal{P}_r \to \tilde{\mathbf{R}}$, kde $\mathcal{P}_r$ je odpovídající prostor s tenzorovou akcí.

Nyní uvedeme definice a pomocné věty, které budou využity pro formulaci tvrzení o konstrukci všech algebraických Lagrangiánů z vnoření variet s metrickými poli, které je cílem této kapitoly.

Věta 3.4 *Každé ekvivariantní zobrazení $L : \mathcal{P}_r \to \tilde{R}$, lze zapsat ve tvaru $L = \mathcal{L} \cdot L_0$, kde $\mathcal{L}$ je $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce $\mathcal{P}_r \to R$ a $L_0(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, \ldots) = \sqrt{|\det(h_{ij})|}$.*

Důkaz: Nechť $L : \mathcal{P}_r \to \tilde{\mathbf{R}}$ je libovolné ekvivariantní zobrazení. Můžeme položit $\mathcal{L} = \frac{L}{L_0}$, neboť $L_0 \neq 0$. Zřejmě platí $\mathcal{L}((A, C) \cdot p) = \mathcal{L}(p)$ pro všechna $p \in \mathcal{P}_r$ a všechna $(A, C) \in L^1_n \times L^1_m$.

♡

Označme $\mathbf{R}^*$ multiplikativní grupu reálných čísel (bez nuly). Nechť $\mathcal{P}$ je množina s levou akcí grupy G. Funkci $F : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ nazveme *relativním* *invariantem grupy* G, jestliže existuje funkce $\chi : G \to \mathbf{R}^*$ tak, že pro každé $p \in \mathcal{P}$ a $g \in G$ platí

$$F(g \cdot p) = \chi(g) \cdot F(p).$$

Existuje-li taková funkce χ, pak je určena jednoznačně a nazývá se *váhou invariantu.* Funkce F se nazývá *G-invariantní (absolutní invariant)*, je-li $\chi(g) = 1$ pro všechna $g \in G$. Klasická teorie invariantů řeší problém konstrukce relativních invariantů z tenzorů pro $G = L^1_n$. V tomto odstavci zobecníme některé věty a postupy teorie invariantů na případ tenzorové akce grupy $L^1_n \times L^1_m$. Stejným způsobem by však mohla být teorie zobecněna pro tenzorovou akci libovolného kartézského součinu konečného počtu grup $L^1_{n_1} \times \ldots \times L^1_{n_k}$.

Prvek $\tau \in \otimes^{r_1}_{s_1} \mathbf{R}^{d_1} \otimes \ldots \otimes^{r_k}_{s_k} \mathbf{R}^{d_k}$ nazveme *relativně invariantním tenzorem*, jestliže existuje funkce $\chi : L^1_{d_1} \times \ldots \times L^1_{d_k} \to \mathbf{R}^*$ tak, že pro každý prvek $A = (A_1, \ldots, A_k) \in L^1_{d_1} \times \ldots \times L^1_{d_k}$ platí

$$A \cdot \tau = \chi(A) \cdot \tau.$$

Pokud taková funkce χ existuje, pak je určena jednoznačně a nazývá se *váhou relativně invariantního tenzoru.*

Definujme prvky $\varepsilon \in \otimes^0_n \mathbf{R}^n$ a $\eta \in \otimes^n_0 \mathbf{R}^n$ vztahy

$$\varepsilon = \epsilon^{i_1 \ldots i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n},$$

$$\eta = \epsilon_{i_1 \ldots i_n} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_n},$$

kde $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ resp. $\epsilon^{i_1 \ldots i_n}$ jsou permutační indexy. Tenzory η a ε nazýváme *Levi-Civitovými tenzory.* Následující věta, platná pro tenzory typu (r, s) na $\mathbf{R}^n$ je uvedená s podrobným důkazem v [8].

Věta 3.5 *Platí*

1) Každý relativně invariantní tenzor $\tau \in \otimes^r_r \mathbf{R}^n$ *je tvaru*

$$\Delta^r_r = \sum_{\sigma \in S_r} c_\sigma \cdot \delta^{i_1}_{j_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot \delta^{i_r}_{j_{\sigma(r)}} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_r},$$

kde $c_\sigma \in \mathbf{R}$ *a* S_r *je grupa permutací množiny* $\{1, \ldots r\}$.

2) *Každý relativně invariantní tenzor* $\tau \in \otimes_0^n \mathbf{R}^n$ *je skalární násobek Levi–Civitova tenzoru* η. *Každý relativně invariantní tenzor* $\tau \in \otimes_n^0 \mathbf{R}^n$ *je skalární násobek Levi–Civitova tenzoru* ε.

3) *Každý relativně invariantní tenzor* $\tau \in \otimes_r^s \mathbf{R}^n$, *pro který* $r - s \neq k \cdot n$ *pro všechna celá* k, *je tvaru* $\tau = 0$.

4) *Každý relativně invariantní tenzor* $\tau \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n$, *kde* $r - s = k \cdot n$, k *je celé záporné číslo, lze vyjádřit jako úplnou kontrakci tenzoru* Δ_s^s *a tenzoru* $\otimes^{|k|}\varepsilon$. *Každý relativně invariantní tenzor* $\tau \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n$, *kde* $r - s = k \cdot n$, k *je celé kladné číslo, lze vyjádřit jako úplnou kontrakci tenzoru* Δ_r^r *a tenzoru* $\otimes^k \eta$.

Věta 3.6 *Libovolný relativně invariantní tenzor* $T \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n \otimes_\beta^\alpha \mathbf{R}^m$ *je možné vyjádřit jako lineární kombinaci výrazů, z nichž každý je tenzorovým součinem relativně invariantního tenzoru* $t_i \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n$ *a relativně invariantního tenzoru* $\tau_i \in \otimes_\beta^\alpha \mathbf{R}^m$.

Důkaz: Tvrzení je zřejmé z transformačních vztahů pro složky tenzoru. Nechť J je multiindex typu $\binom{i_1 \dots i_s}{j_1 \dots j_r}$, Λ je multiindex typu $\binom{\sigma_1 \dots \sigma_\beta}{\nu_1 \dots \nu_\alpha}$. Označme $E_J = (e^{j_1}, \dots, e^{j_s}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$, kde (e_i) je báze $\mathbf{R}^n$, $F_\Lambda = (f^{\sigma_1}, \dots, f^{\sigma_\beta}, f_{\nu_1}, \dots, f_{\nu_\alpha})$, kde (f_ν) je báze $\mathbf{R}^m$. Zvolme jiné báze $(\overline{e}_i) = A \cdot (e_i)$ resp. $(\overline{f_\nu}) = C \cdot (f_\nu)$, $\overline{E}_J = A \cdot E_J$ resp. $\overline{F}_\Lambda = C \cdot F_\Lambda$. Z předpokladu relativní invariantnosti T vyplývá $T(\overline{E}_J, \overline{F}_\Lambda) = \chi(A, C) T(E_J, F_\Lambda)$. Poznamenejme, že každý homomorfismus $\chi : L_n^1 \times L_m^1 \to \mathbf{R}^*$ lze napsat ve tvaru $\chi(A, C) = \chi_1(A) \cdot \chi_2(C)$, pro všechna $A \in L_n^1, C \in L_m^1$, kde $\chi_1 : L_n^1 \to \mathbf{R}^*$ resp. $\chi_2 : L_m^1 \to \mathbf{R}^*$ jsou homomorfismy. Definujme

$$T_J = T(E_J, \cdot) \in \otimes_\beta^\alpha \mathbf{R}^m,$$

$$T_\Lambda = T(\cdot, F_\Lambda) \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n.$$

Zřejmě platí $T_J(\overline{F}_\Lambda) = \chi(I_n, C) T_J(F_\Lambda)$ resp. $T_\Lambda(\overline{E}_J) = \chi(A, I_m) T_\Lambda(E_J)$, tenzor T_J je tedy relativně invariantní s váhou $\chi_1 = \chi|_{\{I_n\} \times L_m^r}$ resp. tenzor T_Λ je relativně invariantní s váhou $\chi_2 = \chi|_{L_n^r \times \{I_m\}}$. Platí

$$T = c^J \otimes T_J = \gamma^\Lambda \otimes T_\Lambda,$$

kde $c^J \in \otimes^r_s \mathbf{R}^n$ resp. $\gamma^\Lambda \in \otimes^\alpha_\beta \mathbf{R}^m$ (J, Λ jsou příslušné multiindexy). Z tohoto vztahu, s přihlédnutím k větě 3.5, je již zřejmé dokazované tvrzení.

♡

Věta 3.7 *Každá algebraická $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce na prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí je řešením nějaké algebraické rovnice, jejíž koeficienty jsou racionální $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce na tomto prostoru.*

Důkaz: Předpokládejme, že $\mathcal{L}$ je algebraická funkce, tj. je řešením rovnice

$$[\mathcal{L}(p)]^k + C_1(p)[\mathcal{L}(p)]^{k-1} + \ldots + C_k(p) = 0.$$

Uvažujme takovou rovnici, pro kterou je číslo k nejmenší. Koeficienty $C_1, \ldots, C_k$ jsou tedy určeny jednoznačně (v případě nejednoznačnosti bychom odečtením těchto dvou rovnic získali rovnici nižšího stupně). Platí

$$[\mathcal{L}(\overline{p})]^k + C_1(\overline{p})[\mathcal{L}(\overline{p})]^{k-1} + \ldots + C_k(\overline{p}) = 0.$$

Z předpokladu $\mathcal{L}(\overline{p}) = \mathcal{L}(p)$ ($L^1_n \times L^1_m$-invariance funkce $\mathcal{L}$) a jednoznačnosti koeficientů $C_1, \ldots, C_k$ plyne, že $C_i(\overline{p}) = C_i(p)$ pro všechna $p \in \mathcal{P}$ a $i = 1, \ldots k$, tj. $C_i(p)$ jsou rovněž $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce.

♡

Věta 3.8 *Každá racionální $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ je podílem dvou polynomických relativních invariantů se stejnou váhou.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{L}(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, kde φ a ψ jsou nesoudělné polynomické funkce na prostoru $\mathcal{P}$. Z předpokladu $\mathcal{L}(\overline{p}) = \mathcal{L}(p)$ dostáváme

$$\frac{\varphi(\overline{p})}{\psi(\overline{p})} = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)},$$

$$\varphi(\overline{p}) = \varphi(p)\frac{\psi(\overline{p})}{\psi(p)} \quad \text{a} \quad \psi(\overline{p}) = \psi(p)\frac{\varphi(\overline{p})}{\varphi(p)}.$$

Polynomy $\varphi(p)$ a $\psi(p)$ jsou nesoudělné, polynom $\psi(\overline{p})$ je tedy dělinelný polynomem $\psi(p)$, oba mají stejný stupeň, a proto je jejich podílem číslo. Analogicky polynom $\varphi(\overline{p})$ je dělitelný polynomem $\varphi(p)$. Označme $\overline{p} = (A, C) \cdot p$ a $\varphi(p) = \chi_1(A, C)\varphi(\overline{p})$, $\psi(p) = \chi_2(A, C)\psi(\overline{p})$. Platí

$$\frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \frac{\varphi(\overline{p})}{\psi(\overline{p})} = \frac{\chi_1(A, C)\varphi(p)}{\chi_2(A, C)\psi(p)}.$$

Odtud $\chi_1 = \chi_2$.

♡

Věta 3.9 *Každý polynomický relativní invariant z prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí je součtem homogenních polynomických relativních invariantů.*

Důkaz: Transformační rovnice pro komponenty bodu $p \in \mathcal{P}$ je lineární a homogenní. Vybereme-li členy určitého stupně z daného relativního invariantu, jejich součet bude opět relativním invariantem.

♡

Nyní se zabývejme konstrukcí relativních invariantů na prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí grupy $L_n^1 \times L_m^1$, které jsou homogenními polynomickými funkcemi v komponentách bodů $p \in \mathcal{P}$. Nechť souřadnice bodu $p \in \mathcal{P}$ jsou souborem souřadnic tenzorů $\tau_1 \in \otimes_{s_1}^{r_1} \mathbf{R}^n \otimes_{\beta_1}^{\alpha_1} \mathbf{R}^m, \dots \tau_k \in \otimes_{s_k}^{r_k} \mathbf{R}^n \otimes_{\beta_k}^{\alpha_k} \mathbf{R}^m$. Nechť $d_1, \dots, d_k$ jsou příslušné počty jejich nezávislých komponent. Zkonstruujme tenzor

$$T = \otimes^{d_1} \tau_1 \otimes^{d_2} \tau_2 \dots \otimes^{d_k} \tau_k.$$

Jeho komponenty označme

$$T^{i_1 \dots i_s \sigma_1 \dots \sigma_\beta}_{j_1 \dots j_r \nu_1 \dots \nu_\alpha},$$

kde $r = r_1 d_1 + \dots + r_k d_k$, $s = s_1 d_1 + \dots + s_k d_k$, $\alpha = \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_k d_k$, $\beta = \beta_1 d_1 + \dots + \beta_k d_k$. Každý homogenní polynomický invariant je tvaru

$$I = B^{j_1 \dots j_r \nu_1 \dots \nu_\alpha}_{i_1 \dots i_s \sigma_1 \dots \sigma_\beta} T^{i_1 \dots i_s \sigma_1 \dots \sigma_\beta}_{j_1 \dots j_r \nu_1 \dots \nu_\alpha}.$$

Z předpokladu relativní invariantnosti I získáváme

$$B^{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha}_{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}T^{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}_{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha} = \chi(A,C)B^{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha}_{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}\overline{T}^{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}_{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha}$$

a tedy po dosazení za pruhované komponenty tenzoru T dostáváme

$$B^{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha}_{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}a^{i_1}_{k_1}\ldots a^{i_s}_{k_s}b^{l_1}_{j_1}\ldots b^{l_r}_{j_r}c^{\sigma_1}_{\pi_1}\ldots c^{\sigma_\beta}_{\pi_\beta}d^{\varrho_1}_{\nu_1}\ldots b^{\varrho_\alpha}_{\nu_\alpha} = \chi(A,C)\cdot B^{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha}_{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}.$$

Soubor koeficientů $B^{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha}_{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}$ tedy tvoří komponenty nějakého relativně invariantního tenzoru.

Věta 3.10 *Každý homogenní polynomický relativní invariant z prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$ lze získat jako lineární kombinaci výrazů, které vzniknou pomocí operací tenzorového součinu, alternace a kontrakce.*

Důkaz: Věta je důsledkem vět 3.5, 3.6 a skutečnosti, že soubor koeficientů $B^{j_1\ldots j_r\nu_1\ldots\nu_\alpha}_{i_1\ldots i_s\sigma_1\ldots\sigma_\beta}$ tvoří komponenty relativně invariantního tenzoru.

♡

Věta 3.11 *Každý algebraický invariantní Lagrangián z vnoření variet z metrikou libovolného řádu lze vytvořit algebraickými operacemi s výrazy, získanými z báze invariantů daného řádu pomocí operací tenzorového součinu, alternace a kontrakce.*

Důkaz: Věta je důsledkem vět 3.4, 3.7, 3.8, 3.9 a 3.10.

♡

Literatura

[1] F. David, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, Les Houches, sborník Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory, Session LXII., Institut d'etudes avanceés del'otan, 1994

[2] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Gauthier-Villars, 1972

[3] G. B. Gurevich, Foundation of the Theory of Algebraic Invariants, Groningen, 1964

[4] P. Hořava, www.arXiv.org/pdf/hep-th/9507060, 1996

[5] J. Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, 1998,

[6] I. Kolář, P. Michor, J. Slovák, Natural Operations in Differential Geometry, Springer-Verlag, 1993

[7] D. Krupka, Local Invariants of Linear Connection, Coll. Math. Soc. János Bolyai, 31. Differential Geometry, Budapest 1979

[8] D. Krupka, J. Janyška, Lectures on Differential Invariants, University J. E. Purkyně, Brno, 1990

[9] D. Krupka, Natural Lagrangian Structures, University J. E. Purkyně, 1984

[10] D. Krupka, The Geometry of Lagrange Structures, Silesian University, Opava, 1997

[11] P. Musilová, Differential Invariants of Immersions of Manifolds with Metric Fields, Rep. Math. Phys., Torun 2003 to appear

[12] P. Olver, Classical Invariant Theory, Cambridge University, 1999

[13] A. M. Polyakov, Gauge fields and Strings, Harwood Academic Publishers GmbH, 1987

[14] J. Šeděnková, Diplomová práce, Silesian University, Opava, 1999

[15] J. Šeděnková, Differential Invariants of the Metric Tensor, Proceedings of the Seminar on Differential Geometry, Silesian University, Opava, 2000

[16] H. Weyl, The Classical Groups, Their Invariants and Representations, Princeton University, 1997

[17] K. Yano, M. Kon, Structures on Manifolds, 1984