

MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Jitka JANOVÁ

**MECHANIKA NEHOLONOMNĚ
VÁZANÝCH SYSTÉMŮ**

Disertační práce

školitel: prof. RNDr. Jana Musilová, CSc

Brno, 2006

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Jitka Janová

Název disertační práce: Mechanika neholonomně vázaných systémů

Název disertační práce anglicky: Mechanics of nonholonomic constrained systems

Studijní program: Fyzika

Studijní obor (směr), kombinace oborů: Teoretická fyzika a astrofyzika

Školitel: prof. RNDr. Jana Musilová, CSc

Rok obhajoby: 2006

Klíčová slova v češtině: fibrovaná varieta; dynamická forma; mechanický systém; neholonomní vazby; variační vázaný systém; Chetaeova vazební síla; vazební Lepageova 1-forma

Klíčová slova v angličtině: fibred manifold; dynamical form; mechanical system; nonholonomic constraints; variational constrained system; Chetaev constraint force; constraint Lepage 1-form

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí své disertační práce prof. RNDr. Janě Musilové, CSc za cenné konzultace, které umožnily vznik této práce.

Abstrakt

Mechanika je obor fyziky, ve kterém se dokonale překrývají teoretické matematické konstrukce s popisem fyzikální reality. Příkladem jsou Eulerovy- Lagrangeovy rovnice, které se staly jednou z nejvýznamnějších aplikací matematické teorie v mechanice a položily základy variačního počtu ve fyzice vůbec.

Tato práce se zabývá důsledky geometrické teorie neholonomních systémů (viz [10]) a důsledky neholonomního variačního principu (viz [26]). Z matematického hlediska je v současné době vybudována teorie variačního i nevariačního neholonomně vázaného systému, zůstávají však otevřené otázky týkající se fyzikální interpretace některých zavedených matematických objektů. To se týká např. Chetaevových vazebních sil a vazební Lepageovy 1-formy, která je jistou analogií lagranžianu u variačních nevázaných mechanických systémů, ovšem s tím rozdílem, že tato forma není zadána jednoznačně. Zajímavý je také vztah mezi variačností nevázaného a vázaného systému resp. mezi lagranžianem a vazební Lepageovou 1-formou a také existence triviální vazební Lepageovy 1-formy.

Tato práce spojuje studium těchto matematických objektů s původními kompletně řešenými fyzikálními příklady jak realistickými tak modelovými a ověřuje či doplňuje tak korespondenci matematické teorie a fyzikální reality.

Abstract

Mechanics is a branch of physics, in which abstract mathematical theories and empirical physical evidence fit together and complement each other perfectly. As an example, let us mention the Euler-Lagrange equations forming one of the most prominent applications of mathematical theory in mechanics, which gave rise to variational calculus in the physics in general.

This thesis deal with consequences of the geometric theory of nonholonomic constrained systems (see [10]) and of the nonholonomic variational principle (see [26]). From the mathematical point of view both respective theories have been developed: the theory of variational nonholonomic systems and that of nonvariational nonholonomic systems. However, there are still some open problems concerning the physical interpretation of certain well-established geometrical objects. This concerns namely Chetaev constraint force and constraint Lepage 1-form, that can be considered an analogy of lagrangian of unconstrained variational system, nevertheless with the difference of the 1-form not being unique. The relationship between variationality of the constrained and unconstrained system as well as the existence of the trivial constraint Lepage 1-form are other points of interest.

This work links studies of the above mentioned mathematical objects with originally formulated and completely solved physical examples thus verifying or complementing the correspondence between the mathematical theory and the physical reality.

Obsah

1	Úvod	8
2	Geometrický popis nevázaných mechanických systémů	11
2.1	Základní geometrické objekty	11
2.1.1	Fibrovaná varieta	11
2.1.2	Vektorová pole a formy na fibrované varietě	13
2.1.3	Distribuce na fibrované varietě	17
2.2	Pohybové rovnice	19
2.3	Variačnost	20
3	Geometrická teorie neholonomně vázaných systémů	23
3.1	Neholonomní vazební struktura	24
3.1.1	Vazební podvarieta	24
3.1.2	Lift vazební podvariety do J^2Y	26
3.1.3	Vektorová pole na vazební podvarietě	27
3.1.4	Formy na vazební podvarietě	30
3.1.5	Horizontální a kontaktní formy na Q	31
3.1.6	Kanonická distribuce	33
3.1.7	Vazební ideál	36
3.1.8	Vázaná horizontalizace a kontaktizace	37
3.2	Dynamické a redukované pohybové rovnice	43
3.2.1	Dynamické pohybové rovnice	44
3.2.2	Redukované pohybové rovnice	45
3.3	Variačnost	48
4	Fyzikální aplikace	54
4.1	Variační systém podrobený neholonomní vazbě	54
4.1.1	Snakeboard	55
4.1.2	Váleček uvnitř dutého válce	66
4.2	Nevariační systém podrobený neholonomní vazbě	84
4.2.1	Neholonomní vazba: zachování mechanické energie	84
4.2.2	Reonomní neholonomní vazba	90
4.3	Triviální vazební Lepageova 1-forma	95
5	Závěr	98

1 Úvod

Mechanika má ve fyzice významnou pozici nejen jako účinný nástroj pro řešení dynamických problémů z oblasti fyziky a techniky. Jde o obor fyziky, ve kterém se dokonale překrývají teoretické matematické konstrukce s popisem fyzikální reality. Příkladem je variační princip v mechanice. Problém brachistochrony, předložený matematikům v roce 1696, přenesl z optiky do mechaniky otázku, která veličina, charakterizující pohyb mechanické soustavy, má být minimální či maximální. Řešení této otázky je připisováno Maupertuisovi, který v roce 1744 vyslovil hypotézu, že každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina, nazývaná akcí, je minimální. Matematická formulace jím podaná však nebyla přesná a Maupertuis dospěl ke správným důsledkům plynoucím z jeho principu nekorektními metodami. Ve stejném období, kdy Maupertuis formuloval svůj princip, studoval již Euler systematicky variační počet, který používal zejména na řešení tzv. izoperimetrických problémů. Ve své době zaujaly tyto problémy maximalizujících resp. minimalizujících se veličin také Newtona, Leibnitze a bratry Bernouliovy. Euler našel diferenciální rovnice, které řešily širokou skupinu těchto úloh.

Současně s Eulerem řešil izoperimetrické problémy také Lagrange, který pro tento účel vytvořil nové matematické metody, které dnes nazýváme variační počet. Lagrange vymezil platnost principu nejmenší akce a pochopil význam zobecněných souřadnic. Jeho pohybové rovnice vyplývající z variačního počtu jsou invariantní vůči bodovým transformacím a Lagrange tak zavedl do mechaniky silný matematický nástroj pro řešení fyzikálních problémů. V úvodu svého díla *Mécanique Analytique* (1788) (viz [19]) píše, že čtenář v jeho práci nenažne žádné obrázky, neboť metody, které používá, nepotřebují geometrické ani mechanické zdůvodnění, nýbrž pouze matematické operace.

Ačkoliv Euler nezformuloval princip nejmenší akce, je aplikace rovnic, ke kterým dospěl, v případě mechaniky ekvivalentní Lagrangeově explicitní formulaci. Rovnice, dnes známé jako Eulerovy- Lagrangeovy, se tak staly jednou z nejvýznamnějších aplikací matematické teorie v mechanice a položily základy variačního počtu ve fyzice vůbec.

Variační počet v mechanice, jak jej vytvořil Lagrange, je dnes zpracován v mnoha učebnicích teoretické mechaniky (viz např. [1]). Součástí Lagrangeovy práce je také metoda multiplikátorů, kterou Lagrange zavedl pro řešení úloh s vazbami. Tato metoda je vhodná pro vazby holonomní nebo vazby neholonomní lineární v rychlostech (viz např. [1], [19]). Metodu dnes zvanou metodou

Lagrangeových multiplikátorů je možno použít jak na variační tak nevariační mechanické systémy, ale nelze ji použít pro systémy vázané neholonomní vazbou libovolného tvaru.

V 60. letech minulého století se zformoval geometrický přístup k mechanice, jehož při popisu neholonomně vázaných systémů využili mezi prvními Faddeev a Vershik (viz [28]). Rozvinulo se několik přístupů zabývajících se problematikou mechanických systémů podrobených neholonomním vazbám obecného tvaru (např. [3], [25]). Moderní přístup ke studiu mechanických systémů prvního a vyšších řádů je spjat se zavedením fibrované variety jako podkladové struktury (např. [8]) a dále zavedením Lepageových forem (viz např. [9]), umožňujících popis dynamiky systému. Existuje množství prací zabývajících se neholonomní tematikou v moderním geometrickém pojetí (např. [6], [21], [23]).

Tato práce vychází z geometrické teorie neholonomních systémů, kterou zformulovala prof. Krupková v [10], [11], [12], [13], [14]. Podkladovou strukturou je zde fibrovaná varieta s jednorozměrnou bází a její první a druhé jetové prodloužení. Mechanický systém je představován jistou třídou ekvivalence 2-forem na prvním jetovém prodloužení. Teorie umožňuje popis jak variačních tak nevariačních mechanických systémů podrobených neholonomní vazbě. Problematikou neholonomního variačního principu se v návaznosti na teorii prof. Krupkové zabývá Swaczyna v [26], [27], [18]. V [17] a [26] buduje vazební kalkulus, který užívá pro formulaci neholonomního variačního principu pro mechanický systém prvního řádu podrobený obecné neholonomní vazbě. Základním prvkem principu je funkce akce definovaná na vazební podvarietě a zobecněná na jistou třídu ekvivalence 2-forem. Variační vázaný systém je popsán vazebními Eulerovými-Lagrangeovými rovnicemi a ekvivalentně vazební Lepageovou 1-formou.

Tato práce se zabývá důsledky geometrické teorie neholonomních systémů [10] a důsledky neholonomního variačního principu zavedeného v [26]. Z matematického hlediska je vybudována teorie variačního i nevariačního neholonomně vázaného systému, zůstávají však otevřené otázky týkající se významu některých zavedených geometrických objektů ve fyzice. To se týká např. Chetaevových vazebních sil a vazební Lepageovy 1-formy, která je jistou analogií lagranžiánu u variačních nevázaných mechanických systémů ovšem s tím rozdílem, že není zadána jednoznačně. Zajímavý je také vztah mezi variačností nevázaného a vázaného systému resp. mezi lagranžiánem a vazební Lepageovou 1-formou a také existence triviální vazební Lepageovy 1-formy. Tato práce spojuje studium jednotlivých objektů s kompletně řešenými původními fyzikálními příklady jak rea-

listickými tak modelovými a ověřuje či doplňuje tak korespondenci matematické teorie a fyzikální reality. Výsledky práce byly publikovány v článcích:

- Czudková, L - Janová, J - Musilová, J. Non-holonomic mechanical systems and variational principle. In Differential Geometry and its Applications. Proc. Conf. Prague, August 30 - September 3, 2004. 2005. vyd. Prague, Czech Republic : Charles University, 2005, ISBN 80-86732-63-0. od s. 571-579, 9 s.
- Czudková, L - Janová, J - Musilová, J. Trivial constraint variational problem. Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, ISSN 0009-725X, 2005, 8 s. (accepted)

Práce je rozdělena na teoretickou a aplikační část. Kapitoly 2 a 3 představují teoretickou část práce, která slouží k rychlé orientaci v problematice, přičemž je čtenář (v případě zájmu o detailní aspekty teorií) podrobně odkazován na zdrojovou literaturu. Z tohoto důvodu uvádíme tvrzení bez důkazů a zaměřili jsme se na stručné ale výstižné shrnutí problematiky.

V kapitole 2 jsou zavedeny geometrické objekty potřebné pro popis nevázaného mechanického systému na fibrované varietě (viz [10]) jako jsou projektabilní vektorová pole, kontaktní a horizontální formy a distribuce. Shrnujeme také formulaci variačního principu nevázaného systému v geometrické teorii. V kapitole 3 je proveden stručný souhrn výsledků geometrické teorie neholonomních systémů (viz [10]) a v odstavci 3.3 je stručně shrnut neholonomní variační princip tak, jak je zaveden v [26].

Těžištěm práce je kapitola 4, která formou původních řešených příkladů zkoumá důsledky neholonomního variačního principu a zabývá se fyzikální podstatou geometrických objektů popsanych v kapitole 3 resp. 3.3. Kapitola je tématicky rozdělena do tří oddílů:

1. variační systém podrobený neholonomní vazbě,
2. nevariační systém podrobený neholonomní vazbě,
3. triviální vazební Lepageovu 1-forma.

V prvním odstavci jsou řešeny fyzikální příklady, u kterých je nevázaný systém variační a neholonomní vazba má jasný fyzikální význam. V následujícím odstavci nalezneme případy nevázaných nevariačních systémů, které po přidání jistých neholonomních podmínek přecházejí na systém variační vázaný. Poslední odstavec se věnuje problematice triviálních Lepageových 1-forem.

2 Geometrický popis nevázaných mechanických systémů

Pro popis mechanického systému v geometrické teorii se využívá fibrovaná varieta s jednorozměrnou bází a její jetová prodloužení. Jednorozměrná báze fibrované variety má význam časové osy a řezy fibrované variety představují možné trajektorie systému. V každém okamžiku je tedy konfigurační prostor reprezentován fibrem fibrované variety a fázový prostor fibrem prvního jetového prodloužení nad příslušným bodem báze.

Fyzikální systémy v mechanice, jimiž se v této práci budeme zabývat, se řídí pohybovými rovnicemi druhého řádu, kterým odpovídá popis pomocí druhého jetového prodloužení příslušné fibrované variety. Z tohoto důvodu se v úvodních kapitolách, opakujících potřebné objekty pro geometrický popis mechanických systémů, omezíme na první a druhé jetové prodloužení fibrované variety i u objektů, které lze zavádět zcela obecně.

2.1 Základní geometrické objekty

V této kapitole zopakujeme značení základních objektů a operací na fibrovaných varietách v mechanice. Jedná se především o vektorová pole a formy na fibrované varietě a rozklad forem na k -kontaktní komponenty. V závěru kapitoly shrneme vlastnosti distribucí na fibrovaných varietách. Případná tvrzení uvádíme bez důkazů, které lze však nalézt v [10] a [11] společně s podrobným popisem zmiňovaných objektů uvedeným rovněž např. v [26]. V práci budeme až na drobné výjimky dodržovat značení užívané v [26] a budeme používat tuto sčítací symboliku:

$$\sum_{\sigma=1}^m A_{\sigma} \omega^{\sigma} = A_{\sigma} \omega^{\sigma}, \quad 1 \leq \sigma \leq m.$$

2.1.1 Fibrovaná varieta

Pro *fibrovanou varietu*

$$\pi : Y \rightarrow X$$

se užívá značení (Y, π, X) nebo, nebude-li moci dojít k záměně s totálním prostorem, budeme fibrovanou varietu (Y, π, X) značit jednoduše Y . Ve výkladu se zabýváme pouze mechanikou, a proto $\dim X = 1$. Dále označme $\dim Y = m + 1$, kde m je počet stupňů volnosti popisovaného systému.

Fibrováný souřadnicový systém na Y značíme (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq m$, asociovaný souřadnicový systém na X je (U, φ) , $\varphi = (t)$. *Fibrem nad x* nazýváme podvarietu variety $Y: \pi^{-1}(x)$, kde $x \in U \subset X$. *Řez* variety (Y, π, X) , tj. zobrazení $\gamma: U \ni x \rightarrow \gamma(x) \in Y$, kde $\pi \circ \gamma = id_U$, budeme standardně značit γ .

Mějme zadáno celé číslo $0 \leq s \leq 2$. Pak značíme $J^s Y$ s -té jetové prodloužení fibrované variety (Y, π, X) . Symbolem $J_x^s \gamma$ značíme s -jet řezu γ v bodě x . Pro fibrované variety $\pi_s: J^s Y \rightarrow X$ resp. $\pi_{s,k}: J^s Y \rightarrow J^k Y$, kde k je celé číslo a platí $0 \leq k < s$, užíváme označení $(J^s Y, \pi_s, X)$ resp. $(J^s Y, \pi_{s,k}, J^k Y)$. Fibrovanou varietu $(J^s Y, \pi_s, X)$ budeme také jednoduše značit $J^s Y$. Pro $s = 0$ platí $\pi_0 \equiv \pi$, $J^0 Y \equiv Y$ a $J_x^0 \gamma = \gamma(x)$.

Ke každému fibrovanému souřadnicovému systému (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq m$, na Y existuje *asociovaný fibrováný souřadnicový systém* na $J^s Y$ (V_s, ψ_s) , $V_s = (\pi_{s,0}^{-1}(V))$ a $\psi_s = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$, $1 \leq j \leq s$, kde

$$q_j^\sigma(J_x^s \gamma) = \left(\frac{d^j \gamma^\sigma}{dt^j} \right)_{t(x)}.$$

Pro $s = 1$ značíme souřadnicové funkce $\psi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$ a pro $s = 2$ obdobně $\psi_2 = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)$.

Je-li γ řez fibrované variety π , pak $J^s \gamma$ značí s -jetové prodloužení řezu γ . Řez $\delta = J^s \gamma$ fibrované variety $J^s Y$ budeme nazývat *holonomní řez*.

Příklad 2.1 Mějme zadánu fibrovanou varietu (Y, π, X) s jednorozměrnou bází $X \equiv \mathbb{R}$. Nechť M je varieta dimenze m , TM značí její tečné rozvrstvení a nechť $Y = \mathbb{R} \times M$, pak π je kanonická projekce a platí $J^1(\mathbb{R} \times M) = \mathbb{R} \times TM$. Příklady uváděné v této práci využívají jako podkladovou strukturu fibrovanou varietu tohoto typu. Nechť $M = \mathbb{R}^2$, pak $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Nechť (V, ψ) , $\psi = (t, q^1, q^2)$, je fibrováný souřadnicový systém na Y , (V_1, ψ_1) , $\psi_1 = (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2)$, asociovaný fibrováný souřadnicový systém na $J^1 Y$ a (U, φ) , $\varphi = (t)$, je asociovaný souřadnicový systém na X . Vzhledem k tomu, že $X \equiv \mathbb{R}$, pak pro bod $x \in X$ můžeme psát $x \equiv t$. Nechť $t_0 \in X$. Z definice prvního jetového prodloužení dostáváme pro $J_{t_0}^1 \gamma$:

$$\begin{aligned} \dot{q}^1(J_{t_0}^1 \gamma) &= \left(\frac{dq^1 \gamma(t)}{dt} \right)_{t_0}, \\ \dot{q}^2(J_{t_0}^1 \gamma) &= \left(\frac{dq^2 \gamma(t)}{dt} \right)_{t_0}, \end{aligned}$$

což jsou složky vektoru tečného k řezu γ . Bod $y = J_{t_0}^1 \gamma \in J^1 Y$ má souřadnice $\left(t_0, q^1 \gamma(t_0), q^2 \gamma(t_0), \left(\frac{dq^1 \gamma(t)}{dt} \right)_{t_0}, \left(\frac{dq^2 \gamma(t)}{dt} \right)_{t_0} \right)$ a platí $J^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^2$.

2.1.2 Vektorová pole a formy na fibrované varietě

Nechť Y je fibrovaná varieta a $J^s Y$ je její s -té jetové prodloužení. Nechť Ξ je vektorové pole na $J^s Y$, $0 \leq s \leq 2$. Vyjádřeme je v souřadnicích

na Y :

$$\Xi^0(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + \Xi^\sigma(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma}$$

na $J^1 Y$:

$$\Xi^0(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + \Xi^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma},$$

na $J^2 Y$:

$$\Xi^0(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + \Xi^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} + \bar{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^\sigma},$$

kde $1 \leq \sigma, \nu \leq m$.

Nechť $0 \leq r < s$. Řekneme, že vektorové pole Ξ na $J^s Y$ je π_s - resp. $\pi_{s,r}$ -projektabilní, pokud existuje vektorové pole ξ na X resp. na $J^r Y$ takové, že platí:

$$T\pi_s \cdot \Xi = \xi \circ \pi_s, \text{ resp. } T\pi_{s,r} \cdot \Xi = \xi \circ \pi_{s,r},$$

kde $T\pi_s$ resp. $T\pi_{s,r}$ značí tečné zobrazení k π_s resp. k $\pi_{s,r}$. Pokud ξ existuje, je zadáno jednoznačně a nazývá se π_s - resp. $\pi_{s,r}$ -projekce vektorového pole Ξ . Je-li $T\pi_s \cdot \Xi = 0$ resp. $T\pi_{s,r} \cdot \Xi = 0$, nazývá se vektorové pole Ξ π_s - resp. $\pi_{s,r}$ -vertikální.

V souřadnicích tyto definice znamenají, že složka Ξ^0 je u π_s -projektabilního vektorového pole Ξ na $J^s Y$ závislá pouze na t a je nulová, právě je-li toto vektorové pole π_s -vertikální. Pro $\pi_{2,1}$ -projektabilní resp. $\pi_{2,1}$ -vertikální vektorové pole na $J^2 Y$ dostáváme v souřadnicích:

$$\Xi^0(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + \Xi^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} + \bar{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^\sigma},$$

resp.

$$\bar{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^\sigma}.$$

Pro $\pi_{2,0}$ -projektabilní resp. $\pi_{2,0}$ -vertikální vektorové pole na J^2Y dostáváme v souřadnicích:

$$\Xi^0(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + \Xi^\sigma(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} + \bar{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^\sigma},$$

resp.

$$\tilde{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} + \bar{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^\sigma}.$$

Pro $\pi_{1,0}$ -projektabilní resp. $\pi_{1,0}$ -vertikální vektorové pole na J^1Y dostáváme v souřadnicích:

$$\Xi^0(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + \Xi^\sigma(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma},$$

resp.

$$\tilde{\Xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma},$$

kde $1 \leq \sigma, \nu \leq m$.

Nechť $q \geq 1$. Značíme $\Lambda^q(TJ^sY)$ modul q -forem na J^sY , kde TJ^sY značí tečné rozvrstvení na varietě J^sY . Nechť (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$ je fibrovaný souřadnicový systém na Y a (V_1, ψ_1) , $\psi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$, a (V_2, ψ_2) , $\psi_2 = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)$, asociované fibrované souřadnicové systémy na J^1Y a J^2Y . Kanonická báze 1-forem na J^1Y resp. na J^2Y má tvar $(dt, dq^\sigma, d\dot{q}^\sigma)$ resp. $(dt, dq^\sigma, d\dot{q}^\sigma, d\ddot{q}^\sigma)$, kde $1 \leq \sigma \leq m$.

Forma $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$ se nazývá π_s - resp. $\pi_{s,r}$ -projektabilní, $0 \leq r < s$, když existuje forma ρ_0 na X , resp. na J^rY taková, že platí $\rho = \pi_s^* \rho_0$ resp. $\rho = \pi_{s,r}^* \rho_0$. Existuje-li taková forma ρ_0 , pak je určena jednoznačně a nazýváme ji π_s - resp. $\pi_{s,r}$ -projekcí formy ρ . V dalším budeme ztotožňovat projektabilní formu s její projekcí, nebude-li řečeno jinak.

Forma $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$ se nazývá π_s - resp. $\pi_{s,r}$ -horizontální, $0 \leq r < s$, pokud pro každé π_s - resp. $\pi_{s,r}$ -vertikální vektorové pole Ξ na J^sY platí:

$$i_\Xi \rho = 0.$$

V případě fibrované variety s jednorozměrnou bází mohou být π_s - horizontální na J^sY pouze 1-formy. Modul π_s -horizontálních 1-forem na J^sY budeme značit $\Lambda_X^1(TJ^sY)$, modul $\pi_{s,r}$ -horizontálních q -forem na J^sY značíme $\Lambda_{J^rY}^q(TJ^sY)$.

Příklad 2.2 (π_s a $\pi_{s,r}$ - horizontální formy na J^sY) Z definice dostáváme tvar π - horizontální 1-formy ρ na Y

$$\rho = \rho_0(t, q^\sigma) dt,$$

a tvar π_1 - resp. $\pi_{1,0}$ -horizontální 1-formy ρ na J^1Y :

$$\rho = \rho_0(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)dt, \text{ resp. } \rho = \rho_0(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)dt + \rho_\nu(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)dq^\nu,$$

π_2 - resp. $\pi_{2,0}$ - resp. $\pi_{2,1}$ horizontální 1-formy ρ na J^2Y :

$$\rho = \rho_0(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)dt,$$

resp.

$$\rho = \rho_0(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)dt + \rho_\nu(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)dq^\nu,$$

resp.

$$\rho = \rho_0(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)dt + \rho_\nu(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)dq^\nu + \tilde{\rho}_\nu(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)d\dot{q}^\nu,$$

kde $1 \leq \sigma, \nu \leq m$.

Nechť $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$, $q \geq 1$, $s = 0, 1$. Pro každý bod $y = J_x^{s+1}\gamma \in J^{s+1}Y$ a každý systém tečných vektorů $\xi_1, \dots, \xi_q \in T_yJ^{s+1}Y$ položme

$$h\rho(J_x^{s+1}\gamma)(\xi_1, \dots, \xi_q) = \rho(J_x^s\gamma)(T_xJ^s\gamma \cdot T\pi_{s+1} \cdot \xi_1, \dots, T_xJ^s\gamma \cdot T\pi_{s+1} \cdot \xi_q).$$

Zobrazení $h : \Lambda^q(TJ^sY) \rightarrow \Lambda_X^q(TJ^{s+1}Y)$, které přiřazuje každé q -formě ρ na J^sY π_{s+1} -horizontální q -formu $h\rho$ na $J^{s+1}Y$, nazýváme *horizontalizace* a formu $h\rho$ *horizontální komponentou* nebo *horizontální složkou* formy ρ . Vzhledem k tomu, že $\dim X = 1$, dostáváme pro každou formu $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$, kde $q > 1$, nulovou horizontální komponentu, tj. $h\rho = 0$.

Příklad 2.3 (Horizontalizace 1-forem na J^1Y) Pro horizontalizaci na J^1Y platí:

$$hf = f \circ \pi_{2,1}, \quad hdt = dt, \quad hdq^\sigma = \dot{q}^\sigma dt, \quad hd\dot{q}^\sigma = \ddot{q}^\sigma dt,$$

$$hdf = \frac{df}{dt}dt,$$

kde f je funkce na J^1Y (0-forma) a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^\sigma} \dot{q}^\sigma + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\sigma} \ddot{q}^\sigma$$

se nazývá *totální derivace* funkce f .

Forma $\eta \in \Lambda^q(TJ^sY)$, $s = 1, 2$ se nazývá *kontaktní*, pokud pro každý řez γ fibrované variety Y platí:

$$J^s\gamma^*\eta = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $\dim X = 1$, je každá q -forma, kde $q > 1$, kontaktní. Zavádíme zobrazení $p : \Lambda^q(TJ^sY) \rightarrow \Lambda^q(TJ^{s+1}Y)$ předpisem:

$$p\eta = (\pi_{s+1,s})^*\eta - h\eta.$$

Vidíme, že $p\eta$ je kontaktní forma na $J^{s+1}Y$, zobrazení p nazýváme *kontaktizace* a formu $p\eta$ *kontaktní komponentou* formy η .

Příklad 2.4 (Kontaktní 1- formy na J^1Y a J^2Y) Kontaktní 1- formy na J^1Y :

$$\omega^\sigma = dq^\sigma - \dot{q}^\sigma dt.$$

Kontaktní 1- formy na J^2Y :

$$\omega^\sigma = dq^\sigma - \dot{q}^\sigma dt,$$

$$\dot{\omega}^\sigma = d\dot{q}^\sigma - \ddot{q}^\sigma dt,$$

kde $1 \leq \sigma \leq m$. Tyto kontaktní 1-formy nazýváme *kanonické kontaktní 1-formy*. Soubor $\{dt, \omega^\sigma, d\dot{q}^\sigma\}$ resp. $\{dt, \omega^\sigma, \dot{\omega}^\sigma, d\ddot{q}^\sigma\}$ je báze 1-forem na J^1Y resp. J^2Y . Modul kontaktních 1-forem na J^1Y resp. J^2Y budeme značit $\Omega^1(TJ^1Y)$ resp. $\Omega^1(TJ^2Y)$.

Každá forma $\eta \in \Lambda^q(TJ^sY)$, $s = 1, 2$, může být jednoznačně rozložena na součet horizontální a kontaktní komponenty:

$$(\pi_{s+1,s})^*\eta = p\eta + h\eta.$$

Je-li $q > 1$, pak horizontální komponenta $h\eta$ je nulová.

Řekneme, že forma $\eta \in \Lambda^q(TJ^sY)$, $s = 1, 2$ je *1-kontaktní*, jestliže pro každé π_s -vertikální vektorové pole Ξ na J^sY je $(q-1)$ -forma $i_{\Xi}\eta$ π_s -horizontální. Řekneme, že η je *k-kontaktní*, $2 \leq k \leq q$, jestliže pro každé π_s -vertikální vektorové pole Ξ na J^sY je $(q-1)$ -forma $i_{\Xi}\eta$ $(k-1)$ -kontaktní. Vzhledem k této definici můžeme o π_s -horizontálních formách mluvit jako o *0-kontaktních*.

Pro každou q -formu na J^sY existuje jednoznačný rozklad na součet $(q-1)$ -kontaktní a q -kontaktní q -formy na $J^{s+1}Y$:

$$(\pi_{s+1,s})^*\eta = p_{q-1}\eta + p_q\eta,$$

kde $p_k\eta$ se nazývá *k-kontaktní komponenta* formy η .

Příklad 2.5 Necht' $q \geq 1$ a $\eta \in \Lambda_{J^{s-1}Y}^q(TJ^sY)$, $s = 1, 2$. Forma η je $\pi_{s,s-1}$ -horizontální, což znamená, že pro $s = 1$ resp. $s = 2$ neobsahuje souřadnicové vyjádření formy η 1-formy $d\dot{q}^\sigma$ resp. 1-formy $d\ddot{q}^\sigma$. Všimněme si, že pro $\pi_{s,s-1}$ -horizontální formu η jsou formy $h\eta$, $p\eta$ $\pi_{s+1,s}$ -projektabilní. Označme $\Omega^{q-k,k}(TJ^sY)$ modul k -kontaktních q -forem $\eta \in \Lambda_{J^{s-1}Y}^q(TJ^sY)$, $0 \leq k \leq q$. Protože $\dim X = 1$, jsou netriviální pouze moduly $\Omega^{1,q-1}(TJ^sY)$ $(q-1)$ -kontaktních a $\Omega^{0,q}(TJ^sY)$ q -kontaktních q -forem na J^sY . Modul $\Lambda_{J^{s-1}Y}^q(TJ^sY)$ je přímým součtem submodulů

$$\Lambda_{J^{s-1}Y}^q(TJ^sY) = \Omega^{1,q-1}(TJ^sY) \oplus \Omega^{0,q}(TJ^sY)$$

a každou q -formu $\eta \in \Lambda_{J^{s-1}Y}^q(TJ^sY)$ lze na J^sY jednoznačně rozložit do tvaru

$$\eta = \eta_{q-1} + \eta_q,$$

kde η_{q-1} resp. η_q je $(q-1)$ -kontaktní resp. q -kontaktní q -forma na J^sY .

2.1.3 Distribuce na fibrované varietě

Distribucí na J^sY , $0 \leq s \leq 2$, nazýváme zobrazení

$$\Delta : J^sY \ni z \mapsto \Delta(z) \subset T_z J^sY,$$

kteří přiřazuje každému bodu na J^sY vektorový podprostor $\Delta(z)$ vektorového prostoru $T_z J^sY$. Dimenzi vektorového podprostoru $\Delta(z)$ budeme nazývat *rank distribuce Δ v bodě z* . Rank distribuce Δ pak je definován jako funkce $\text{rank} \Delta : J^sY \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazující každému bodu z hodnotu $\text{rank} \Delta(z)$. Je-li funkce $\text{rank} \Delta$ konstantní, pak řekneme, že distribuce Δ má *konstantní rank*.

Necht' ξ je lokální vektorové pole s definičním oborem $\text{dom} \xi$. Říkáme, že ξ náleží distribuci Δ , pokud pro každé $z \in \text{dom} \xi$ platí, že $\xi(z) \in \Delta(z)$. Každý systém $\{\xi_\iota\}_{\iota \in I}$ lokálních vektorových polí na J^sY takových, že $\bigcup \text{dom} \xi_\iota = J^sY$, definuje distribuci na J^sY . Naopak, ke každé distribuci Δ na J^sY můžeme najít systém lokálních vektorových polí nazývaných *generátory distribuce*, které danou distribuci generují, a píšeme $\Delta = \text{span}(\xi_\iota, \iota \in I)$. Distribuci budeme nazývat *hladkou*, může-li být zadána systémem hladkých vektorových polí.

Anihilátorem distribuce Δ v bodě $z \in J^sY$ rozumíme vektorový podprostor $\Delta^0(z) \subset T_z^* J^sY$,

$$\Delta^0(z) = \{\eta \in T_z^* J^sY \mid i_\xi \eta = 0 \ \forall \xi \in \Delta(z)\}.$$

Označme $\Delta^0 = \{\Delta^0(z) | z \in J^s Y\}$ množinu všech anihilátorů distribuce Δ .

Kodistribucí distribuce Δ nazýváme zobrazení

$$\Delta^0 : J^s Y \ni z \mapsto \Delta^0(z) \subset T_z^* J^s Y.$$

Dimenzi vektorového podprostoru $\Delta^0(z)$ značíme $\text{rank} \Delta^0(z)$ a nazýváme ji *ko-rank distribuce Δ v bodě z* . Platí $\text{rank} \Delta^0(z) + \text{rank} \Delta(z) = \dim J^s Y$.

Říkáme, že lokální 1-forma η *náleží distribuci Δ* , pokud pro každé $z \in \text{dom} \eta$ platí, že $\eta(z) \in \Delta^0(z)$. Každý systém lokálních 1-forem $\{\eta_\iota\}_{\iota \in I}$ na $J^s Y$ takových, že $\bigcup \text{dom} \eta_\iota = J^s Y$, definuje kodistribuci na $J^s Y$. Má-li hladká distribuce Δ konstantní rank ($\text{rank} \Delta = k$), pak ji můžeme v okolí každého bodu $z \in J^s Y$ ekvivalentně zadat buď systémem k lineárně nezávislých hladkých vektorových polí anebo systémem $(\dim J^s Y - k)$ lineárně nezávislých hladkých 1-forem $\{\eta_\iota\}_{\iota \in I}$ a píšeme $\Delta^0 = \text{span} \{\eta_\iota, \iota \in I\}$.

Nechť Δ je distribuce na $J^s Y$. Řez $\delta : X \rightarrow J^s Y$ nazveme *integrální řez* distribuce Δ , pokud pro každou 1-formu η náležející distribuci Δ platí

$$\delta^* \eta = 0,$$

nebo ekvivalentně $T_x \delta(T_x X) \subset \Delta(\delta(x))$, pro každý bod $x \in X$.

Nechť $\delta : X \rightarrow J^s Y$ je integrální řez distribuce Δ . Řekneme, že δ je *maximální dimenze v bodě $x \in X$* , když platí $T_x \delta(T_x X) = \Delta(\delta(x))$. Integrální řez δ se nazývá *maximální dimenze*, pokud je maximální dimenze v každém bodě $x \in X$.

Příklad 2.6 Mějme zadánu fibrovanou varietu Y s jednorozměrnou bází $X \equiv \mathbb{R}$. Nechť $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Nechť (V, ψ) , $\psi = (t, q^1, q^2)$ je fibrovaný souřadnicový systém na Y , (V_1, ψ_1) , $\psi_1 = (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2)$ asociovaný fibrovaný souřadnicový systém na $J^1 Y$ a (U, φ) , $\varphi = (t)$ je asociovaný souřadnicový systém na X . Vzhledem k tomu, že $X \equiv \mathbb{R}$, můžeme pro $x \in X$ psát $x \equiv t$.

Nechť Δ je distribuce na $J^1 Y$ generovaná vektorovým polem

$$\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma}.$$

Anihilátorem v bodě z je $\Delta^0(z) = \{\omega^1(z), \omega^2(z), d\dot{q}^1(z), d\dot{q}^2(z)\}$. Řez $\delta : (t) \mapsto (t, q^\sigma(t), \dot{q}^\sigma(t))$ variety $J^1 Y$, kde $\dot{q}^\sigma(t) = 0$ pro každé σ , je integrálním řezem distribuce Δ .

Poznamenejme, že je-li $\text{rank} \Delta = 1$ jako v tomto případě, pak integrální řez δ se nazývá *integrální křivka*.

2.2 Pohybové rovnice

Pohyb nevázaného mechanického systému je zcela určen Newtonovými pohybovými rovnicemi a počátečními podmínkami. Základním problémem mechaniky je sestavení pohybových rovnic a nalezení trajektorie mechanického systému jejich řešením.

V této kapitole se budeme věnovat shrnutí geometrického popisu mechanického systému vycházejícího z [10]. Mechanický systém ztotožníme s jistou třídou ekvivalence 2-forem a informace o dynamice mechanického systému bude obsažena v tzv. dynamické distribuci na J^1Y . Připomeňme, že pohybové rovnice mechanického systému jsou druhého řádu a proto k jeho popisu postačí první a druhé jetové prodloužení fibrované variety. Obdobně jako v předchozí kapitole uvádíme pouze shrnutí tvrzení bez důkazů, které lze nalézt v [10].

2-formu E na J^2Y nazýváme *dynamická forma*, je-li 1-kontaktní a $\pi_{2,0}$ -horizontální. E je dynamická forma právě tehdy, má-li souřadnicové vyjádření

$$E = E_\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu) \omega^\sigma \wedge dt,$$

kde $1 \leq \sigma, \nu \leq m$. V dalším výkladu se omezíme na dynamické formy, jejichž složky mají tvar

$$E_\sigma = A_\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) + B_{\sigma\rho}(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) \ddot{q}^\rho,$$

kde $1 \leq \sigma, \nu, \rho \leq m$. *Trajektorii dynamické formy E* nazveme řez γ fibrované variety (Y, π, X) , který splňuje podmínku $E \circ J^2\gamma = 0$. Je-li tato podmínka splněna, pak mají složky E_σ dynamické formy význam levých stran pohybových rovnic, γ má význam trajektorie mechanického systému a pro složky $\gamma^\nu(t)$ trajektorie systému můžeme psát pohybové rovnice:

$$A_\sigma(t, \gamma^\nu, \frac{d\gamma^\nu}{dt}) + B_{\sigma\rho}(t, \gamma^\nu, \frac{d\gamma^\nu}{dt}) \frac{d^2\gamma^\rho}{dt^2} = 0.$$

Řekneme, že 2-forma α na J^1Y je *Lepageova 2-forma asociovaná s E* , pokud pro její 1-kontaktní komponentu platí $p_1\alpha = E$. Dostáváme tak třídu ekvivalence $[\alpha]$ Lepageových 2-forem asociovaných s E , jejíž prvky mají tvar

$$\alpha = A_\sigma \omega^\sigma \wedge dt + B_{\sigma\nu} \omega^\sigma \wedge dq^\nu + F,$$

kde $F = F_{\sigma\nu}(t, q^\rho, \dot{q}^\rho) \omega^\sigma \wedge \omega^\nu$ je libovolná 2-kontaktní 2-forma na J^1Y .

Nechť $\Delta_\alpha^0 = \text{span}\{i_\xi\alpha\}$, kde ξ probíhá množinu všech π_1 -vertikálních vektorových polí na J^1Y . Odpovídající distribuci Δ_α na J^1Y nazveme *dynamická distribuce*. Prvky anihilátoru dynamické distribuce mají tvar $A_\sigma dt + 2F_{\sigma\nu} \omega^\nu + B_{\sigma\nu} dq^\nu$, $B_{\sigma\nu} \omega^\nu$.

Mechanickým systémem budeme rozumět třídu ekvivalence $[\alpha]$ ekvivalentních Lepageových 2-forem na J^1Y asociovaných s E . Třídu příslušných dynamických distribucí pak značíme $[\Delta_\alpha]$. V dalším budeme používat označení α resp. Δ_α pro reprezentanta třídy ekvivalence $[\alpha]$ resp. $[\Delta_\alpha]$.

Holonomní integrální řezy dynamických distribucí $\Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\alpha_2}$ příslušných ekvivalentním Lepageovým 2-formám α_1, α_2 jsou totožné a zároveň jsou totožné s trajektorií γ systému $[\alpha]$.

Mechanický systém $[\alpha]$ se nazývá *regulární*, je-li $\text{rank } \Delta_\alpha = 1$ pro jisté $\alpha \in [\alpha]$. Je-li mechanický systém regulární, pak je matice $(B_{\sigma\nu})$ regulární v každém bodě $y \in J^1Y$ a platí $\Delta_{\alpha_1} = \Delta_{\alpha_2}$ pro libovolné $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha]$. Regulární dynamickou distribuci příslušnou mechanickému systému $[\alpha]$ generuje vektorové pole

$$\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} - B^{\sigma\rho} A_\rho \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma},$$

kde $B^{\sigma\rho}$ je matice inverzní k $B_{\sigma\rho}$ a $1 \leq \sigma, \rho \leq m$. Anihilátor regulární dynamické distribuce má tvar

$$\text{span}\{A_\sigma dt + B_{\sigma\nu} d\dot{q}^\nu, \omega^\sigma\}.$$

2.3 Variačnost

V této kapitole shrneme pro účel této práce nejdůležitější výsledky geometrického popisu variačního nevázaného systému podle [8]. Zavedeme lagranžián jako horizontální 1-formu a Eulerovu-Lagrangeovu formu jako zobecnění Eulerových-Lagrangeových výrazů na fibrované varietě. Zformulujeme podmínku variačnosti mechanického systému $[\alpha]$ a uvedeme Helmholtzovy podmínky variačnosti, které jsou důsledkem požadavku variačnosti mechanického systému $[\alpha]$. Připomeňme, že uvažujeme pouze mechanické systémy prvního řádu a používáme odpovídající definice jednotlivých objektů.

Lagranžiánem 1. řádu nazýváme horizontální 1-formu λ na J^1Y . Její vyjádření v asociovaných souřadnicích je

$$\lambda = L(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma) dt,$$

kde $1 \leq \sigma \leq m$ a L je funkce na J^1Y nazývaná *Lagrangeova funkce*. Je-li zadán lagranžián λ , pak dvojici (π, λ) nazýváme *Lagrangeova struktura*.

Nechť E je dynamická forma na J^2Y a ρ je 1-forma na J^1Y . Je-li možné formu $d\rho$ rozložit do tvaru

$$(\pi_{2,1})d\rho = E + F,$$

kde E je dynamická forma na J^2Y a F je 2-kontaktní 2-forma na J^2Y nebo ekvivalentně platí, že 1-kontaktní komponenta $p_1d\rho$ je dynamická forma E , pak formu ρ nazýváme *Lepageovou 1-formou*. Nechť λ je lagranžian 1. řádu. Lepageovu 1-formu ρ , pro niž platí $h\rho = \lambda$, nazýváme *Lepageův ekvivalent* lagranžianu λ . Každému lagranžianu λ lze jednoznačně přiřadit Lepageův ekvivalent, který značíme θ_λ a nazýváme *Poincaré-Cartanova forma* lagranžianu λ . Ve fibrováných souřadnicích dostáváme

$$\theta_\lambda = Ldt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \omega^\sigma.$$

Dynamickou formu E_λ , která je s Poincaré-Cartanovou formou spjata vztahem $p_1d\theta_\lambda = E_\lambda = E_\sigma(L)\omega^\sigma \wedge dt$, nazýváme *Eulerova-Lagrangeova forma*. Pro její složky dostáváme vyjádření

$$E_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}, \quad 1 \leq \sigma \leq m.$$

Řekneme, že dynamická forma E je *variační* nebo *globálně variační*, existuje-li na J^1Y lagranžian λ takový, že platí $E = E_\lambda$. E se nazývá *lokálně variační*, pokud existuje na J^2Y pokrytí otevřenými množinami takové, že restrikce E na libovolnou otevřenou množinu z tohoto pokrytí je variační forma. Je-li dynamická forma lokálně nebo globálně variační, pak rovnice trajektorií dynamické formy E jsou *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice*:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq m.$$

Mechanický systém $[\alpha]$ příslušný variační dynamické formě E budeme nazývat *variační mechanický systém*. Je-li $[\alpha]$ variační mechanický systém, pak existuje uzavřený reprezentant α_E třídy $[\alpha]$ a naopak, existuje-li uzavřený reprezentant α_E třídy $[\alpha]$, pak je mechanický systém $[\alpha]$ variační. Nechť $[\alpha]$ je variační mechanický systém. Pak existuje reprezentant třídy $[\alpha]$ tvaru $\alpha = d\theta_\lambda + F$, kde θ_λ je Poincaré-Cartanova forma a F je $\pi_{1,0}$ -horizontální 2-kontaktní 2-forma.

Příklad 2.7 (Helmholtzovy podmínky) Mějme mechanický systém $[\alpha]$, jehož pohybové rovnice mají tvar

$$A_\sigma(t, q^\rho, \dot{q}^\rho) + B_{\sigma\nu}(t, q^\rho, \dot{q}^\rho) \ddot{q}^\nu = 0.$$

Systém $[\alpha]$ je variační právě tehdy, jsou-li splněny tzv. Helmholtzovy podmínky

$$\begin{aligned} B_{\sigma\nu} &= B_{\nu\sigma}, & \frac{\partial B_{\sigma\nu}}{\partial \dot{q}^\sigma} &= \frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial \dot{q}^\nu} \\ \frac{\partial A_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} &= 2 \frac{\bar{d} B_{\sigma\nu}}{dt} \\ \frac{\partial A_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{\bar{d}}{dt} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma}.$$

Je-li systém $[\alpha]$ variační, existuje Lagrangeova funkce L taková, že platí:

$$A_\sigma(t, q^\rho, \dot{q}^\rho) + B_{\sigma\nu}(t, q^\rho, \dot{q}^\rho) \ddot{q}^\nu = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}.$$

Výše jsme uvedli, že mechanický systém $[\alpha]$ je variační právě tehdy, když třída ekvivalence $[\alpha]$ obsahuje uzavřeného reprezentanta. Podmínky pro složky E_σ dynamické formy, za kterých je forma α uzavřená, vyplývají z rovnice $d\alpha = 0$ a po úpravách mají tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} &= 0 \\ \frac{\partial E_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial E_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} \right) &= 0 \\ \frac{\partial E_\sigma}{\partial q^\nu} + \frac{\partial E_\nu}{\partial q^\sigma} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde $1 \leq \sigma, \nu \leq m$. Dosazením z rovnice $E_\sigma = A_\sigma + B_{\sigma\nu} \ddot{q}^\nu$ za E_σ a úpravami zjistíme, že soubor podmínek (2) je ekvivalentní souboru Helmholtzových podmínek (1).

3 Geometrická teorie neholonomně vázaných systémů

Vazby, jež klademe na mechanický systém, představují dodatečné požadavky mající obecně podobu rovnic nejvýše prvního řádu. Základním úkolem mechaniky vázaných systémů je nalezení řešení systému, který je popsán "nevázanými" pohybovými rovnicemi a zároveň splňuje rovnice vazeb. Tento problém pro holonomní vazby dobře vyřešila teorie Lagrangeových multiplikátorů (viz např. [1]). Ta zajišťuje splnění holonomních vazeb pomocí tzv. vazebních sil dodatečně přidávaných do pohybových rovnic. Je-li pohyb mechanického systému vázán k určité ploše, pak je příslušná vazební síla kolmá k této ploše. Metodu Lagrangeových multiplikátorů nelze použít pro neholonomní vazby, které nejsou lineární ve složkách rychlostí.

V této kapitole přistoupíme k výkladu geometrické teorie systémů vázaných libovolnou neholonomní vazbou, kterou formulovala prof. Krupková (viz [10]). Přebíráme značení a terminologii z [26]. Rovněž se držíme výkladu teorie uvedeného v [26] včetně převzatých tvrzení, která uvádíme bez důkazů. Shrnutí teorie jsme doplnili o příklady, které mají za cíl usnadnit vzhled do problematiky.

Neholonomní vazby jsou představovány podvarietou prvního jetového prodloužení fibrované variety, na níž se zavádí tzv. kanonická distribuce. Mechanický systém podrobený neholonomní vazbě je pak představován třídou ekvivalence 2-forem podél kanonické distribuce. Trajektorie vázaného mechanického systému je představována tzv. vazebně přípustným řezem fibrované variety (viz [26]), jehož první jetové prodloužení má hodnoty na vazební podvarietě.

Řešení neholonomně vázaného systému pomocí [10] lze získat ze dvou typů pohybových rovnic. Jedná se o soustavu dynamických pohybových rovnic a soustavu redukováných pohybových rovnic. V dynamických pohybových rovnicích můžeme spatřovat analogii s metodou Lagrangeových multiplikátorů, neboť se zavádí vazební síla, jejímž přidáním do pohybových rovnic nevázaného systému se zaručí splnění neholonomní vazby. Druhou, z hlediska nalezení trajektorie vázaného systému ekvivalentní, soustavou pohybových rovnic jsou rovnice redukované, v nichž již není obsažena informace o vazební síle.

V poslední části této kapitoly se budeme věnovat neholonomnímu variačnímu principu, jak byl formulován v [26], jehož výsledkem jsou vázané Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.

3.1 Neholonomní vazební struktura

V tomto odstavci uvedeme základní výsledky teorie neholonomních systémů. Zavedeme vazební podvarietu, kanonickou distribuci a budeme se podrobněji věnovat formám a vektorovým polím na vazební podvarietě a jejich vztahu ke kanonické distribuci. V druhé části odstavce definujeme vazební ideál a základní operace "vazebního počtu", který se využívá při formulaci neholonomního variačního principu.

3.1.1 Vazební podvarieta

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta, $\dim X = 1$, $\dim Y = m + 1$, J^1Y a J^2Y její první a druhé jetové prodloužení, $\dim J^1Y = 2m + 1$, $\dim J^2Y = 3m + 1$. Zvolme opět standardní označení souřadnicových systémů. Fibrovaný souřadnicový systém na Y označíme (V, ψ) , $\psi = (t, q^\sigma)$, asociovaný souřadnicový systém na X je $(\pi(V), \varphi)$, kde $\varphi = (t)$. Asociovaný fibrovaný souřadnicový systém na J^1Y resp. J^2Y je (V_1, ψ_1) , kde $V_1 = \pi_{1,0}^{-1}(V)$ a $\psi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$ resp. (V_2, ψ_2) , kde $V_2 = \pi_{2,0}^{-1}(V)$ a $\psi_2 = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ddot{q}^\sigma)$.

Nechť Q je podvarieta J^1Y dimenze $2m + 1 - k$, kde $1 \leq k \leq m - 1$. V každém bodě $x \in Q$ existuje souřadnicový systém (U, χ) na J^1Y adaptovaný ke Q . Označme souřadnicové funkce $\chi = (x^p, f^i)$, $1 \leq p \leq 2m + 1 - k$, $1 \leq i \leq k$. Podvarieta Q je na otevřené množině U zadána rovnicemi

$$f^i = 0, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (3.1)$$

Označme $Q_U = Q \cap U$. Podvarietu Q_U nazveme *vazební podvarietou, lokální vazbou*, pokud v každém bodě $x \in U$ platí:

$$\text{rank} \left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) = k, \quad (3.2)$$

kde $1 \leq i \leq k$, $1 \leq \sigma \leq m$. Systém (1) pak nazveme *systémem k neholonomních vazeb*. Připomeňme, že speciálním případem vazeb neholonomních jsou *semiholonomní vazby*, u nichž má levá strana rovnic (1) tvar

$$f^i = \frac{du^i(t, q^\sigma)}{dt}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (3.3)$$

Podvarieta Q fibrované variety J^1Y se nazývá *vazební podvarietou* či *globální vazbou*, jestliže ji lze pokrýt souborem $\{(U_\iota, \chi_\iota)\}$ adaptovaných souřadnicových

systémů takových, že pro každé ι platí na U_ι podmínka (2). Poznamenejme, že v takovém případě je $\pi_{1,0}|_Q : Q \rightarrow Y$ fibrovaná podvarieta fibrované variety $\pi_{1,0} : J^1Y \rightarrow Y$.

Bez újmy na obecnosti můžeme vzhledem k platnosti (2) zavést tzv. *normální tvar* vazebních podmínek (1):

$$\bar{f}^i \equiv \dot{q}^{m-k+1} - g^i(t, q^\sigma, \dot{q}^l) = 0, \quad (3.4)$$

kde $1 \leq \sigma \leq m$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l \leq m - k$.

Nechť

$$\iota : x \in Q \rightarrow \iota(x) \in J^1Y$$

je kanonické vložení vazební podvariety Q do J^1Y . Nechť (V, ψ) je fibrovaný souřadnicový systém na Y . Nechť $x \in Q$ a (V_1, ψ_1) , $x \in V_1$, $\psi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$ je asociovaný fibrovaný souřadnicový systém na J^1Y . Předpokládejme, že (U_1, χ_1) , $U_1 \subset (V_1 \cap Q)$, $\chi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^l)$ je souřadnicový systém na Q , $x \in U_1$. Vyjádření kanonického vložení ι má v těchto souřadnicových systémech tvar

$$\iota(t, q^\sigma, \dot{q}^l) = (t, q^\sigma, \dot{q}^l, g^i(t, q^\nu, \dot{q}^s)),$$

kde $1 \leq l, s \leq m - k$, $1 \leq \sigma, \nu \leq m$, $1 \leq i \leq k$.

Příklad 3.1 Úplný zápis souřadnicového vyjádření kanonického vložení ι v souřadnicových systémech (U_1, χ_1) , (V_1, ψ_1) má tvar

$$\begin{aligned} & \psi_1 \circ \iota \circ \chi_1^{-1}(t\chi_1(x), q^\sigma\chi_1(x), \dot{q}^l\chi_1(x)) = \\ & = \left(t\chi_1(x), q^\sigma\chi_1(x), \dot{q}^l\chi_1(x), g^i(t\chi_1(x), q^\nu\chi_1(x), \dot{q}^s\chi_1(x)) \right), \end{aligned}$$

kde $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l, s \leq m - k$, $1 \leq \sigma, \nu \leq m$.

V množině řezů fibrované variety (J^1Y, π_1, X) jsou z hlediska teorie vazeb významné tzv. *vazební řezy* $\bar{\delta}$, které mají hodnoty na vazební podvarietě Q . Řez $\bar{\delta}$ definovaný na $I \subset X$ nazýváme vazební, pokud pro každé $x \in I$ platí:

$$\bar{\delta}(x) \in Q.$$

Mezi řezy fibrované variety Y jsou významné řezy $\bar{\gamma}$, které nazýváme *Q-přípustné řezy* fibrované variety Y . Řez $\bar{\gamma}$ definovaný na otevřené množině $I \subset X$ nazveme *Q-přípustným řezem*, pokud je pro každé $x \in I$ splněno:

$$J^1\bar{\gamma}(x) \in Q,$$

tj. $J^1\bar{\gamma}$ je vazebním řezem. Množinu všech Q -přípustných řezů budeme značit $\bar{\Gamma}^Q(\pi)$. Vazební řez $\bar{\delta} : I \rightarrow J^1Y$ se nazývá *holonomní trajektorii v Q* , jestliže existuje řez $\bar{\gamma} : I \rightarrow Y$ tak, že $\bar{\delta} = J^1\bar{\gamma}$. Řez $\bar{\gamma}$ je pak Q -přípustný. Poznamenejme, že z fyzikálního hlediska jsou řezy $\bar{\delta}$ vazebními fázovými trajektoriami (okamžité rychlosti splňují vazební podmínky).

Příklad 3.2 Mějme fibrovanou varietu (Y, π, X) , $\dim X = 1$, $\dim Y = 3$, kde souřadnice na X resp. na Y značíme (t) , resp. (t, x, y) . První jetové prodloužení J^1Y fibrované variety Y má dimenzi 5 a souřadnice $(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Zadejme neholonomní vazbu

$$\dot{y} = g^1(\dot{x}) = \sqrt{E - \dot{x}^2},$$

která definuje 4-rozměrnou vazební podvarietu $Q \subset J^1Y$. Uvažujme o řezu $\bar{\delta} : X \supset I \rightarrow J^1Y$ zadaném v souřadnicích takto:

$$\bar{\delta} : t = t, x = at, y = t\sqrt{E - a^2}, \dot{x} = a, \dot{y} = \sqrt{E - a^2},$$

kde a je konstanta. Tento řez má hodnoty na Q . Řez $\bar{\gamma} : I \rightarrow X$, kde

$$\bar{\gamma} : t = t, x = at, y = t\sqrt{E - a^2},$$

je Q -přípustným řezem fibrované variety Y .

3.1.2 Lift vazební podvariety do J^2Y

Nechť Q je vazební podvarietu v J^1Y a $\bar{\Gamma}^Q(\pi)$ značí množinu všech Q -přípustných řezů fibrované variety Y . Druhé jety Q -přípustných řezů vytvářejí *lift vazební podvariety Q* , který budeme značit \tilde{Q} :

$$\tilde{Q} = \{J_x^2\bar{\gamma} \mid \bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}^Q(\pi)\}.$$

Projekci

$$\pi_{2,1}|_{\tilde{Q}} : \tilde{Q} \ni J_x^2\bar{\gamma} \rightarrow J_x^1\bar{\gamma} \in Q \quad (3.5)$$

budeme značit ρ . \tilde{Q} je podvarietou variety J^2Y a má dimenzi $3m + 1 - 2k$.

Nechť (U_1, χ_1) , $\chi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^l)$, $1 \leq l \leq m - k$, $1 \leq \sigma \leq m$ je souřadnicový systém na Q . Na \tilde{Q} existuje asociovaný souřadnicový systém $(\tilde{U}_1, \tilde{\chi}_1)$, kde $\tilde{U}_1 = \rho^{-1}(U_1)$ a $\tilde{\chi}_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^l, \ddot{q}^l)$, kde souřadnice \ddot{q}^l definujeme:

$$\ddot{q}^l J_x^2\bar{\gamma} = \left. \frac{d^2(q^l\bar{\gamma}(t))}{dt^2} \right|_{t=\varphi(x)}, \quad 1 \leq l \leq m - k.$$

Je-li vazební podvarietu Q zadána rovnicemi (4), pak její lift \tilde{Q} na J^2Y je zadán takto:

$$\begin{aligned} \dot{q}^{m-k+1} &= g^i(t, q^\sigma, \dot{q}^l), \\ \ddot{q}^{m-k+1} &= \frac{dg^i}{dt} \equiv \frac{\partial g^i}{\partial t} + \frac{\partial g^i}{\partial q^\sigma} \dot{q}^\sigma + \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l, \end{aligned} \quad (3.6)$$

kde $1 \leq \sigma \leq m$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l \leq m - k$.

Obdobně jako na vazební podvarietě Q definujeme přípustné řezy na jejím liftu \tilde{Q} . \tilde{Q} -přípustný řez fibrované variety (Y, π, X) je takový řez $\tilde{\gamma}$ variety (Y, π, X) , pro který $J^2\tilde{\gamma}(x) \in \tilde{Q}$, pro všechna $x \in \text{dom}\tilde{\gamma}$. Z definice vyplývá, že každý Q -přípustný řez $\tilde{\gamma}$ je \tilde{Q} -přípustným řezem a naopak, je-li $\tilde{\gamma}$ \tilde{Q} -přípustný řez fibrované variety (Y, π, X) pak je také Q -přípustným řezem.

Nechť

$$\tilde{\iota} : x \in \tilde{Q} \rightarrow \tilde{\iota}(x) \in J^2Y.$$

je kanonické vložení liftu \tilde{Q} do J^2Y . Buď (V_2, ψ_2) fibrovaný souřadnicový systém na J^2Y asociovaný s fibrovaným souřadnicovým systémem (V, ψ) na Y . Nechť $x \in \tilde{U}_1$, $\tilde{U}_1 \subset V_2 \cap \tilde{Q}$. Pak $(\tilde{U}_1, \tilde{\chi}_1)$, $\tilde{\chi}_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^l, \ddot{q}^l)$, $1 \leq l \leq m - k$, je souřadnicový systém na \tilde{Q} .

Souřadnicové vyjádření kanonického vložení $\tilde{\iota}$ má tvar:

$$\tilde{\iota}(t, q^\sigma, \dot{q}^l, \ddot{q}^l) = (t, q^\sigma, \dot{q}^l, g^i(t, q^\nu, \dot{q}^s), \ddot{q}^l, \frac{dg^i(t, q^\nu, \dot{q}^s)}{dt}),$$

kde $1 \leq l, s \leq m - k$, $1 \leq \sigma, \nu \leq m$, $1 \leq i \leq k$.

3.1.3 Vektorová pole na vazební podvarietě

Připomeňme standardní konstrukci tečného prostoru k fibrované varietě pro vazební podvarietu Q .

Nechť $Q \subset J^1Y$ je vazební podvarietu dimenze $2m + 1 - k$. Mějme na Q souřadnicový systém (U_1, χ_1) , $\chi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^l)$, $1 \leq l \leq m - k$, $1 \leq \sigma \leq m$. Nechť T_xQ je tečný prostor ke Q v bodě $x \in Q$ a označme

$$TQ = \bigcup_{x \in Q} T_xQ.$$

Definujme zobrazení

$$\tau_Q : T_xQ \ni \xi \rightarrow x \in Q \quad (3.7)$$

a označme $\mathcal{U} = \tau_Q^{-1}(U_1)$, $\xi \in \mathcal{U} \subset TQ$, $\xi = [\zeta]$ libovolný tečný vektor ke Q .

Připomeňme, že $[\zeta]$ značí třídu ekvivalentních křivek na Q s dotykem prvního řádu v bodě x , křivky jsou parametrizovány parametrem s , $\zeta(0) = x$.

Definujme zobrazení $T\chi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{4m+2-2k}$ vztahem

$$T\chi_1 : \mathcal{U}_1 \ni \xi \rightarrow T\chi_1(\xi) = (t, q^\sigma, \dot{q}^l, \xi^0, \xi^\sigma, \tilde{\xi}^l) \in \chi_1(U_1) \times \mathbb{R}^{2m+1-k}, \quad (3.8)$$

kde $t = t\chi_1(x)$, $q^\sigma = q^\sigma\chi_1(x)$, $\dot{q}^l = \dot{q}^l\chi_1(x)$, $x = \tau_Q(\xi)$ a

$$\xi^0 = \left(\frac{dt\zeta(s)}{ds} \right)_0, \quad (3.9)$$

$$\xi^\sigma = \left(\frac{dq^\sigma\zeta(s)}{ds} \right)_0, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\xi}^l = \left(\frac{d\dot{q}^l\zeta(s)}{ds} \right)_0. \quad (3.11)$$

Pak $(\mathcal{U}_1, T\chi_1)$ je souřadnicový systém na TQ . Je zřejmé, že je-li $\dim Q = 2m + 1 - k$, pak $\dim TQ = 4m + 2 - 2k$ a je-li $A_Q = \{(U_{1\nu}, \chi_{1\nu})\}_{\nu \in I}$ atlas na Q , pak $\{(\mathcal{U}_{1\nu}, T\chi_{1\nu})\}_{\nu \in I}$ je atlas na TQ . TQ s maximálním atlasem je diferencovatelná varieta dimenze $4m + 2 - 2k$ zvaná *tečné rozvrstvení vazební podvariety* Q .

T_xQ se standardně definovanými operacemi sčítání a násobení skalárem je $(2m + 1 - k)$ - rozměrný vektorový prostor.

Příklad 3.3 (Báze vektorového prostoru T_xQ) Nechť (U_1, χ_1) , kde $\chi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^l)$ je souřadnicový systém na vazební podvarietě Q , pak báze vektorového prostoru T_xQ indukovaná tímto souřadnicovým systémem má tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} \right)_x \quad (3.12)$$

a pro $\xi \in T_xQ$ píšeme $\xi = \xi^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x + \xi^\sigma \left(\frac{\partial}{\partial q^\sigma} \right)_x + \tilde{\xi}^l \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} \right)_x$ nebo krátce $\xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}$, kde $\xi^0, \xi^\sigma, \tilde{\xi}^l, 1 \leq l \leq m - k, 1 \leq \sigma \leq m$ jsou složky vektoru ξ .

$T_xQ, x \in Q \subset J^1Y$, je vektorovým podprostorem vektorového prostoru T_xJ^1Y . Nechť ι je kanonické vložení vazební podvariety Q do J^1Y a $T_x\iota$ je příslušné tečné zobrazení v bodě $x \in Q$. Báze vektorového podprostoru T_xQ má v prostoru T_xJ^1Y tvar

$$\Xi_0 = T_x\iota \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial g^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{m-k+i}},$$

$$\begin{aligned}\Xi_\sigma &= T_{x^\iota} \left(\frac{\partial}{\partial q^\sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial g^i}{\partial q^\sigma} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{m-k+i}}, \\ \Xi_l &= T_{x^\iota} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} + \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{m-k+i}},\end{aligned}\tag{3.13}$$

kde $1 \leq \sigma \leq m$, $1 \leq l \leq m - k$, $1 \leq i \leq k$.

Vektorovým polem na vazební podvarietě Q nazveme (diferencovatelné) zobrazení:

$$\xi : Q \ni x \rightarrow \xi(x) \in T_x Q.\tag{3.14}$$

Vektorové pole ξ na vazební podvarietě lze vyjádřit v souřadnicích:

$$\xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l},\tag{3.15}$$

kde ξ^0 , ξ^σ , $\tilde{\xi}^l$ jsou funkce na Q a $1 \leq \sigma \leq m$, $1 \leq l \leq m - k$, $1 \leq i \leq k$.

Definice projektabilního resp. vertikálního vektorového pole na Q se shodují s definicemi na $J^1 Y$. Nechť ξ je vektorové pole na vazební podvarietě Q . Řekneme, že ξ je π_1 -projektabilní resp. $\pi_{1,0}$ -projektabilní, existuje-li na X resp. na Y vektorové pole ξ_0 resp. $\bar{\xi}_0$ takové, že platí $T\pi_1(\xi) = \xi_0 \circ \pi_1$. resp. $T\pi_{1,0}(\xi) = \bar{\xi}_0 \circ \pi_{1,0}$. Řekneme, že vektorové pole ξ je π_1 -vertikální resp. $\pi_{1,0}$ -vertikální, jestliže platí $T\pi_1(\xi) = 0$ resp. $T\pi_{1,0}(\xi) = 0$.

Příklad 3.4 Z definice vyplývá tvar π_1 resp. $\pi_{1,0}$ -projektabilního vektorového pole na Q :

$$\xi = \xi^0(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^b) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^l(t, q^\nu, \dot{q}^b) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l},\tag{3.16}$$

resp.

$$\xi = \xi^0(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^l(t, q^\nu, \dot{q}^b) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}.\tag{3.17}$$

π_1 resp. $\pi_{1,0}$ -vertikální vektorové pole na Q má tvar:

$$\xi = \xi^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^b) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^l(t, q^\nu, \dot{q}^b) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l},\tag{3.18}$$

resp.

$$\xi = \tilde{\xi}^l(t, q^\nu, \dot{q}^b) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}.\tag{3.19}$$

Obdobně jako na vazební podvarietě Q se zavádí tečné rozvrstvení na jejím liftu \tilde{Q} , kde bázi vektorového prostoru $T_x\tilde{Q}$, $x \in \tilde{Q}$ indukovanou souřadnicovým systémem $(\tilde{U}_1, \tilde{\chi}_1)$ značíme:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}, \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^l} \right)_x, \quad 1 \leq l \leq m-k, 1 \leq \sigma \leq m \quad (3.20)$$

a vektorové pole $\xi : \tilde{Q} \ni x \rightarrow \xi(x) \in T_x\tilde{Q}$ na \tilde{Q} má souřadnicové vyjádření

$$\xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} + \tilde{\xi}^l \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^l},$$

kde ξ^0 , ξ^σ , $\tilde{\xi}^l$, $\tilde{\xi}^l$ jsou funkce na \tilde{Q} . Definice projektabilního a vertikálního vektorového pole ξ na \tilde{Q} jsou shodné s definicemi na J^2Y .

3.1.4 Formy na vazební podvarietě

Nechť $Q \subset J^1Y$ je vazební podvarieteta a mějme zadanou bázi (12) tečného vektorového prostoru T_xQ , $x \in Q$. Duální báze k bázi (12) má tvar $(dt, dq^\sigma, d\dot{q}^l)_x$. Tato báze generuje v bodě $x \in Q$ vektorový prostor T_x^*Q , prostor duální k T_xQ . Diferencovatelné zobrazení $\eta : Q \ni x \rightarrow \eta(x) \in T_x^*Q$ nazýváme *diferenciální 1-forma*, nebo jen *1-forma* na Q . Obecná 1-forma na vazební podvarietě má tvar:

$$\eta = \eta_0(t, q^\nu, \dot{q}^b)dt + \eta_\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^b)dq^\sigma + \tilde{\eta}_l(t, q^\nu, \dot{q}^b)d\dot{q}^l, \quad (3.21)$$

kde $1 \leq \sigma, \nu \leq m, 1 \leq l, b \leq m-k$.

Příklad 3.5 (Báze T_x^*Q v prostoru $T_x^*J^1Y$) Nechť je vazební podvarieteta Q zadána na J^1Y rovnicemi: $\dot{q}^{m-k+i} = g^i(t, q^\sigma, \dot{q}^l)$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l \leq m-k, 1 \leq \sigma \leq m$. Buď

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} \right)_x$$

báze tečného vektorového prostoru T_xJ^1Y , $x \in Q \subset J^1Y$ a $(dt, dq^\sigma, d\dot{q}^\sigma)$ příslušná báze duální generující duální vektorový prostor $T_x^*J^1Y$ k T_xJ^1Y . Vektorový prostor T_x^*Q je vektorovým podprostorem prostoru $T_x^*J^1Y$. Buď (13) báze T_xQ v prostoru T_xJ^1Y , příslušná báze duální v prostoru $T_x^*J^1Y$ má tvar

$$\begin{aligned} \eta^0 &= dt + c_i(dg^i - d\dot{q}^{m-k+i}), \\ \eta^\sigma &= dq^\sigma + c_i(dg^i - d\dot{q}^{m-k+i}), \\ \tilde{\eta}^l &= d\dot{q}^l + c_i(dg^i - d\dot{q}^{m-k+i}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde $c_i \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zvolíme-li $c_i = 0$ pak má báze (22) tvar $(\eta^0, \eta^\sigma, \tilde{\eta}^l) = (dt, dq^\sigma, d\tilde{q}^l)$. Provedeme-li pullback bázových forem (22) kanonickým vložním ι , dostáváme $(\iota^*\eta^0, \iota^*\eta^\sigma, \iota^*\tilde{\eta}^l) = (dt, dq^\sigma, d\tilde{q}^l)$.

Obdobné úvahy jako pro 1-formy na Q můžeme vést pro 1-formy na \tilde{Q} . Shrňme, že duální báze k bázi (20) tečného vektorového prostoru $T_x\tilde{Q}$, $x \in \tilde{Q}$ má tvar $(dt, dq^\sigma, d\tilde{q}^l, d\tilde{q}^l)$ a obecná 1-forma na \tilde{Q} má tvar:

$$\eta = \eta_0 dt + \eta_\sigma dq^\sigma + \tilde{\eta}_l d\tilde{q}^l + \tilde{\eta}_l d\tilde{q}^l, \quad (3.23)$$

kde $\eta_0, \eta_\sigma, \tilde{\eta}_l, \tilde{\eta}_l$ jsou funkce na \tilde{Q} a $1 \leq l \leq m-k$, $1 \leq \sigma \leq m$. Diferencovatelné zobrazení $\eta : Q \ni x \rightarrow \eta(x) \in \Lambda^q(TQ)$ resp. $\eta : \tilde{Q} \ni x \rightarrow \eta(x) \in \Lambda^q(T\tilde{Q})$ nazýváme diferenciální q -forma, nebo jen q -forma na Q resp. \tilde{Q} , kde modul q -forem na Q resp. \tilde{Q} značíme $\Lambda^q(TQ)$ resp. $\Lambda^q(T\tilde{Q})$.

3.1.5 Horizontální a kontaktní formy na Q

Uvedeme standardní definice horizontálnosti a kontaktnosti forem na vazební podvarietě Q a definujeme horizontalizaci a kontaktizaci na vazební podvarietě.

Forma $\eta \in \Lambda^q(TQ)$ se nazývá π_1 resp. $\pi_{1,0}$ -*horizontální*, pokud pro každé π_1 resp. $\pi_{1,0}$ -vertikální vektorové pole ξ na Q platí

$$i_\xi \eta = 0. \quad (3.24)$$

π_1 resp. $\pi_{1,0}$ -horizontální 1-forma na Q má tvar:

$$\eta = \eta_0(t, q^\nu, \tilde{q}^l) dt,$$

resp.

$$\eta = \eta_0(t, q^\nu, \tilde{q}^l) dt + \eta_\sigma(t, q^\nu, \tilde{q}^l) dq^\sigma,$$

kde $1 \leq \sigma, \nu \leq m$, $1 \leq l \leq m-k$. Forma η na vazební podvarietě Q se nazývá *kontaktní*, pokud pro každý Q -přípustný řez $\bar{\gamma}$ platí:

$$J^1 \bar{\gamma}^* \eta = 0. \quad (3.25)$$

Všechny kontaktní 1-formy na Q jsou tvaru $\iota^* \omega$, kde $\omega \in \Omega^1(TJ^1Y)$ značí kontaktní 1-formu na J^1Y , obecně $\omega = B_\sigma(t, q^\nu, \tilde{q}^l) \omega^\sigma$. Obecný tvar kontaktní 1-formy na Q je tedy:

$$\omega_Q = \iota^* (B_\sigma \omega^\sigma) = (B_l \circ \iota) \omega^l + (B_{m-k+i} \circ \iota) \iota^* \omega^{m-k+i} = b_l \omega^l + b_{m-k+i} \iota^* \omega^{m-k+i},$$

kde b_l, b_{m-k+i} jsou funkce na Q .

Budeme značit $\Omega^1(TQ)$ modul kontaktních 1-forem na Q , $\Lambda_X^q(TQ)$, resp. $\Lambda_Y^q(TQ)$ modul π_1 -horizontálních, resp. $\pi_{1,0}$ -horizontálních q -forem na Q .

Nechť $\eta \in \Lambda^q(TQ)$, $q \geq 1$, je q -forma na vazební podvarietě. Pro každý bod $y = J_x^2 \bar{\gamma} \in \tilde{Q}$ a každý systém vektorů $\xi_1, \dots, \xi_q \in T_y \tilde{Q}$ klademe:

$$h\eta(J_x^2 \bar{\gamma})(\xi_1, \dots, \xi_q) = \eta(J_x^1 \bar{\gamma})(T_x J^1 \bar{\gamma} \circ T_y \pi_2(\xi_1), \dots, T_x J^1 \bar{\gamma} \circ T_y \pi_2(\xi_q)). \quad (3.26)$$

Zobrazení h nazýváme *horizontalizací* na vazební podvarietě Q .

Příklad 3.6 (Horizontalizace 1-forem na Q) Zobrazení h přiřazuje 1-formě $\eta \in \Lambda^1(TQ)$ formu $h\eta \in \Lambda^1(T\tilde{Q})$. Nechť $\xi \in T_{J_x^2 \bar{\gamma}} \tilde{Q}$ je tečný vektor ke \tilde{Q} v bodě $J_x^2 \bar{\gamma}$ a $T_x J^1 \bar{\gamma}$ resp. $T_y \pi_2$ značí tečná zobrazení k $J^1 \bar{\gamma}$ v bodě x resp. k π_2 v bodě $y = J_x^2 \bar{\gamma}$. Definice (26) má pro $q = 1$ tvar

$$h\eta(J_x^2 \bar{\gamma})(\xi) = \eta(J_x^1 \bar{\gamma})(T_x J^1 \bar{\gamma} \circ T_y \pi_2(\xi)). \quad (3.27)$$

$h\eta$ je π_1 -horizontální 1-forma na \tilde{Q} . Z definice horizontality (24) a horizontalizace (26) vyplývá, že pro q -formu η , kde $q > \dim X$, je $h\eta = 0$. V případě $\dim X = 1$ má netriviální výsledek pouze horizontalizace 1-forem. Vyjádření horizontalizace 1-forem na Q v souřadnicích:

$$\begin{aligned} hdt &= dt, \\ hdq^l &= \dot{q}^l dt, \\ hdq^{m-k+i} &= g^i dt, \\ hd\dot{q}^l &= \ddot{q}^l dt. \end{aligned}$$

Nechť $\eta \in \Lambda^q(TQ)$, $q \geq 1$ je q -forma na vazební podvarietě Q . *Kontaktizací* na Q nazveme zobrazení p , které q -formě $\eta \in \Lambda^q(TQ)$ na Q přiřadí kontaktní q -formu na \tilde{Q} :

$$p\eta = \rho^* \eta - h\eta, \quad (3.28)$$

kde $\rho = \pi_{2,1}|_{\tilde{Q}} : J^2 \bar{\gamma} \rightarrow J^1 \bar{\gamma}$. Pro q -formu na Q , kde $q > 1$, dostáváme $p\eta = \rho^* \eta$.

Příklad 3.7 (Kontaktizace 1-forem na Q) Ze souřadnicového vyjádření horizontalizace 1-forem na Q a definice kontaktizace (28) dostáváme vyjádření kontaktizace v souřadnicích

$$\begin{aligned} pdt &= 0 \\ pdq^l &= dq^l - \dot{q}^l dt = \omega^l \\ pdq^{m-k+i} &= dq^{m-k+i} - g^i dt = \iota^* \omega^{m-k+i} \\ pd\dot{q}^l &= d\dot{q}^l - \ddot{q}^l dt = \dot{\omega}^l \end{aligned}$$

Libovolnou q -formu $\eta \in \Lambda^q(TQ)$ můžeme nyní na \tilde{Q} rozložit na součet *horizontální a kontaktní komponenty*:

$$\rho^*\eta = h\eta + p\eta.$$

Kontaktní formu $\eta \in \Lambda^q(TQ)$ nazveme *1-kontaktní*, pokud pro každé π_1 -vertikální vektorové pole ξ na Q platí, že $i_\xi\eta$ je horizontální. Formu $\eta \in \Lambda^q(TQ)$ nazveme *k-kontaktní*, kde $k \geq 1$, pokud pro každé π_1 -vertikální vektorové pole ξ na Q platí, že $i_\xi\eta$ je $(k-1)$ -kontaktní. Při takto zavedeném označení můžeme π_1 -horizontální formy nazývat též *0-kontaktními*, značme $h = p_0$. Budeme značit $\Omega^{q-k,k}(TQ)$ množinu k -kontaktních q -forem na Q .

Vzhledem k tomu, že $\dim X = 1$, můžeme pro každou q -formu η na Q , $q \geq 1$, psát $\rho^*\eta = p_{q-1}\eta + p_q\eta$, kde $p_{q-1}\eta$ resp. $p_q\eta$ je $(q-1)$ -kontaktní resp. q -kontaktní q -forma na \tilde{Q} .

Zobrazení $p_k : \Lambda^q(TQ) \rightarrow \Omega^{q-k,k}(T\tilde{Q})$ nazýváme *k-kontaktizace na Q* a $p_k\eta$ nazýváme *k-kontaktní komponentou* formy η .

3.1.6 Kanonická distribuce

Z fyzikálního hlediska nese kanonická distribuce \mathcal{C} definovaná na vazební podvarietě Q informaci o možných posunutích systému vázaného neholonomní vazbou ke Q . Posunutími rozumíme teoreticky možná posunutí na dané varietě. Na J^1Y představují vektorová pole

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} \right)_{1 \leq \sigma \leq m}$$

nezávislá posunutí. Tato vektorová pole zadávají bázi obecného posunutí v každém bodě J^1Y . O souboru vektorových polí

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} \right)_{1 \leq \sigma \leq m}$$

budeme mluvit jako o posunutích ve *fázovém prostoru* a o vektorových polích

$$\frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \text{ resp. } \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}, 1 \leq \sigma \leq m$$

jako o posunutích v *konfiguračním prostoru* resp. v *prostoru rychlostí*.

Prvním krokem pro definování kanonické distribuce na vazební podvarietě Q je zavedení systému lokálních distribucí \mathcal{C}_U na Q_U , kde $Q_U = Q \cap U$ je průnik

vazební podvariety s otevřenou množinou na J^1Y . Definujme

$$\mathcal{C}_U^0 = \text{span}\{\varphi^i, df^i, 1 \leq i \leq k\}, \quad (3.29)$$

kde

$$\varphi^i = f^i dt + \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \omega^\sigma. \quad (3.30)$$

Distribuci \mathcal{C}_U nazveme *vazební distribucí*. Vzhledem k tomu, že její anihilátor obsahuje 1-formy df^i , je \mathcal{C}_U poddistribucí distribuce tečné ke Q_U , která přiřazuje bodu $x \in Q_U$ celý tečný prostor $T_x Q_U$. Rank vazební distribuce v J^1Y je $2m + 1 - 2k$.

Je-li Q_U lokální vazba a \mathcal{C}_U odpovídající vazební distribuce, pak zobrazení

$$\mathcal{C} : Q_U \ni x \rightarrow \mathcal{C}_U(x), \quad (3.31)$$

kde $\mathcal{C}_U(x) \subset T_x Q_U$, je distribuce na Q_U , jejíž korank (vzhledem ke Q) je k . Distribuce \mathcal{C} na Q se nazývá *kanonická distribuce*. Systém k 1-forem na Q :

$$\iota^* \varphi^i = \bar{\varphi}^i = -\frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \omega^l + \iota^* \omega^{m-k+i}, 1 \leq i \leq k, \quad (3.32)$$

kteří nazýváme *kanonické vazební 1-formy*, generuje anihilátor kanonické distribuce, tj.

$$\mathcal{C}^0 = \text{span}\{\bar{\varphi}^i\}. \quad (3.33)$$

Věta 3.1 *Holonomními integrálními řezy kanonické distribuce jsou právě holonomní trajektorie v Q .*

Příklad 3.8 (Báze 1-forem na Q) V dalším výkladu budeme používat bázi 1-forem na Q obsahující kontaktní 1-formy ω^l na Q a formy $\bar{\varphi}^i$ generující anihilátor kanonické distribuce:

$$(dt, \omega^l, d\dot{q}^l, \bar{\varphi}^i).$$

Kanonická distribuce je generována vektorovými poli:

$$\mathcal{C} = \text{span}\{\xi_0, \xi_l, \tilde{\xi}_l\}, \quad (3.34)$$

kde

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(g^i - \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \dot{q}^l \right) \frac{\partial}{\partial q^{m-k+i}}, \\
\xi_l &= \frac{\partial}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial}{\partial q^{m-k+i}}, \\
\tilde{\xi}_l &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Nezávislá vektorová pole (35) generují tedy všechna posunutí systému vázaného systémem k neholonomním vazeb $f^i = 0$. Kanonická distribuce má pro vázaný systém význam stejný jako TJ^1Y pro systém nevázaný, neboť v nevázaném případě systém může teoreticky konat libovolná posunutí. Jak v TJ^1Y tak mezi vektorovými poli náležejícími do kanonické distribuce budou mít význačné postavení π_1 -vertikální vektorová pole, která představují *virtuální posunutí*. (Označení "virtuální" budeme ve shodě s [1] užívat pro posunutí neobsahující $\frac{\partial}{\partial t}$).

Vektorové pole $\tilde{\xi}_l$ má význam posunutí v prostoru rychlostí na vazební podvarietě Q . Na vazební podvarietě jsou neholonomní podmínky $f^i = 0$ splněny a máme pouze $m - k$ nezávislých rychlostí \dot{q}^l . Báze posunutí v bodě rychlostního prostoru je tedy rovněž dimenze $m - k$ a můžeme ji zadat pomocí systému vektorových polí $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}$. Tento systém je π_1 -vertikální a generuje virtuální posunutí v rychlostním prostoru.

Příklad 3.9 Mějme na $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = (0, R) \times (0, R)$ volný hmotný bod a podrobme ho vazbě:

$$f^1 \equiv \dot{y} + \frac{x}{y} \dot{x} = 0. \tag{3.36}$$

Vazba (36) je semiholonomní a odpovídá pohybu po oblouku kružnice. Z (35) dostáváme

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
\xi_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial y}, \\
\tilde{\xi}_1 &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}}.
\end{aligned}$$

V konkrétním bodě o souřadnicích $[x_0, y_0]$ je s danou vazbou slučitelné jediné posunutí v konfiguračním prostoru a to ve směru vektoru tečného ke kružnici se středem v počátku a procházející bodem $[x_0, y_0]$.

Omezení volnosti pohybu mechanického systému na podmnožinu v konfiguračním prostoru souvisí s holonomními vazbami a samozřejmě se přenáší na vazby semiholonomní. To dosvědčuje také $\pi_{1,0}$ -projektabilita vektorového pole ξ_l v případě semiholonomních vazeb. U obecných neholonomních vazeb dochází obdobně jako u semiholonomní vazby k omezení přípustných posunutí na vazební podvarietě Q . Toto omezení je popsáno $m-k$ vektorovými poli ξ_l , jejichž význam již ale není geometricky tak názorný jako u semiholonomních vazeb.

3.1.7 Vazební ideál

Mějme vazební podvarietu Q na J^1Y definovanou rovnicemi (1) a příslušnou kanonickou distribuci \mathcal{C} , jejíž anihilátor je generován kanonickými vazebními 1-formami (30). Označme $\Lambda(TQ)$ vnější algebru diferenciálních forem na Q .

Ideál na $\Lambda(TQ)$ generovaný kanonickými vazebními 1-formami $\bar{\varphi}^i$ nazveme *vazební ideál* a budeme jej značit $\mathcal{I}(\mathcal{C}^0)$ nebo jednoduše \mathcal{I} . Formy, které náležejí do vazebního ideálu, nazýváme *vazební formy*. Mají tvar

$$\alpha \wedge \varphi,$$

kde α značí diferenciální formu na Q ,

$$\varphi = a_i \bar{\varphi}^i$$

je lineární kombinace vazebních kanonických forem a koeficienty a_i jsou funkce na Q .

1-formy náležející do vazebního ideálu jsou tvaru $a_i \bar{\varphi}^i$ a jejich soubor budeme značit $\Lambda^1(\mathcal{I})$. Označme

$$\Lambda^q(\mathcal{I}) = \{\alpha \wedge \varphi \mid \alpha \in \Lambda^{(q-1)}(TQ), \varphi \in \Lambda^1(\mathcal{I})\}$$

množinu vazebních q -forem. Doplňme, že $\Lambda^0(\mathcal{I})$ bude značit množinu tvořenou jen identicky nulovou formou.

Je-li počet vazebních podmínek $k > 1$, pak ve vazebním ideálu nalezneme speciální formy:

$$\bar{\varphi}^{i_1} \wedge \bar{\varphi}^{i_2} \wedge \dots \wedge \bar{\varphi}^{i_p}, \quad 1 \leq p \leq k, \quad (3.37)$$

které můžeme nazvat *multivazebními formami*. V případě, kdy $k > 1$, můžeme tedy nalézt mezi vazebními formami obecně formy typu:

$$\alpha \wedge \bar{\varphi}^{i_1}, \alpha \wedge \bar{\varphi}^{i_1} \wedge \bar{\varphi}^{i_2}, \dots, \alpha \wedge \bar{\varphi}^{i_1} \wedge \bar{\varphi}^{i_2} \dots \wedge \bar{\varphi}^{i_k}.$$

Multivazební formy generují podideály ve vazebním ideálu, tzv. *multivazební ideály*, které budeme značit $\mathcal{I}^1 \equiv \mathcal{I}, \mathcal{I}^2, \dots, \mathcal{I}^k$. Tyto ideály tvoří následující posloupnost:

$$\{0\} \subset \mathcal{I}^k \subset \mathcal{I}^{k-1} \subset \dots \subset \mathcal{I}^2 \subset \mathcal{I} \subset \Lambda(TQ).$$

3.1.8 Vázaná horizontalizace a kontaktizace

V této kapitole zavedeme tzv. *vázané horizontální* a *vázané kontaktní formy* a také *vázanou horizontalizaci* a *kontaktizaci* na Q . Při vázané horizontalizaci i kontaktizaci budeme přecházet z vazební podvariety Q na její lift \tilde{Q} , který jsme již dříve zavedli, a dále budeme potřebovat lift kanonické distribuce $\tilde{\mathcal{C}}$ a vazební ideál na \tilde{Q} .

Lift kanonické distribuce, vazební ideál na \tilde{Q}

Mějme kanonickou distribuci \mathcal{C} ranku $2m + 1 - 2k$ na vazební podvarietě Q a projekci $\rho : \tilde{Q} \rightarrow Q$, jak jsme ji definovali vztahem (5).

Liftem kanonické distribuce \mathcal{C} nazveme distribuci $\tilde{\mathcal{C}}$ na \tilde{Q} , pro kterou platí

$$T_y \rho(\tilde{\mathcal{C}}(y)) = \mathcal{C}(\rho(y)), \quad (3.38)$$

pro každé $y \in \tilde{Q}$. Vektorové pole $\tilde{\Xi}$ na \tilde{Q} patří do $\tilde{\mathcal{C}}$, je-li $\pi_{2,1}$ -projektabilní a jeho $\pi_{2,1}$ -projekce je vektorové pole Ξ na Q náležející kanonické distribuci \mathcal{C} . Vektorové pole $\tilde{\Xi}$ můžeme zapsat v souřadnicích

$$\tilde{\Xi} = A^0 \xi_0 + A^l \xi_l + \tilde{A}^l \tilde{\xi}_l + B^l \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l}, \quad 1 \leq l \leq m - k,$$

kde $\xi_0, \xi_l, \tilde{\xi}_l$ jsou generátory (35) kanonické distribuce, A^0, A^l, \tilde{A}^l jsou funkce na Q a B_l jsou funkce na \tilde{Q} . Máme tedy generátory liftu kanonické distribuce

$$\tilde{\mathcal{C}}^0 = \text{span}\{\xi_0, \xi_l, \tilde{\xi}_l, \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l}\}, \quad 1 \leq l \leq m - k$$

a anihilátor distribuce $\tilde{\mathcal{C}}$ je generován 1-formami $\tilde{\varphi}^i = \rho^* \varphi^i$, zkráceně píšeme $\tilde{\varphi}^i = \tilde{\varphi}^i$.

Ideál vnější algebry $\Lambda(T\tilde{Q})$ generovaný anihilátorem distribuce $\tilde{\mathcal{C}}$ se nazývá *vazební ideál na \tilde{Q}* a budeme jej značit $\tilde{\mathcal{I}}$. Formy náležející do vazebního ideálu na \tilde{Q} budeme nazývat *vazební formy na \tilde{Q}* .

Označme nyní $\Lambda^q(\mathcal{I})$ resp. $\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})$ modul vazebních q -forem na Q resp. na \tilde{Q} a $\Lambda_Y^q(\mathcal{I})$ resp. $\Lambda_Y^q(\tilde{\mathcal{I}})$ submodul $\pi_{1,0}$ resp. $\pi_{2,0}$ -horizontálních vazebních q -forem na Q resp. na \tilde{Q} .

Definujme třídu ekvivalence $[\alpha_1]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ resp. $[\alpha_1]_{\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})}$ q -forem na vazební podvarietě Q resp. na jejím liftu \tilde{Q} . Forma $\alpha_1 \in \Lambda^q(TQ)$ resp. $\alpha_1 \in \Lambda^q(T\tilde{Q})$ se nazývá *ekvivalentní* s formou $\alpha_2 \in \Lambda^q(TQ)$ resp. $\alpha_2 \in \Lambda^q(T\tilde{Q})$, pokud $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, kde $\varphi \in \Lambda^q(\mathcal{I})$ resp. $\varphi \in \Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})$.

Příklad 3.10 (Třídy ekvivalence 2-forem) Vzhledem k významnému postavení 2-forem v dalším výkladu vypíšme souřadnicové vyjádření obecné 2-formy $\alpha \in [\alpha]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}$ na Q .

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_\sigma dq^\sigma \wedge dt + \alpha_{\sigma\nu} dq^\sigma \wedge dq^\nu + \bar{\alpha}_{\sigma l} dq^\sigma \wedge d\dot{q}^l + \\ &+ \bar{\alpha}_l d\dot{q}^l \wedge dt + \tilde{\alpha}_{lp} d\dot{q}^l \wedge d\dot{q}^p + \\ &+ \varphi \wedge \eta, \end{aligned} \quad (3.39)$$

kde $\eta \in \Lambda^1(TQ)$ a $\varphi \in \Lambda^1(\mathcal{I})$. V dané třídě $[\alpha]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}$ jsou funkce $\alpha_\sigma, \alpha_{\sigma\nu}, \bar{\alpha}_l, \bar{\alpha}_{\sigma l}, \tilde{\alpha}_{lp}$ určeny jednoznačně. Vypíšme dále souřadnicové vyjádření obecné 2-formy $\alpha \in [\alpha]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})}$ na \tilde{Q} :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_\sigma dq^\sigma \wedge dt + \alpha_{\sigma\nu} dq^\sigma \wedge dq^\nu + \bar{\alpha}_{\sigma l} dq^\sigma \wedge d\dot{q}^l + \tilde{\alpha}_{\sigma l} dq^\sigma \wedge d\dot{q}^l + \\ &+ \bar{\alpha}_l d\dot{q}^l \wedge dt + \tilde{\alpha}_{lp} d\dot{q}^l \wedge d\dot{q}^p + \hat{\alpha}_{lp} d\dot{q}^l \wedge d\ddot{q}^p + \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} &+ \tilde{\alpha}_l d\ddot{q}^l \wedge dt + \hat{\alpha}_{lp} d\ddot{q}^l \wedge d\ddot{q}^p \\ &+ \varphi \wedge \eta, \end{aligned} \quad (3.41)$$

kde $\eta \in \Lambda^1(T\tilde{Q})$ a $\varphi \in \Lambda^1(\tilde{\mathcal{I}})$. V dané třídě $[\alpha]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})}$ jsou funkce

$$\alpha_\sigma, \alpha_{\sigma\nu}, \bar{\alpha}_l, \bar{\alpha}_{\sigma l}, \tilde{\alpha}_{lp}, \tilde{\alpha}_{\sigma l}, \hat{\alpha}_{lp}, \tilde{\alpha}_l, \hat{\alpha}_{lp}$$

určeny jednoznačně.

Následující definice a tvrzení jsou převzaty z [26].

Příklad 3.11 (Operace s třídami ekvivalence) Necht $[\alpha_1]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}, [\alpha_2]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ a $[\beta]_{\Lambda^p(\mathcal{I})}$ jsou třídy ekvivalence definované výše. Uvažujme následující operace:

1. Sčítání:

$$[\alpha_1]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} + [\alpha_2]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [\alpha_1 + \alpha_2]_{\Lambda^q(\mathcal{I})},$$

kde α_1, α_2 jsou q -formy na Q .

2. Násobení funkcí:

$$F \cdot [\alpha_1]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [F \cdot \alpha_1]_{\Lambda^q(\mathcal{I})},$$

kde F je hladká funkce na Q .

3. Vnější součin:

$$[\alpha_1]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} \wedge [\beta]_{\Lambda^p(\mathcal{I})} = [\alpha_1 \wedge \beta]_{\Lambda^{p+q}(\mathcal{I})},$$

kde α_1 je q -forma a β je p -forma na Q .

4. Vnitřní součin pro $\Xi \in \mathcal{C}$:

$$i_{\Xi}[\alpha_1]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [i_{\Xi}\alpha_1]_{\Lambda^{q-1}(\mathcal{I})}.$$

Formu $\eta \in \Lambda^q(TQ)$, resp. formu $\eta \in \Lambda^q(T\tilde{Q})$ nazveme *vázaně horizontální*, pokud platí $i_{\xi}\eta \in \mathcal{I}$ pro každé π_1 -vertikální vektorové pole $\xi \in \mathcal{C}$, resp. pokud platí $i_{\xi}\eta \in \tilde{\mathcal{I}}$ pro každé π_2 -vertikální vektorové pole $\xi \in \tilde{\mathcal{C}}$.

Příklad 3.12 (Vázaně horizontální 1-forma) 1-forma η na Q je vázaně horizontální, pokud $i_{\xi}\eta = 0$ pro každé π_1 -vertikální vektorové pole náležející kanonické distribuci \mathcal{C} . Musí být tedy tvaru $\eta = \eta_0 + \varphi$, kde η_0 je horizontální 1-forma na Q a φ je vazební 1-forma.

Pro $q > 1$ splývají vázaně horizontální q -formy s vazebními q -formami na Q a vztahem $i_{\xi}\eta = 0$, kde $\xi \in \mathcal{C}$ je π_1 -vertikální, zavádíme tzv. *silně vázaně horizontální* q -formy na Q . Mějme projekci $\rho : \tilde{Q} \rightarrow Q$ a uvažujme vazební formy na \tilde{Q} pouze tvaru $\rho^*\eta$, kde $\eta \in \mathcal{I}$. Všechny formy náležející do $\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})$ budou tedy v dalším výkladu ρ -projektabilní. Definujme nyní vázanou horizontalizaci a kontaktizaci. *Vázanou horizontalizací* nazveme zobrazení \bar{h} faktorových modulů

$$\bar{h} : \Lambda^q(TQ)/\Lambda^q(\mathcal{I}) \rightarrow (\Lambda_X^q(T\tilde{Q}) \oplus \Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}}))/\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}}), \quad (3.42)$$

která je definována na třídách ekvivalence takto:

$$\bar{h}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [h\eta]_{\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})} = h\eta + \varphi, \quad (3.43)$$

kde φ je vazební q -forma na \tilde{Q} . *Vázanou kontaktizací* pak nazveme zobrazení

$$\bar{p} : \Lambda^q(TQ)/\Lambda^q(\mathcal{I}) \rightarrow \Omega^q(T\tilde{Q})/\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}}), \quad (3.44)$$

definované vztahem

$$\bar{p}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [p\eta]_{\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})} = p\eta + \varphi, \quad (3.45)$$

kde φ opět značí vazební q -formu na \tilde{Q} . Je-li $\bar{p}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [0]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$, pak je třída ekvivalence $[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ vázaně horizontální a naopak, je-li $\bar{h}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [0]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$, pak je třída ekvivalence $[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ vázaně kontaktní.

Věta 3.2 (Vlastnosti vázané horizontalizace a kontaktizace) *Mějme formy $\eta, \lambda \in \Lambda^q(TQ)$, $\omega \in \Lambda^p(TQ)$, a funkci f na Q a uvažujme projekci $\rho : \tilde{Q} \rightarrow Q$. Z definice vázané horizontalizace a kontaktizace vyplývá:*

$$\bar{h}[f\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = (f \circ \rho) \cdot \bar{h}(\eta)_{\Lambda^q(\mathcal{I})},$$

$$\bar{p}[f\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = (f \circ \rho) \cdot \bar{p}(\eta)_{\Lambda^q(\mathcal{I})},$$

$$\bar{h}([\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} + [\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}) = \bar{h}[\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} + \bar{h}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})},$$

$$\bar{h}([\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} \wedge [\omega]_{\Lambda^p(\mathcal{I})}) = \bar{h}[\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} \wedge \bar{h}[\omega]_{\Lambda^p(\mathcal{I})},$$

$$\bar{p}([\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} + [\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}) = \bar{p}[\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} + \bar{p}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})},$$

$$\bar{p}([\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} \wedge [\omega]_{\Lambda^p(\mathcal{I})}) = \bar{p}[\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} \wedge \bar{p}[\omega]_{\Lambda^p(\mathcal{I})} + \bar{p}[\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} \wedge \bar{h}[\omega]_{\Lambda^p(\mathcal{I})} +$$

$$+ \bar{h}[\lambda]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} \wedge \bar{p}[\omega]_{\Lambda^p(\mathcal{I})}.$$

Podobně jako u standardně definované horizontalizace a kontaktizace, zavádíme i u vázané horizontalizace a kontaktizace rozklad 1-forem, resp. tříd ekvivalence 1-forem na vázaně horizontální a kontaktní část a pro třídy ekvivalence q -forem, kde $q > 1$, zavedeme rozklad na vázaně q -kontaktní a $(q - 1)$ -kontaktní část.

Věta 3.3 *Každou třídu ekvivalence 1-forem $[\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})}$ můžeme rozložit následujícím způsobem:*

$$\rho^*[\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} = \bar{h}[\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} + \bar{p}[\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})}. \quad (3.46)$$

Příklad 3.13 (Vázaná totální a parciální derivace) Nechť η je exaktní 1-forma, tj. $\eta = df$ pro jakoukoliv funkci f na Q , ze vztahu (46) dostáváme:

$$\rho^*[df]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} = \bar{h}[df]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} + \bar{p}[df]_{\Lambda^1(\mathcal{I})}.$$

Pro vázanou horizontální a kontaktní část dostáváme vyjádření:

$$\begin{aligned}\bar{h}[df]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} &= \frac{d_C f}{dt} dt + \varphi, \\ \bar{p}[df]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} &= \frac{\partial_C f}{\partial q^l} \omega^l + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^l} \dot{\omega}^l + \varphi,\end{aligned}$$

kde φ je vazební 1-forma na Q a

$$\frac{d_C f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial f}{\partial q^{m-k+i}} g^i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial_C f}{\partial q^l} = \frac{\partial f}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial f}{\partial q^{m-k+i}}, \quad (3.48)$$

kde $1 \leq l \leq m - k$, $1 \leq i \leq k$.

Operátory d_C/dt , $\partial_C/\partial q^l$ budeme nazývat *vázaná totální derivace* a *vázaná parciální derivace*. Označme ještě

$$\frac{d'_C f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial f}{\partial q^{m-k+i}} g^i, \quad (3.49)$$

kde $1 \leq l \leq m - k$, $1 \leq i \leq k$.

Přistupme nyní k definici rozkladu tříd ekvivalence q -forem $[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$, $q > 1$, které jsou v případě jednodimenzionální báze fibrovane variety (Y, π, X) vázaně kontaktní. Třidu ekvivalence $[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ q -forem na Q nazýváme *vázaně 1-kontaktní*, pokud pro každý prvek této třídy a každé π_1 -vertikální vektorové pole Ξ na Q náležející kanonické distribuci \mathcal{C} je třída $(q - 1)$ -forem $i_{\Xi}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ vázaně horizontální.

Třidu ekvivalence $[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ q -forem na Q nazýváme *vázaně k -kontaktní*, pokud pro každý prvek této třídy a každé π_1 -vertikální vektorové pole Ξ náležející kanonické distribuci \mathcal{C} je třída $(q - 1)$ -forem $i_{\Xi}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}$ vázaně $(k - 1)$ -kontaktní.

Zobrazení

$$\bar{p}_k : \Lambda^q(TQ)/\Lambda^q(\mathcal{I}) \rightarrow (\Omega^{q-k,k}(T\tilde{Q}) + \Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}}))/\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}}) \quad (3.50)$$

definované vztahem:

$$\bar{p}_k[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = [p_k\eta]_{\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})}, \quad (3.51)$$

kde prvek třídy $[p_k\eta]_{\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})}$ je tvaru $p_k\eta + \varphi$ ($\varphi \in \tilde{\mathcal{I}}$ je vazební q -forma), nazýváme vázanou k -kontaktizací.

Poznamenejme, že faktorový modul $(\Omega^{q-k,k}(T\tilde{Q}) + \Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}}))/\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})$ na prodloužení \tilde{Q} vazební podvariety Q neobsahuje přímý součet, neboť modul $\Omega^{q-k,k}(T\tilde{Q})$ má neprázdný průnik s modulem $\Lambda^q(\tilde{\mathcal{I}})$ tvořený všemi k -kontaktními vazebními q -formami.

Věta 3.4 (Rozklad q -formy) *Každá třída ekvivalence q -forem, kde $q > 1$, může být jednoznačně rozložena na vázaně q -kontaktní a vázaně $(q-1)$ -kontaktní část na \tilde{Q} :*

$$\rho^*[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} = \bar{p}_{q-1}[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})} + \bar{p}_q[\eta]_{\Lambda^q(\mathcal{I})}. \quad (3.52)$$

Příklad 3.14 (Třídy ekvivalence 2-forem) Každá třída ekvivalence 2-forem umožňuje jednoznačný rozklad

$$\rho^*[\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})} = \bar{p}_1[\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})} + \bar{p}_2[\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}. \quad (3.53)$$

Rozepsáním sčítanců na pravé straně výrazu dostáváme

$$\bar{p}_1[\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})} = p_1\eta + \varphi \wedge \alpha$$

$$\bar{p}_2[\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})} = p_2\eta + \varphi \wedge \alpha,$$

kde φ je vazební 1-forma na \tilde{Q} a α je obecná 1-forma na \tilde{Q} a $p_1\eta$ resp. $p_2\eta$ je standardně definovaná 1-kontaktní resp. 2-kontaktní část formy $\eta \in \Lambda^q(TQ)$.

Výše uvedenými definicemi byl zaveden vazební počet, který prostřednictvím vazebního ideálu operuje na vazební podvarietě s třídami ekvivalence forem. Tento počet se užívá při formulaci neholonomního variačního principu v dalších kapitolách.

3.2 Dynamické a redukované pohybové rovnice

Tato kapitola shrnuje popis vázaného mechanického systému a věnuje se konstrukci pohybových rovnic vázaného mechanického systému. V [10] se zavádí dva ekvivalentní popisy neholonomně vázaného systému. První z nich vychází z definice vázaného systému jako deformace nevázaného systému $[\alpha]$ vazební silou, zatímco druhý popisuje vázaný systém jako nevázaný mechanický systém na vazební podvarietě Q . Dostáváme tedy dva, z hlediska řešení vázaného systému ekvivalentní, soubory pohybových rovnic: tzv. dynamické pohybové rovnice a tzv. redukované pohybové rovnice. Z fyzikálního hlediska se systémy liší přítomností informace o vazební síle, která je explicitně obsažena jen v dynamických pohybových rovnicích. Případná tvrzení nedokazujeme, důkazy jsou uvedeny v [10].

Nechť E je dynamická forma

$$E = (A_\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) + \ddot{q}^\rho B_{\sigma\rho}(t, q^\nu, \dot{q}^\nu)) \omega^\sigma \wedge dt \quad (3.54)$$

a $[\alpha]$ je příslušný mechanický systém na J^1Y . Připomeňme, že reprezentant třídy $[\alpha]$ je tvaru

$$\alpha = A_\sigma \omega^\sigma \wedge dt + B_{\sigma\nu} \omega^\sigma \wedge dq^\nu + F_{\sigma\nu} \omega^\sigma \wedge \omega^\nu. \quad (3.55)$$

Nechť $Q \subset J^1Y$ je vazební podvarieteta. Dynamickou formu $\Phi = \Phi_\sigma \omega^\sigma \wedge dt$ definovanou na okolí vazební podvariety Q nazveme *ideální vazební silou*, pokud pro každé π_1 -vertikální vektorové pole ξ náležející do vazební distribuce splňuje podmínku

$$i_\xi \Phi = 0. \quad (3.56)$$

Příklad 3.15 (Souřadnicové vyjádření ideální vazební síly) Zjistěme, jaký tvar bude mít forma Φ splňující podmínku (56). Φ je tvaru $\Phi = \varepsilon \wedge dt$, kde $\varepsilon = \varepsilon_0 dt + \varepsilon_\sigma \omega^\sigma$. Anihilátor vazební distribuce má tvar $\text{span}\{\varphi^i, df^i, 1 \leq i \leq k\}$. Z definice (56) vyplývá, že forma ε musí splňovat $i_\xi p \varepsilon = 0$ pro každé π_1 -vertikální vektorové pole ξ náležející vazební distribuci. Tedy kontaktní část formy ε patří anihilátoru vertikální poddistribuce vazební distribuce. $p \varepsilon$ je kontaktní a $\pi_{1,0}$ -horizontální, musí tedy být $p \varepsilon = \sum_i \mu_0^i p \varphi^i$, kde μ_0^i jsou funkce na J^1Y . Můžeme psát

$$\Phi = \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \omega^\sigma \wedge dt. \quad (3.57)$$

Formu (57) nazýváme (lokální) *Chetaevovou vazební silou* nebo krátce *Chetaevovou silou*. Konstrukci globální síly nalezneme v [10]. Koeficienty μ_0^i mají význam Lagrangeových multiplikátorů.

Příklad 3.16 (Chetaeova síla pro semiholonomní vazbu) Nechtě jsou vazební podmínky $f^i = 0$ semiholonomní. Pak existuje funkce $u^i(t, q^\sigma)$ na Y taková, že platí

$$f^i = \frac{du^i(t, q^\sigma)}{dt}. \quad (3.58)$$

Vazební sílu (57) můžeme přepsat do tvaru

$$\Phi = \mu_0^i \frac{\partial u^i}{\partial q^\sigma} \omega^\sigma \wedge dt. \quad (3.59)$$

Mějme semiholonomní vazbu

$$f^1 \equiv 2y\dot{y} + 2x\dot{x} = 0. \quad (3.60)$$

Vidíme, že Chetaeova síla má jak podle (57) tak podle (59) tvar:

$$\Phi = \mu_0 (2x dx \wedge dt + 2y dy \wedge dt). \quad (3.61)$$

Výsledný tvar vazební síly Φ závisí na funkci μ_0 .

3.2.1 Dynamické pohybové rovnice

Položme

$$E_\Phi = E - \Phi, \quad (3.62)$$

kde Φ je Chetaeova vazební síla příslušná vazbě Q . Dynamickou formu E_Φ nazveme *deformací dynamické formy* E a v souřadnicích dostáváme její vyjádření

$$E_\Phi = \left(A_\sigma + B_{\sigma\nu} \ddot{q}^\nu - \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \omega^\sigma \wedge dt. \quad (3.63)$$

Deformací mechanického systému $[\alpha]$ nazveme 2-formu:

$$\alpha_\Phi = \alpha - \Phi = \left(A_\sigma - \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \omega^\sigma \wedge dt + B_{\sigma\nu} \omega^\sigma \wedge d\dot{q}^\nu + F_{\sigma\nu} \omega^\sigma \wedge \omega^\nu. \quad (3.64)$$

Vázaný mechanický systém je reprezentován třídou ekvivalence $[\alpha_\Phi]$, kde relace ekvivalence je zavedena takto: 2-formy α_{Φ_1} , α_{Φ_2} jsou *ekvivalentní* právě tehdy když

$$\alpha_{\Phi_1} - \alpha_{\Phi_2} = \eta_{\sigma\nu} \omega^\sigma \wedge \omega^\nu.$$

Řešením neholonomně vázaného systému $[\alpha_\Phi]$ je pak řez γ variety (Y, π, X) , který splňuje podmínky

$$E_\Phi \circ J^2\gamma = 0, \quad f^i \circ J^1\gamma = 0 \quad (3.65)$$

nebo ekvivalentně pro každé π_1 -vertikální vektorové pole ξ na J^1Y

$$J^1\gamma^* i_\xi \alpha_\Phi = 0, \quad f^i \circ J^1\gamma = 0. \quad (3.66)$$

Rovnice (65) a (66) vyjadřují *deformované pohybové rovnice* a vazební podmínky. Deformované pohybové rovnice mají tvar

$$A_\sigma + B_{\sigma\nu} \ddot{q}^\nu - \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} = 0. \quad (3.67)$$

Deformované rovnice a vazební podmínky tvoří soustavu diferenciálních rovnic, z nichž m rovnic je druhého řádu a k rovnic je řádu prvního. Neznámými jsou parametrická vyjádření trajektorie $q^\sigma \gamma(t)$ a Lagrangeovy multiplikátory $\mu_0^i(t)$.

Vzhledem k přítomnosti vazební síly nazýváme soustavu deformovaných rovnic a vazebních podmínek *dynamickými pohybovými rovnicemi*.

3.2.2 Redukované pohybové rovnice

Redukované pohybové rovnice představují alternativu k rovnicím dynamickým z hlediska řešení systému. Neobsahují však explicitně informaci o vazební síle. Nechť ι je kanonické vložení. *Neholonomně vázaným mechanickým systémem* příslušným mechanickému systému $[\alpha]$ rozumíme třídu ekvivalence $[\alpha_Q] \equiv [\iota^* \alpha]$, pro niž je relace ekvivalence definována následujícím způsobem

$$\iota^* \alpha_1 \sim \iota^* \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \iota^* \alpha_1 - \iota^* \alpha_2 = \bar{F}_{ls} \omega^l \wedge \omega^s + \varphi, \quad (3.68)$$

kde $\bar{F}_{ls} = -\bar{F}_{sl}$ jsou funkce na Q a φ je vazební 2-forma.

Reprezentant třídy $[\alpha_Q]$ má souřadnicové vyjádření:

$$\alpha_Q = \bar{A}_l \omega^l \wedge dt + \bar{B}_{ls} \omega^l \wedge d\dot{q}^s + \bar{F}_{ls} \omega^l \wedge \omega^s + \varphi, \quad (3.69)$$

kde komponenty $\bar{A}_l, \bar{B}_{l,s}$ jsou určeny pomocí složek dynamické formy(54)

$$\bar{A}_l = \left(A_l + \sum_{j=1}^k A_{m-k+j} \frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^l} + \sum_{i=1}^k \left(B_{l,m-k+i} + \sum_{j=1}^k B_{m-k+j,m-k+i} \frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^l} \right) \cdot \left(\frac{\partial g^i}{\partial t} + \frac{\partial g^i}{\partial q^\sigma} \dot{q}^\sigma \right) \right) \circ \iota, \quad (3.70)$$

$$\bar{B}_{ls} = \left(B_{ls} + \sum_{i=1}^k \left(B_{l,m-k+i} \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^s} + B_{m-k+i,s} \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \right) + B_{m-k+j,m-k+i} \frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^s} \right) \circ \iota.$$

Řešením neholonomně vázaného mechanického systému $[\alpha_Q]$ je řez γ fibrované variety (Y, π, X) , který splňuje pohybové rovnice vázaného systému:

$$J^1\gamma^* i_{\xi_C} \alpha_Q = 0 \quad (3.71)$$

pro každé vektorové pole ξ_C náležející do kanonické distribuce.

Rovnice (71) nazýváme *redukovánými rovnicemi* a v souřadnicích mají vyjádření:

$$f^i \circ J^1\gamma = 0, \quad (\bar{A}_l + \bar{B}_{ls} \dot{q}^s) \circ J^2\gamma = 0. \quad (3.72)$$

Tento soubor je soustavou $m - k$ diferenciálních rovnic druhého a k diferenciálních rovnic prvního řádu pro m neznámých funkcí $\gamma^\sigma(t)$.

Oba výše uvedené systémy mají stejné řešení. Z fyzikálního hlediska je však také zajímavá vazební síla, jejíž složky jsou explicitně obsaženy pouze v deformovaných rovnicích.

Nechť $[\alpha_Q]$ je vázaný systém, $[\alpha]$ příslušný systém nevázaný, \mathcal{C} kanonická distribuce na Q .

Vázaná dynamická distribuce Δ_{α_Q} příslušná formě α_Q je poddistribucí kanonické distribuce \mathcal{C} a její anihilátor je dán vztahem

$$\Delta_{\alpha_Q}^0 = \text{span}\{i_\xi \alpha_Q\}, \quad (3.73)$$

kde ξ probíhá množinu všech π_1 -vertikálních vektorových polí na Q . Anihilátor je tvořen 1-formami:

$$\bar{\varphi}^i, \bar{A}_l dt + 2\bar{F}^{ls} \omega^s + \bar{B}_{ls} d\dot{q}^s, \bar{B}_{ls} \omega^s, \quad (3.74)$$

kde $1 \leq l, s \leq m - k$. Třída ekvivalence $[\alpha_Q]$ dává vzniknout třídě $[\Delta_{\alpha_Q}]$ příslušných vázaných dynamických distribucí. Nechť $V \subset Q$ je otevřená množina, následující výroky jsou ekvivalentní:

1. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ je regulární na V .
2. Matice \bar{B}_{ls} je regulární v každém bodě V .
3. Každá z dynamických distribucí třídy $[\Delta_{\alpha_Q}]$ má rank jedna na V .
4. Všechny dynamické distribuce vázaného systému $[\alpha_Q]$ se na V shodují a jsou generovány 1-formami

$$\bar{\varphi}^i, \bar{A}_l dt + \bar{B}_{ls} d\bar{q}^s, \omega^l, \quad (3.75)$$

kde $1 \leq l, s \leq m - k, 1 \leq i \leq k$.

5. Pohybové rovnice vázaného systému mají tvar:

$$\ddot{q}^l = -\bar{B}^{ls} \bar{A}_s, f^i = 0, \quad (3.76)$$

kde \bar{B}^{ls} je matice inverzní k matici \bar{B}_{ls} , $1 \leq l, s \leq m - k, 1 \leq i \leq k$.

3.3 Variačnost

V této kapitole krátce shrneme neholonomní variační princip, kterým se podrobně zabývá [26]. Tvzení přebíráme a uvádíme bez důkazů, které lze nalézt v [26]. Uvedeme „vazební Eulerovy-Lagrangeovy rovnice“, které jsou ekvivalentní redukováným pohybovým rovnicím a kritérium variačnosti neholonomně vázaného mechanického systému, kterým je existence uzavřeného reprezentanta v třídě ekvivalence představující vázaný mechanický systém. Zajímavým důsledkem formulace vazebního variačního principu je neexistence jednoznačné Lagrangeovy funkce charakterizující variační vázaný systém.

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta, $\dim Y = m + 1$, $\dim X = 1$, $Q \subset J^1 Y$ vazební podvarieta dimenze $2m + 1 - k$, definovaná neholonomními podmínkami v normálním tvaru (4) a \mathcal{C} je příslušná kanonická distribuce. Nechť $W \subset Q$ je otevřená množina a $\Omega \subset X$ je kompaktní podvarieta variety X s okrajem. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Označme $\bar{\Gamma}_{\Omega, W}^Q(\pi)$ množinu hladkých Q -přípustných řezů fibrované variety π na Ω , takových, že platí $J^1 \bar{\gamma}(\Omega) \subset W$. Nechť η je 1-forma na Q , pak $J^1 \bar{\gamma}^* \eta$ je 1-forma na otevřené množině v X . Můžeme definovat funkci

$$\bar{\Gamma}_{\Omega, W}^Q(\pi) \ni \bar{\gamma} \rightarrow \int_{\Omega} J^1 \bar{\gamma}^* \eta, \quad (3.77)$$

která má hodnoty v \mathbb{R} . Protože $J^1 \bar{\gamma}$ jsou integrální řezy kanonické distribuce \mathcal{C} , funkce (77) se nezmění, pokud za její argument vezmeme místo 1-formy η 1-formu $\eta + \varphi$, kde φ je vazební 1-forma definovaná na otevřené množině $W \subset Q$. Proto můžeme místo (77) psát

$$\bar{\Gamma}_{\Omega, W}^Q(\pi) \ni \bar{\gamma} \rightarrow \int_{\Omega} J^1 \bar{\gamma}^* [\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})}. \quad (3.78)$$

Tuto funkci nazveme *vazební variační funkcí* nebo *vazební akční funkcí*, *akcí* 1-formy η na Q nad Ω .

Nechť Ξ je π_1 -projektibilní vektorové pole náležející kanonické distribuci definované na otevřené množině W . ξ je jeho π_1 -projekce. Nechť $\{\alpha_u\}$ resp. $\{\alpha_{0u}\}$ je lokální jednoparametrická grupa generovaná vektorovým polem Ξ resp. ξ . Definujeme jednoparametrickou *vazební variaci* nebo také *vazební deformaci* Q -přípustného řezu $\bar{\gamma}$ indukovanou vektorovým polem Ξ jako

$$\{\bar{\delta}_u\} = \{\alpha_u \circ J^1 \bar{\gamma} \circ \alpha_{0u}^{-1}\}. \quad (3.79)$$

π_1 -projektabilní vektorové pole Ξ náležející do kanonické distribuce budeme v dalším nazývat také *vazební variace* řezu $\bar{\gamma}$.

Obecně je řez $\bar{\delta}_u$ vazebním řezem, nemusí tedy jít o holonomní trajektorii v Q . Existuje takové $\epsilon > 0$, že pro každé $u \ni (-\epsilon, \epsilon)$ je vazební řez $\bar{\delta}_u$ definován na okolí kompaktní množiny $\Omega_u = \alpha_{0u}(\Omega)$. Můžeme definovat reálnou funkci

$$(-\epsilon, \epsilon) \in u \rightarrow \int_{\Omega_u} \bar{\delta}_u^* \eta. \quad (3.80)$$

Tato funkce je diferencovatelná. Její derivací podle u v bodě $u = 0$ dostáváme

$$\frac{d}{du} \int_{\Omega_u} \bar{\delta}_u^* \eta \Big|_{u=0} = \frac{d}{du} \int_{\Omega_u} (\alpha_u \circ J^1 \bar{\gamma} \circ \alpha_{0u}^{-1})^* \eta \Big|_{u=0} = \frac{d}{du} \int_{\Omega} (J^1 \bar{\gamma}^* \alpha_u^* \eta) \Big|_{u=0}, \quad (3.81)$$

což lze pomocí Lieovy derivace přepsat do tvaru

$$\int_{\Omega} J^1 \bar{\gamma}^* \partial_{\Xi} \eta. \quad (3.82)$$

Nyní můžeme definovat funkci

$$\bar{\Gamma}_{\Omega, W}^Q(\pi) \ni \bar{\gamma} \rightarrow \int_{\Omega} J^1 \bar{\gamma}^* \partial_{\Xi} \eta. \quad (3.83)$$

Vzhledem k tomu, že $J^1 \bar{\gamma}$ je integrální řez kanonické distribuce, můžeme opět místo 1-formy $\partial_{\Xi} \eta$ uvažovat třídu ekvivalence $[\partial_{\Xi} \eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})}$ a funkci (83) zapsat ve tvaru

$$\bar{\Gamma}_{\Omega, W}^Q(\pi) \ni \bar{\gamma} \rightarrow \int_{\Omega} J^1 \bar{\gamma}^* [\partial_{\Xi} \eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})}. \quad (3.84)$$

Funkci (84) nazýváme *vazební první variací*. Poznamenejme, že lze definovat i vazební variace vyšších řádů.

Prozatím jsme pro popis všech deformací Q -přípustných řezů z množiny $\bar{\Gamma}_{\Omega, W}^Q(\pi)$ používali π_1 -projektabilní vektorová pole Ξ náležející do kanonické distribuce. Lze ukázat (viz [26]), že pro účel generování všech deformací řezu $J^1 \bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}_{\Omega, W}^Q(\pi)$ je dostatečné uvažovat π_1 -vertikální vektorová pole Ξ náležející kanonické distribuci, která zachovávají definiční obory deformovaných řezů. Tato vektorová pole budeme v dalším nazývat *π_1 -vertikální variace*.

Věta 3.5 (Vazební Lepageova 1-forma) *Nechť η je 1-forma na Q . Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

1. Třídou ekvivalence $[\mathrm{d}\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}$ lze rozložit následujícím způsobem:

$$\rho^*[\mathrm{d}\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})} = [E]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})} + [F]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})},$$

kde $[E]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})} = \bar{p}_1[\mathrm{d}\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}$ je horizontální vzhledem k projekci $\tilde{Q} \rightarrow Y$.

2. Vázaně 1-kontaktní část $\bar{p}_1[\mathrm{d}\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}$ je třída ekvivalence obsahující dynamickou formu na \tilde{Q} .

3. Pro každé π_1 -vertikální vektorové pole Ξ náležející kanonické distribuci \mathcal{C} , $\Xi = \Xi^l(t, q^\sigma, \dot{q}^s)\xi_l + \tilde{\Xi}^l(t, q^\sigma, \dot{q}^s)\tilde{\xi}_l$, kde $\xi_l, \tilde{\xi}_l$ jsou generátory kanonické distribuce (35), nezávisí souřadnicová reprezentace třídy $\bar{h}i_\Xi[\mathrm{d}\eta]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})}$ na komponentách $\tilde{\Xi}^l$.

4. V libovolném souřadnicovém systému je

$$\eta = \bar{L}dt + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i}\omega^i + \bar{L}_i\bar{\varphi}^i, \quad (3.85)$$

kde \bar{L} a \bar{L}_i jsou funkce na Q a $\bar{\varphi}^i$ jsou kanonické vazební 1-formy.

Formu η splňující kteroukoliv z výše uvedených podmínek nazveme vazební Lepageovou 1-formou. Vázaně horizontální část formy η

$$\lambda_{\mathcal{C}} = \bar{L}dt + \bar{L}_i\bar{\varphi}^i \quad (3.86)$$

nazveme vazební lagranžián. Poznamenejme, že vazební lagranžián není invariantní a narozdíl od nevázaného případu, kde je lagranžián určen jedinou funkcí, je vazební lagranžián zadán $k + 1$ funkcemi \bar{L}, \bar{L}_i .

Vraťme se nyní k vazební první variaci (84) a připomeňme, že $\Omega = [a, b]$ je uzavřený interval v \mathbb{R} . Použitím vzorce pro výpočet Lieovy derivace dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_a^b J^1\bar{\gamma}^*[\partial_\Xi\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} = \\ & = \int_a^b J^1\bar{\gamma}^*(i_\Xi[\mathrm{d}\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}) + J^1\bar{\gamma}^*(i_\Xi[\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})})(b) - J^1\bar{\gamma}^*(i_\Xi[\eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})})(a). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Nechť η v (87) je vazební Lepageova 1-forma, pak pro první výraz na pravé straně rovnice (87) dostáváme vyjádření

$$\int_a^b J^1\bar{\gamma}^*(i_\Xi[\mathrm{d}\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}) = \int_a^b J^2\bar{\gamma}^*(i_{\tilde{\Xi}}[E]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})}), \quad (3.88)$$

kde $\tilde{\Xi}$ je π_2 -vertikální vektorové pole na \tilde{Q} náležející liftu $\tilde{\mathcal{C}}$ kanonické distribuce. Vztahem

$$\bar{p}_1[d\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})} = [E]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})} \quad (3.89)$$

definujeme *vazební Euler- Lagrangeovu formu*. Její souřadnicové vyjádření je

$$[E]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})} = [E_l(\bar{L}, \bar{L}_i)\omega^l \wedge dt]_{\Lambda^2(\tilde{\mathcal{I}})}, \quad (3.90)$$

kde

$$E_l(\bar{L}, \bar{L}_i) = \frac{\partial \mathcal{C} \bar{L}}{\partial q^l} - \frac{d\mathcal{C}}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^l} - \bar{L}_i \left[\frac{\partial \mathcal{C} g^i}{\partial q^l} - \frac{d\mathcal{C}}{dt} \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \right], \quad (3.91)$$

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial}{\partial q^{m-k+i}} g^i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l,$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q^l} = \frac{\partial}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial}{\partial q^{m-k+i}},$$

kde $1 \leq l \leq m - k$, $1 \leq i \leq k$. Výrazy (91), které závisí na $k + 1$ funkcích \bar{L} , \bar{L}_i na Q , nazveme *vazebními Eulerovými-Lagrangeovými výrazy*.

Nechť $\bar{\gamma}$ je Q -přípustný řez. Je-li, za podmínky pevných konců deformace $\{\bar{\delta}_u\}$, vazební první variace příslušná řezu $\bar{\gamma}$ nulová, tj.

$$\int_b^a J^1 \bar{\gamma}^* [\partial_{\Xi} \eta]_{\Lambda^1(\mathcal{I})} = 0, \quad (3.92)$$

kde Ξ je π_1 -vertikální vektorové pole náležející \mathcal{C} , nazveme řez $\bar{\gamma}$ *vazební extrémálou 1-formy η na $\Omega = [a, b]$* . Řez $\bar{\gamma}$ nazveme *vazební extrémálou 1-formy η* , platí-li, že restrikce řezu $\bar{\gamma}$ na libovolný uzavřený interval $\Omega \subset \text{dom } \bar{\gamma}$ je vazební extrémálou vazební Lepageovy 1-formy η na Ω .

Věta 3.6 *Nechť η je vazební Lepageova 1-forma na Q a $\bar{\gamma}$ je Q -přípustný řez. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $\bar{\gamma}$ je vazební extrémála vazební Lepageovy 1-formy η .
2. Pro každé vektorové pole Ξ na Q náležející kanonické distribuci \mathcal{C} platí

$$J^1 \bar{\gamma}^* i_{\Xi} \alpha = 0$$

pro každé $\alpha \in [d\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}$.

3. Pro každé π_1 -vertikální vektorové pole Ξ na Q náležející kanonické distribuci \mathcal{C} platí

$$J^1\bar{\gamma}^*i_{\Xi}\alpha = 0$$

pro každé $\alpha \in [d\eta]_{\Lambda^2(\mathcal{I})}$.

4. Vazební Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou podél $J^2\bar{\gamma}$ nulové, tj.

$$E_l \circ J^2\bar{\gamma} = 0, \quad 1 \leq l \leq m - k.$$

5. V libovolném fibrovaném souřadnicovém systému $\bar{\gamma}$ splňuje systém rovnic

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q^l} - \frac{d\bar{L}}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^l} - \bar{L}_i \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial q^l} \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} - \frac{d\bar{L}}{dt} \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \right] = 0. \quad (3.93)$$

Každý z výše uvedených ekvivalentních systémů rovnic nazýváme *vazebními Eulerovými- Lagrangeovými rovnicemi* příslušnými vazební Lepageově 1-formě η . Můžeme tedy shrnout, že Q -přípustný řez je vazební extrémálou vazební Lepageovy 1-formy η tehdy a jen tehdy, když splňuje příslušné vazební Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.

Věta 3.7 (Variační neholonomně vázaný systém) *Vázaný mechanický systém $[\alpha_Q]$ je variační tehdy a jen tehdy, když třída ekvivalence $[\alpha_Q]$ obsahuje uzavřeného reprezentanta α_Q .*

Pro uzavřeného reprezentanta α_Q platí $\alpha_Q = d\eta$, kde η je vazební Lepageova 1-forma (85). Pro komponenty \bar{A}_l, \bar{B}_{ls} formy α_Q pak dostáváme vyjádření:

$$\bar{A}_l = \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial q^l} - \frac{d\bar{L}}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^l} \right] (\bar{L}) - \bar{L}_i \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial q^l} - \frac{d\bar{L}}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^l} \right] (g^i) \quad (3.94)$$

$$\bar{B}_{ls} = -\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^s} + \bar{L}_i \frac{\partial^2 g^i}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^s}, \quad (3.95)$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^{m-k+i}} g^i,$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q^l} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^{m-k+i}},$$

kde $1 \leq l, s \leq m - k, 1 \leq i \leq k$.

Forma η však není zadána jednoznačně, lze ji zadat různými kombinacemi funkcí \bar{L}, \bar{L}_i na Q . Lepageovy 1-formy η_1, η_2 reprezentují též variační vázaný systém, platí-li:

$$d\eta_1 - d\eta_2 = \bar{F}_{ls}\omega^l \wedge \omega^s + \varphi, \quad (3.96)$$

kde φ je vazební 2-forma.

Poznamenejme, že z podmínky $d\alpha_Q = 0$ vyplývají nutné a postačující podmínky variačnosti vázaného systému pro koeficienty \bar{A}_l, \bar{B}_{ls} , které se nazývají *vazební Helmholtzovy podmínky variačnosti* (viz[16]). Tyto podmínky jsou obdobou Helmholtzových podmínek pro nevázaný mechanický systém.

Věta 3.8 *Nechť $[\alpha]$ je variační nevázaný mechanický systém a Q je vazba. Vázaný mechanický systém $[\alpha_Q]$ příslušný systému $[\alpha]$ a vazbě Q je variační.*

Každý nevázaný variační systém podrobený neholonomní vazbě tedy přechází na systém variační vázaný. Lepageova vazební 1-forma není zadána jednoznačně. Pro variační nevázaný systém však existuje vztah mezi Lagrangeovou funkcí L nevázaného systému a funkcemi \bar{L}, \bar{L}_i , které reprezentují Lepageovu vazební 1-formu příslušnou vázanému systému $[\alpha_Q]$:

$$\bar{L} = L \circ \iota, \quad \bar{L}_i = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{m-k+i}} \circ \iota \right), \quad (3.97)$$

kde ι je kanonické vložení vazební podvariety Q do J^1Y . Vztahy (97) získáme porovnáním výrazů (94), (95) s koeficienty formy $\alpha_Q = \iota^*d\theta_\lambda$, kde $\theta_\lambda = Ldt + \partial L/\partial \dot{q}^\sigma \omega^\sigma$.

4 Fyzikální aplikace

V této kapitole se budeme věnovat praktickému využití geometrické teorie neholonomně vázaných systémů, přičemž budeme klást důraz na fyzikální podstatu příkladu. Všechny příklady mají vztah k variačnosti neholonomních systémů. V první části uvedeme příklady, ve kterých je nevázaný systém variační. Půjde o příklady fyzikální, tj. budeme popisovat reálné neholonomní mechanické systémy. V další části se budeme věnovat zajímavému aspektu teorie variačních neholonomních systémů: pomocí neholonomní vazby lze převést nevariační nevázaný systém na variační vázaný. Uvedeme jak fyzikální příklady, tak matematické modely. V poslední části se budeme zabývat problémem triviální vazební Lepageovy 1-formy.

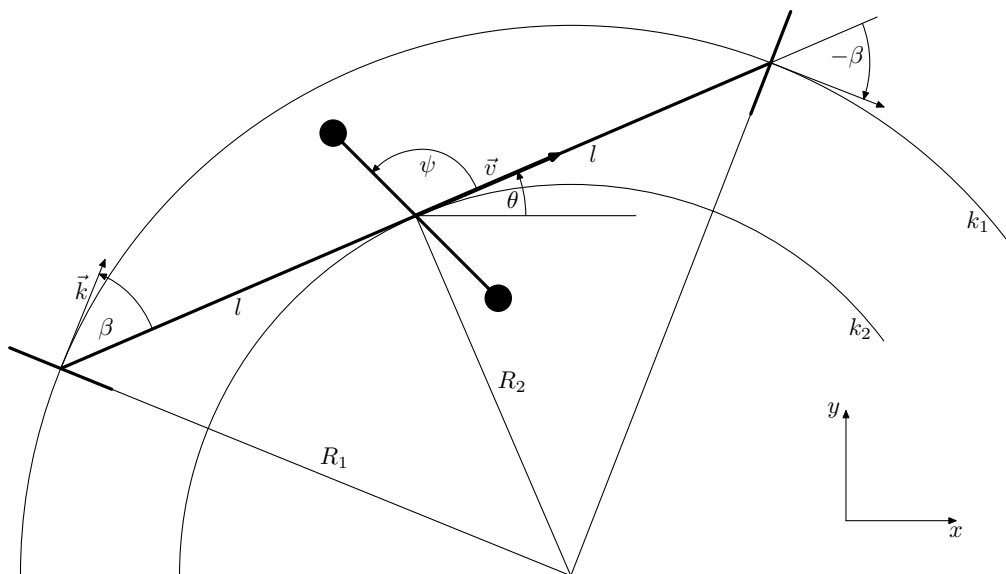
V příkladech je kladen důraz na jejich fyzikální význam. Osnova příkladů z první a druhé kapitoly je vždy shodná. Začínáme nevázaným systémem, popisujeme jej Lepageovou 2-formou a dynamickou formou, případně lagranžianem, pokud existuje. Poté zformulujeme neholonomní vazbu, kde budeme klást důraz na její význam a konstrukci, zapíšeme formy charakterizující vázaný systém a budeme se věnovat sestavení a řešitelnosti systému redukovaných rovnic. V případech, kdy půjde o variační vázaný systém, nalezneme alespoň jednu Lepageovu vazební 1-formu příslušnou vázanému systému. Z fyzikálního hlediska nás bude zajímat zejména systém deformovaných rovnic. Budeme se zajímat o Chetaevovy vazební síly a jejich vztah k fyzikálním silám (síly tlakové, statického tření,...). Provedeme diskusi možnosti řešení vázaného systému výhradně fyzikální metodou, tj. formulací impulzových vět.

Do souboru příkladů byly zařazeny především původní příklady a byl kladen důraz na jejich jasnou fyzikální interpretaci. V případech příkladů s nejasným fyzikálním výkladem budeme mluvit o matematickém modelu.

4.1 Variační systém podrobený neholonomní vazbě

Následující dva příklady představují fyzikální systémy podrobené neholonomní vazbě, která má význam požadavku neprokluzování částí systémů po podložce. Oba nevázané systémy jsou variační. Zadání systémů jsou převzata z literatury (viz. [25], [24]), sestavení neholonomních vazeb je původní. Budeme se podrobně věnovat konstrukci vazby, jejímu významu, vlastnostem Chetaevových vazebních sil z fyzikálního hlediska a rozebereme možnosti řešení, případně samotné řešení neholonomně vázaného systému.

Obrázek 1: Model snakeboardu



4.1.1 Snakeboard

Zadání. Snakeboard (viz [24]) je méně známou variantou skateboardu, která umožňuje jezdcovi vytvářet hadovitý pohyb kupředu, aniž by se musel dotýkat země. Zatímco u skateboardu jsou osy dvou párů koleček pevně spjaty s prknem a jezdec zatáčí přenášením váhy případně odrazem od země, u snakeboardu mohou osy koleček rotovat kolem vertikální osy a jezdec kontroluje jejich natočení svými chodidly. Jezdec se také může otáčet v bocích. Popišme a vysvětleme tu část pohybu snakeboardu, ve které jezdec (dosud jedoucí přímočaře bez rotací těla a chodidel) se začne otáčet v bocích a zároveň chodidly kontrolovaně natáčí osy koleček. Předpokládejme, že vzdálenost těžiště jezdce a těžiště prkna je během jízdy konstantní, tj. jezdec se nevychyluje ze vzpřímené pozice, pouze se otáčí v bocích. Předpokládejme dále, že průmět těžiště jezdce do roviny xy splývá s těžištěm prkna. Snakeboardem budeme nazývat systém rotor+prkno+osy s kolečky. Rotor představuje lidské tělo a prkno spojuje přední a zadní osu s kolečky. Takové uspořádání odpovídá modelu snakeboardu nakreslenému na obrázku (1), kde geometrický střed prkna splývá s těžištěm prkna. Poznamenejme, že okamžitá rychlost těžiště snakeboardu je stejná jako okamžitá rychlost těžiště prkna

(nepředpokládáme vzájemné posuny částí snakeboardu), jehož pohyb se děje v rovině xy .

Označme J_r moment setrvačnosti rotoru snakeboardu a označme J moment setrvačnosti prkna, oba vzhledem k vertikální ose procházející geometrickým středem prkna. Dále označíme J_k moment setrvačnosti osy s předními kolečky vzhledem k vertikální ose procházející jejím středem. Předpokládáme, že moment setrvačnosti osy se zadními kolečky vzhledem k obdobně konstruované ose jako u koleček předních je stejný, tedy J_k a dále předpokládáme, že moment setrvačnosti koleček vzhledem k jejich osám je zanedbatelný. Poloviční délku prkna označíme l . Celková hmotnost snakeboardu bude m . Pozice a orientace prkna je určena polohou těžiště prkna (x, y) a natočením prkna od osy x , které určuje úhel θ . Úhel otočení rotoru vzhledem k prknu označíme ψ . Budeme předpokládat, že osy s předními a zadními kolečky jsou v každém okamžiku natočeny o stejně veliký úhel β vzhledem k prknu, ovšem na rozdílné strany (viz obrázek (1)). Tento předpoklad je založen na pozorování pohybu jezdců na snakeboardu (viz [24]).

Popis nevázaného mechanického systému. Velikost úhlu natočení předních a zadních koleček vzhledem k prknu je $-\beta$ a β . Systém má pět stupňů volnosti $(x, y, \theta, \psi, \beta)$, je variační a jeho lagranžian má tvar:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_k(\dot{\beta} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_k(-\dot{\beta} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_r(\dot{\psi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2, \quad (4.1)$$

který můžeme přepsat

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J_k\dot{\beta}^2 + J_r\dot{\psi}\dot{\theta} + \frac{1}{2}J_r\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{\theta}^2, \quad (4.2)$$

kde $\mathcal{J} = J + J_r + 2J_k$. Pohybové rovnice systému dostáváme ve tvaru:

$$-m\ddot{x} = 0, \quad -m\ddot{y} = 0, \quad (4.3)$$

$$-J_r\ddot{\psi} - \mathcal{J}\ddot{\theta} = 0, \quad (4.4)$$

$$-J_r\ddot{\psi} - J_r\ddot{\theta} = 0. \quad (4.5)$$

$$-2J_k\ddot{\beta} = 0, \quad (4.6)$$

Z rovnic (4), (5) vyplývá $\ddot{\theta} = 0$ a z rovnice (5) dostáváme $\dot{\theta} + \dot{\psi} = konst$. Z rovnic (3) a (6) vyplývá, že těžiště se pohybuje rovnoměrně přímočaře a osa s kolečky (jak předními tak zadními) rotuje rovnoměrně kolem vertikální osy procházející

jejím středem. Připomeňme, že ze zadání vyplývá, že se osy předních a zadních koleček otáčejí proti sobě. Povšimněme si, že rotace os s kolečky není nijak svázána s pohybem prkna. Taková formulace příkladu odpovídá případu, kdy je dovoleno, aby se kolečka smýkala do boku a dále případu, kdy rotor (jezdec) neuplatňuje vlastní vůli. Ve skutečnosti jezdec svůj pohyb na snakeboardu řídí právě kontrolovanou rotací těla a chodidel a tedy funkce ψ a β jsou zadanou funkcí času. Tato okolnost vstupuje do příkladu ve formě (holonomních reonomních) vazeb:

$$f^1 \equiv \psi - P(t) = 0. \quad (4.7)$$

$$f^2 \equiv \beta - b(t) = 0. \quad (4.8)$$

Užitím metody Lagrangeových multiplikátorů (viz[1]) nabývají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned} -m\ddot{x} &= 0, \quad -m\ddot{y} = 0, \\ -J_r\ddot{\psi} - \mathcal{J}\ddot{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} -J_r\ddot{\psi} - J_r\ddot{\theta} &= \mu_1, \\ -2J_k\ddot{\beta} &= \mu_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Z hlediska řešení systému vzhledem k neznámým funkcím $(x(t), y(t), \theta(t))$ je systém(9) ekvivalentní systému

$$\begin{aligned} -m\ddot{x} &= 0, \quad -m\ddot{y} = 0, \\ -J_r\ddot{P} - \mathcal{J}\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nadále se nebudeme zabývat funkcemi μ_1, μ_2 a systém (11) bude představovat nevázaný systém pohybových rovnic popisujících pohyb snakeboardu se zadaným otáčením rotoru $\psi = P(t)$ a koleček $\beta = b(t)$. Systém má nyní již jen tři stupně volnosti (x, y, θ) a (použijeme-li fibrovanou varietu Y jako podkladovou strukturu) dostáváme $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $\dim Y = 4$. Označíme (t) souřadnici na bázi $X = \mathbb{R}$, (t, x, y, θ) fibrované souřadnice na Y a $(t, x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ asociované fibrované souřadnice na $J^1Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Lagranžiián nevázaného systému (11) je tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J_k\dot{\beta}^2 + J_r\dot{P}\dot{\theta} + \frac{1}{2}J_r\dot{P}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{\theta}^2. \quad (4.12)$$

Nevázaný mechanický systém $[\alpha]$ reprezentuje Lepageova 2-forma

$$\alpha = -m(\omega^1 \wedge d\dot{x} + \omega^2 \wedge d\dot{y}) - J_r\dot{P}\omega^3 \wedge dt - \mathcal{J}\omega^3 \wedge d\dot{\theta}, \quad (4.13)$$

kde $\omega^1 = dx - \dot{x}dt$, $\omega^2 = dy - \dot{y}dt$, $\omega^3 = d\theta - \dot{\theta}dt$. Příslušná dynamická forma je tvaru

$$E = -m\ddot{x}\omega^1 \wedge dt - m\ddot{y}\omega^2 \wedge dt - (J_r\ddot{P} + \mathcal{J}\ddot{\theta})\omega^3 \wedge dt. \quad (4.14)$$

Neholonomní vazba. Vraťme se nyní k problému smýkání koleček. Vycházíme ze zadání nevázaného systému převzatého z [24] (viz výše), samotná konstrukce vazby je však původní.

Požadujeme, aby se kolečka do boku nesmýkala a prkno se pohybovalo pouze díky valení koleček (případně smýkání kupředu). V takovém případě je okamžitá rychlost konce prkna neustále kolmá k příslušné ose s kolečky. Protože jsou úhly sklonu os s kolečky vůči prknu stejně velké ale opačně orientované, pohybují se konce prkna v každém okamžiku po oskulační kružnici k_1 , která má střed v průsečíku prodloužených os koleček (viz obrázek 1). Těžiště prkna se pohybuje po kružnici k_2 , která je soustředná s kružnicí k_1 . Pro poloměry kružnic platí $R_2 = R_1 \cos \beta$. U takto vázaného pohybu je úhlová rychlost ω těžiště prkna po oskulační kružnici k_2 rovna úhlové rychlosti vlastní rotace prkna $\dot{\theta}$ vůči svislé ose procházející těžištěm prkna.

Označme \vec{k} jednotkový vektor (viz obr. 1) kolmý k ose zadních koleček a \vec{v} okamžitou rychlost těžiště snakeboardu. Vektor \vec{k} je tečný k oskulační kružnici k_1 . Platí

$$\omega = \frac{|\vec{v}|}{R_2} = \dot{\theta}, \quad (4.15)$$

$$R_2 = l/\operatorname{tg} \beta. \quad (4.16)$$

Požadavek, aby \vec{k} svíral se směrem prkna úhel β , vyjadřuje vazební podmínka

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = |\vec{k}||\vec{v}| \cos \beta = |\vec{v}| \cos \beta. \quad (4.17)$$

Platí $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$, $\vec{k} = (\cos(\theta + \beta), \sin(\theta + \beta))$. S využitím (15), (16), dostáváme vazební podmínku (17) ve tvaru

$$\sin \beta (\dot{x} \cos(\theta + \beta) + \dot{y} \sin(\theta + \beta)) = l \dot{\theta} \cos^2 \beta. \quad (4.18)$$

Dále požadujeme, aby okamžitá rychlost těžiště snakeboardu $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ měla v každém okamžiku směr rovnoběžný s prknem, což zajišťuje podmínka

$$\dot{y} \cos \theta = \dot{x} \sin \theta. \quad (4.19)$$

Vzhledem k tomu, že $\beta = b(t)$, dostáváme z (18) a (19) za předpokladu $\theta \neq \pi/2 + n\pi$, kde $n = 1, 2, \dots$, neholonomní podmínky tvaru

$$f^1 \equiv \dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta = 0, \quad (4.20)$$

$$f^2 \equiv \cos b(t)(\dot{\theta}l \cos b(t) \cos \theta - \dot{x} \sin b(t)) = 0. \quad (4.21)$$

Tyto podmínky definují vazební podvarietu $Q \in J^1Y$, neboť podmínka (3.2) je pro funkce f^1, f^2 splněna.

Je-li $b(t) = \pi/2 + n\pi$, jsou osy koleček rovnoběžné s prknem. Pro tento případ je $f^2 \equiv 0$. Jak jsme uvedli výše vazba (20) vyjadřuje fakt, že okamžitá rychlost těžiště snakeboardu je rovnoběžná s prknem. Nezaručuje však nesmýkání koleček do boku pokud prkno koná translační pohyb. Nadále budeme předpokládat, že $b(t) \neq \pi/2 + n\pi$ v každém okamžiku.

Vázaný mechanický systém. Za předpokladu $\cos b(t) \neq 0$ a $\cos \theta \neq 0$ můžeme přepsat vazební podmínky (20), (21) do normálního tvaru

$$g^1 \equiv \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \theta, \quad (4.22)$$

$$g^2 \equiv \dot{\theta} = \dot{x} \frac{\operatorname{tg} b(t)}{l \cos \theta}. \quad (4.23)$$

Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný nevázanému systému $[\alpha]$ a vazbě Q je reprezentován 2-formou

$$\alpha_Q = \bar{A}_1 \omega^1 \wedge dt + \bar{B}_{11} \omega^1 \wedge d\dot{x}, \quad (4.24)$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\operatorname{tg} b(t)}{l \cos \theta} \left(-J_r \ddot{P} - \frac{m \dot{x}^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} - \mathcal{J} \frac{\dot{x}}{l \cos \theta} \left(\frac{\dot{b}(t)}{\cos^2 b(t)} + \frac{\dot{x} \operatorname{tg}^2 b(t) \sin \theta}{l \cos^2 \theta} \right) \right), \\ \bar{B}_{11} &= -m \frac{1}{\cos^2 \theta} - \mathcal{J} \frac{\operatorname{tg}^2 b(t)}{l^2 \cos^2 \theta}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Redukované rovnice jsou

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 + \bar{B}_{11} \ddot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= \dot{x} \operatorname{tg} \theta, \\ \dot{\theta} &= \dot{x} \frac{\operatorname{tg} b(t)}{l \cos \theta}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Trajektorii systému dostáváme řešením systému (26).

Vázaný mechanický systém $[\alpha_Q]$ je variační. Příslušná vazební Lepageova 1-forma má tvar

$$\eta = \bar{L}dt + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}}\omega^1 + \bar{L}_1\bar{\varphi}^1 + \bar{L}_2\bar{\varphi}^2,$$

kde $\bar{\varphi}^1 = -\operatorname{tg}\theta\omega^1 + \iota^*\omega^2$, $\bar{\varphi}^2 = -\operatorname{tg}b(t)/(l \cos \theta)\omega^2 + \iota^*\omega^3$ jsou kanonické vazební 1-formy. Funkce \bar{L} , \bar{L}_1 , \bar{L}_2 mohou být tvaru (viz (3.97)):

$$\bar{L} = L \circ \iota, \quad \bar{L}_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \circ \iota \right), \quad \bar{L}_2 = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \circ \iota \right),$$

což dává

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta) + J_k\dot{b}(t)^2 + J_r\dot{P}\dot{x}\frac{\operatorname{tg}b(t)}{l \cos \theta} + \frac{1}{2}J_r\dot{P}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{x}^2\left(\frac{\operatorname{tg}b(t)}{l \cos \theta}\right)^2, \\ \bar{L}_1 &= m\dot{x}\operatorname{tg}\theta, \\ \bar{L}_2 &= \left(J_r\dot{P} + \mathcal{J}\dot{x}\frac{\operatorname{tg}b(t)}{l \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Chetaeova vazební síla má pro neholonomní podmínky (20), (21) tvar

$$\Phi = (-\mu_1 \sin \theta - \mu_2 \sin b(t) \cos b(t), \mu_1 \cos \theta, \mu_2 l \cos^2 b(t) \cos \theta), \quad (4.28)$$

kde μ_1, μ_2 jsou funkce na vazební podvarietě Q . Deformované rovnice dostáváme ve tvaru

$$\begin{aligned} -m\ddot{x} + \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin b(t) \cos b(t) &= 0, \\ -m\ddot{y} - \mu_1 \cos \theta &= 0, \\ -J_r\ddot{P} - \mathcal{J}\ddot{\theta} - \mu_2 l \cos^2 b(t) \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Trajektorii systému a Lagrangeovy multiplikátory dostáváme řešením systému rovnic (22), (23), (29).

Řešení vázaného systému $[\alpha_Q]$ pro $b(t) = \pi/4$.

Budeme hledat řešení vázaného systému $[\alpha_Q]$ systému pro funkce

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2}\epsilon t^2, \\ b(t) &= \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

kde ϵ je kladná konstanta. Tato volba představuje situaci, kdy jezdec roztáčí trup, ale nerotuje chodidly. Zadejme počáteční podmínky

$$x(0) = 0, y(0) = -l, \theta(0) = 0, \dot{x}(0) = 0. \quad (4.30)$$

Řešením systému (26) dostáváme (s využitím počátečních podmínek (30)):

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta, \quad (4.31)$$

$$\theta = -\frac{1}{2} K \epsilon t^2, \quad (4.32)$$

kde $K = \frac{J_r}{(ml^2 + \mathcal{J})}$. Multiplikátory μ_1, μ_2 nabývají pro toto řešení podobu

$$\begin{aligned} \mu_1 &= mlK\epsilon(\operatorname{tg}\theta - K\epsilon t^2), \\ \mu_2 &= mlK\epsilon\left(\frac{-2}{\cos\theta}\right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

a Chetaevova vazební síla (28) je

$$\Phi = mlK\epsilon(\cos\theta + K\epsilon t^2 \sin\theta, \sin\theta - K\epsilon t^2 \cos\theta, -l). \quad (4.34)$$

Zatímco třetí složka Chetaevovy vazební síly (34) má rozměr momentu síly mají první dvě složky rozměr síly. Tyto složky můžeme interpretovat jako sílu \vec{F} v rovině xy působící na těžiště snakeboardu. Označíme-li průmět síly \vec{F} do směru rovnoběžného s prknem \vec{F}_t a směru kolmého na prkno \vec{F}_d , pak dostáváme

$$\vec{F}_d = mlK^2\epsilon^2 t^2(\sin\theta, -\cos\theta) = ml\dot{\theta}^2(\sin\theta, -\cos\theta), \quad (4.35)$$

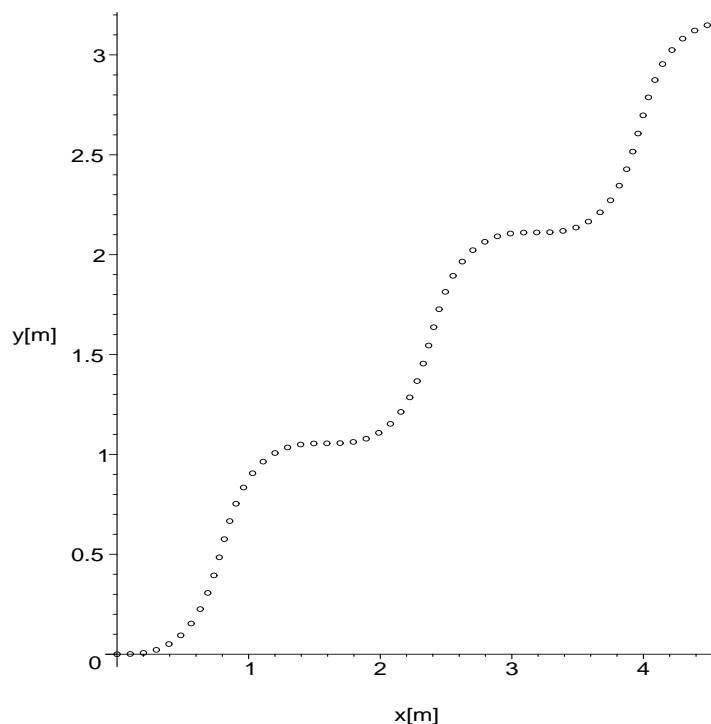
$$\vec{F}_t = mlK\epsilon(\cos\theta, \sin\theta) = -ml\ddot{\theta}(\cos\theta, \sin\theta). \quad (4.36)$$

Síla \vec{F}_d je dostředivou silou a způsobuje pohyb těžiště snakeboardu po kružnici k_2 o poloměru l . Skutečně, pro splnění podmínky neprokluzování koleček do boku při konstantním úhlu natočení os koleček β , je nutno, aby se snakeboard pohyboval po kružnici.

Síla \vec{F}_t je tečná ke kružnici k_2 , těžiště se tedy pohybuje po kružnici rovnoměrně zrychleně.

Shrňme tedy, že snakeboard jezdí rovnoměrně zrychleně po kružnici bez prokluzování koleček do boku, přičemž prkno rotuje v opačném smyslu než rotor neboť $\dot{\theta} = -K\dot{P}$ a úhlová rychlost ω , kterou se těžiště snakeboardu po kružnici pohybuje je $\omega \equiv \dot{\theta} = -K\epsilon t$.

Obrázek 2: Numerická simulace trajektorie těžiště snakeboardu



Numerické řešení vázaného systému $[\alpha_Q]$ **pro** $b(t) = \omega t$. Hledejme řešení vázaného systému pro případ, kdy jezdec na snakeboardu kontrolovaně mění úhel natočení os s kolečky a zároveň otáčí tělem. Zvolme funkce

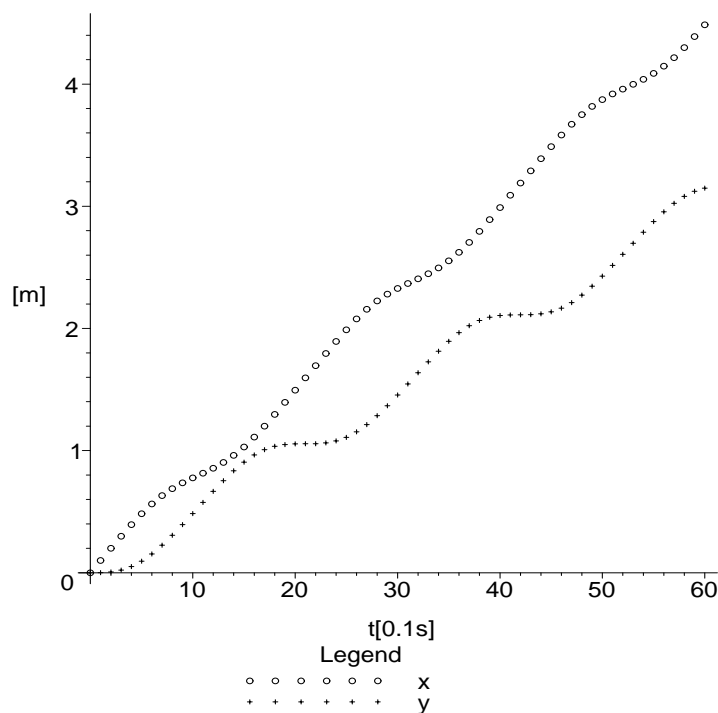
$$P(t) = 0.1 \cos 3t,$$

$$b(t) = 0.5 \sin 3t.$$

Tato volba představuje odhad pohybu jezdce na snakeboardu. Jezdec rotuje tělem vpravo a vlevo se stejnou frekvencí s jakou periodicky natáčí osy koleček snakeboardu. Pomocí programu Maple nalezneme numerické řešení redukovaných rovnic (26). Volíme hmotnost jezdce $m_r = 70\text{kg}$, prkna $m_p = 5\text{kg}$ a osy s kolečky $m_k = 1\text{kg}$, délku obdélníkového prkna $a = 0.6\text{m}$ a jeho šířku $b = 0.1\text{m}$. Osa s kolečky nechť má tvar plné tyče a délku $l_k = 0.2\text{m}$.

Moment setrvačnosti J_k , resp. J , resp. J_r , určíme podle vzorce pro moment setrvačnosti homogenní tyče vzhledem k ose rotace kolmé k tyči a procházející

Obrázek 3: Numerické řešení $x(t)$ a $y(t)$



jejím středem

$$J_k = \frac{m_k l_k^2}{12},$$

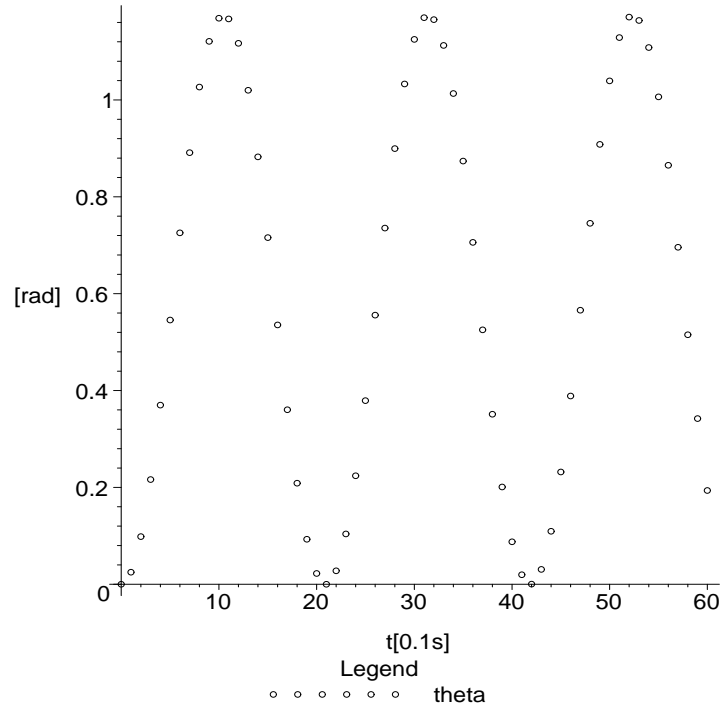
resp. homogenní obdélníkové desky vzhledem k ose rotace kolmé k rovině desky a procházející jejím geometrickým středem

$$J = \frac{m_p(a^2 + b^2)}{12},$$

resp. homogenního válce vzhledem k ose rotace totožné s osou válce

$$J_r = \frac{m_r r^2}{2},$$

Obrázek 4: Numerické řešení $\theta(t)$



přičemž uvažujeme válec o poloměru $r = 0.15\text{m}$. Dostáváme charakteristiky systému

$$m = 76\text{kg}, l = 0.3\text{m}, J_k = \frac{1}{300}\text{kgm}^{-2},$$

$$J_r = \frac{63}{80}\text{kgm}^{-2}, J = \frac{34}{240}\text{kgm}^{-2}, \mathcal{J} = \frac{569}{600}\text{kgm}^{-2}.$$

Zadejme počáteční podmínky

$$x(0) = 0, y(0) = 0, \theta(0) = 0, \dot{x}(0) = 1. \quad (4.37)$$

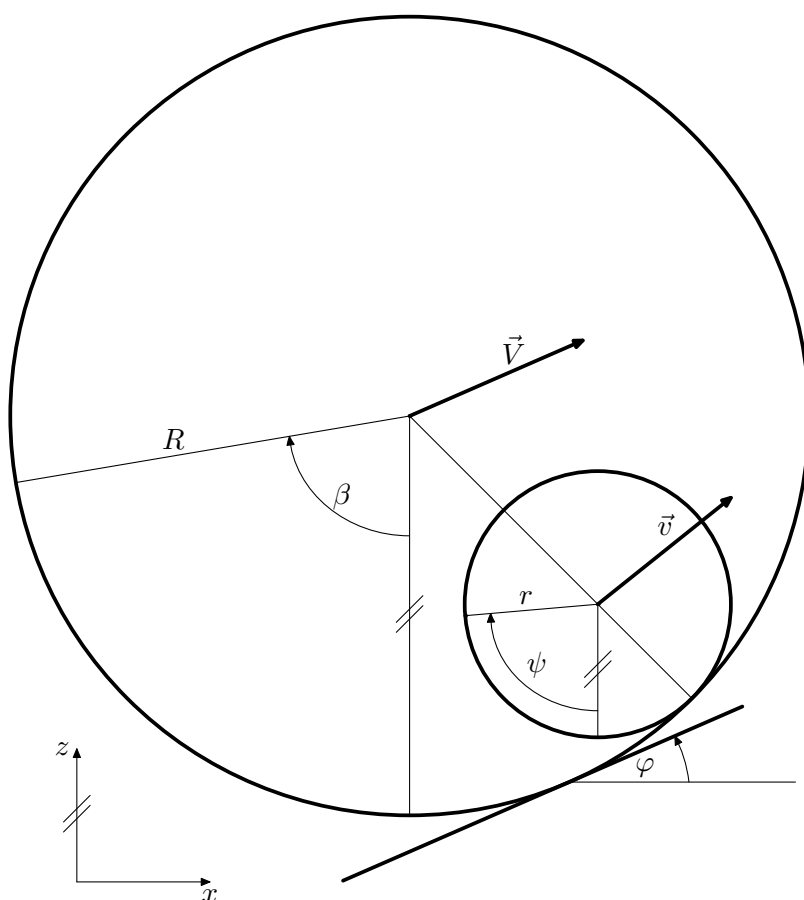
Takové zadání příkladu představuje situaci, kdy jezdec na snakeboardu dosud jedoucí rovnoměrně přímočaře ve směru osy x začne v okamžiku $t = 0\text{s}$ rotovat tělem vpravo a vlevo a zároveň se stejnou frekvencí periodicky natáčet osy koleček. Nalezli jsme numerické řešení pro prvních šest vteřin pohybu. Na obrázku 3 vidíme numerické řešení časového vývoje souřadnic těžiště snakeboardu. Jak

také potvrzuje simulace trajektorie těžiště snakeboardu na obrázku 2, pohybuje se těžiště kupředu v rovině xy po zakřivené trajektorii, která připomíná pohyb hada.

Na obrázku 4 vidíme numerické řešení úhlu $\theta(t)$ celkového natočení prkna vůči ose x . Vidíme, že prkno se periodicky natáčí vzhledem k ose x , přičemž $\theta \in [0, 0.45\pi]$.

Snakeboard umožňuje svému jezdcovi kontrolovaně zatáčet, aniž by se jezdec musel odrážet od země.

Obrázek 5: Nákres válečku uvnitř válce



4.1.2 Váleček uvnitř dutého válce

Mějme dutý válec V o poloměru R (předpokládejme, že rozdíl mezi vnitřním a vnějším poloměrem můžeme zanedbat) a hmotnosti M položený na podložku tak, že se může valit. Podložka svírá s osou x úhel φ , který je zadanou funkcí času. Dvnitř dutého válce je vložen váleček W o poloměru r a hmotnosti m tak, že osy válců jsou rovnoběžné. Předpokládejme, že obě tělesa jsou homogenní. Platí $R > r$. Moment setrvačnosti dutého válce je $J_M = MR^2$ a moment setrvačnosti válečku W je $J_m = (1/2)mr^2$, oba momenty jsou zadány vzhledem

ke geometrické ose příslušného válce. Systém je umístěn v tíhovém poli Země, tíhové zrychlení značíme g . Žádný z válců neprokluzuje. Osu x volíme vodorovnou, kolmou na osy válců a osu z volíme svislou. Systém má šest stupňů volnosti a (použijeme-li fibrovanou varietu Y jako podkladovou strukturu) dostáváme $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$, $\dim Y = 7$. Označíme (t) souřadnici na bázi $X = \mathbb{R}$, $(t, \psi, \beta, x, z, X, Z)$ fibrované souřadnice na Y a $(t, \psi, \beta, x, z, X, Z, \dot{\psi}, \dot{\beta}, \dot{x}, \dot{z}, \dot{X}, \dot{Z})$ asociované souřadnice na $J^1Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$. Polohu těžiště válce V zadávají souřadnice (X, Z) , polohu těžiště válce W zadávají souřadnice (x, z) a β resp. ψ je celkový úhel otočení válce V resp. W vzhledem k ose z (viz obrázek 5). Měření úhlů β a ψ je voleno tak, že $\dot{\beta} > 0$ resp. $\dot{\psi} > 0$ valí-li se válec V resp. W doprava, tedy v kladném směru osy x . Úhel β resp. ψ tedy roste po směru chodu hodinových ručiček.

Nevázaný systém. Lagranžián (nevázaného) systému je tvořen kinetickou energií translačního a rotačního pohybu systému a záporně vzatou potenciální energií systému v tíhovém poli Země (nulová hladina potenciální energie je $z = 0$):

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}J_m\dot{\psi}^2 + J_M\dot{\beta}^2 - mgz - MgZ. \quad (4.38)$$

Pohybové rovnice nevázaného systému tedy jsou:

$$\begin{aligned} -J_m\ddot{\psi} &= 0, & -J_M\ddot{\beta} &= 0, & -m\ddot{x} &= 0, & -m\ddot{z} - mg &= 0, \\ -M\ddot{X} &= 0, & -M\ddot{Z} - Mg &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nevázaný mechanický systém $[\alpha]$ reprezentuje Lepageova 2-forma

$$\begin{aligned} \alpha &= -mg\omega^4 \wedge dt - Mg\omega^6 \wedge dt - J_m\omega^1 \wedge d\dot{\psi} - J_M\omega^2 \wedge d\dot{\beta} - \\ &- m(\omega^3 \wedge d\dot{x} + \omega^4 \wedge d\dot{z}) - M(\omega^5 \wedge d\dot{X} + \omega^6 \wedge d\dot{Z}), \end{aligned} \quad (4.40)$$

kde $\omega^1 = d\psi - \dot{\psi}dt$, $\omega^2 = d\beta - \dot{\beta}dt$, $\omega^3 = dx - \dot{x}dt$, $\omega^4 = dz - \dot{z}dt$, $\omega^5 = dX - \dot{X}dt$, $\omega^6 = dZ - \dot{Z}dt$. Dynamická forma příslušná mechanickému systému $[\alpha]$ je tvaru

$$\begin{aligned} E &= -J_m\ddot{\psi}\omega^1 \wedge dt - J_M\ddot{\beta}\omega^2 \wedge dt - m\ddot{x}\omega^3 \wedge dt - \\ &- (m\ddot{z} + mg)\omega^4 \wedge dt - M\ddot{X}\omega^5 \wedge dt - (M\ddot{Z} + Mg)\omega^6 \wedge dt. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Neholonomní vazba. V zadání požadujeme, aby válce při valení neprokluzovaly. Je zřejmé, že vektor rychlosti $\vec{V} = (\dot{X}, \dot{Z})$ těžiště válce V je rovnoběžný

s podložkou. Předchozí požadavky jsou zajištěny čtyřmi neholonomními podmínkami:

$$\dot{x} \equiv g^1 = (r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{C} + R\dot{\beta} \cos \varphi, \quad (4.42)$$

$$\dot{z} \equiv g^2 = (r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{S} + R\dot{\beta} \sin \varphi, \quad (4.43)$$

$$\dot{X} \equiv g^3 = R\dot{\beta} \cos \varphi, \quad (4.44)$$

$$\dot{Z} \equiv g^4 = R\dot{\beta} \sin \varphi, \quad (4.45)$$

kde

$$\bar{C} = \cos \left(\frac{r}{R-r} \psi - \frac{R}{R-r} \beta \right),$$

$$\bar{S} = \sin \left(\frac{r}{R-r} \psi - \frac{R}{R-r} \beta \right).$$

Podmínky (44), (45) vyjadřují

1. rovnoběžnost vektoru rychlosti $\vec{V} = (\dot{X}, \dot{Z})$ s podložkou, tj. $\dot{X} = |\vec{V}| \cos \varphi$, $\dot{Z} = |\vec{V}| \sin \varphi$,
2. rovnost velikosti okamžité rychlosti $\vec{V} = (\dot{X}, \dot{Z})$ těžiště válce V a jeho obvodové rychlosti $R\dot{\beta}$, vyplývající z požadavku, aby válec V po podložce neprokluzoval.

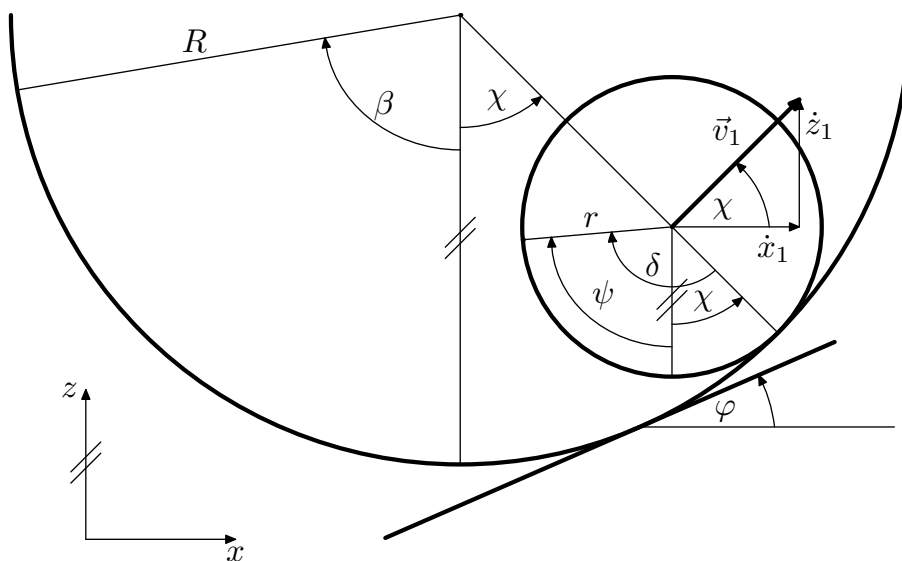
Podmínky (42), (43) v rovině xz určují složky okamžité rychlosti $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{z})$ těžiště malého válečku W za předpokladu, že se válec W valí po vnitřním povrchu válce V rovněž bez prokluzování. Týkají se tedy vzájemné rychlosti těžišť válců $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{V}$. Pro odvození těchto podmínek použijeme obrázek (6). V rovině xz má \vec{v}_1 složky

$$\vec{v}_1 = (\dot{x}_1, \dot{z}_1) = v_1(\cos \chi, \sin \chi), \quad (4.46)$$

kde v_1 je funkcí $\dot{\psi}$ a $\dot{\beta}$. Úhel χ , který svírá okamžitá spojnice těžišť obou válců se svislicí (viz. obrázek (6)), určuje polohu těžiště válečku W uvnitř válce V . Kladný směr měření úhlu χ volíme v souladu s obrázkem (6), tj. proti směru hodinových ručiček.

V obrázku zavádíme ještě pomocný úhel δ , který určuje otočení válce W vůči válci V . Jeho rameny jsou okamžitá spojnice těžišť válců a pevně zvolený průvodič r . Úhel δ je roven součtu úhlu ψ otočení válce W vůči pevnému svislému

Obrázek 6: Určení \vec{v}_1



směru a úhlu χ , neboť úhly δ a ψ jsou měřeny po směru chodu hodinových ručiček a úhel χ proti němu, tj.

$$\delta = \psi + \chi. \quad (4.47)$$

Vidíme, že rozdíl mezi δ a ψ by vymizel, kdyby se váleček W pohyboval po rovině.

Představíme-li si, že v čase t_0 bylo $\delta = \psi = \beta = \chi = 0$ a v čase t_1 nastává situace zakreslená na obrázku (6), pak bod na obvodu válečku W urazil dráhu o délce $r\delta$. Protože uvnitř válce V malý váleček neprokluzuje, můžeme tuto délku současně odměřovat také na vnitřním obvodu válce V , kde je rovna $R(\beta + \chi)$, a tedy

$$r\delta = R(\beta + \chi). \quad (4.48)$$

Z rovnic (47) a (48) dostáváme pro úhel χ vyjádření

$$\chi = \frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta. \quad (4.49)$$

Z významu úhlu χ vyplývá, že

$$|\vec{v}_1| = |(R-r)\dot{\chi}|,$$

přičemž pro $\dot{\chi} > 0$ směřuje vektor \vec{v}_1 vpravo a pro $\dot{\chi} < 0$ vlevo. Ve složkách platí

$$\dot{x}_1 = (R - r)\dot{\chi} \cos \chi,$$

$$\dot{z}_1 = (R - r)\dot{\chi} \sin \chi.$$

Podle (49) je $(R - r)\dot{\chi} = r\dot{\psi} - R\dot{\beta}$ a tedy podle (46) je

$$v_1 = r\dot{\psi} - R\dot{\beta}.$$

Nyní můžeme zapsat relativní rychlost ve tvaru

$$\vec{v}_1 = (r\dot{\psi} - R\dot{\beta}) \left[\cos \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta \right), \sin \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta \right) \right],$$

a tedy

$$\dot{x}_1 = (r\dot{\psi} - R\dot{\beta}) \cos \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta \right),$$

$$\dot{z}_1 = (r\dot{\psi} - R\dot{\beta}) \sin \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta \right),$$

což jsou již výrazy obsažené ve vazbách (42), (43). Všimněme si, že do vyjádření relativní rychlosti \vec{v}_1 nevstupuje úhel φ . Poloha válce V se totiž nakláněním podložky pod válcem nemění.

Vlastnosti neholonomní vazby

1. Protože φ je funkcí času, jsou podmínky (42), (43), (44), (45), neholonomní a nikoliv semiholonomní, jako by tomu bylo v případě, kdy je $\varphi = konst.$
2. Platí

$$\dot{x}_1 \equiv \dot{x} - \dot{X} = (r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{C}, \quad (4.50)$$

$$\dot{z}_1 \equiv \dot{z} - \dot{Z} = (r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{S}, \quad (4.51)$$

což jsou dvě semiholonomní vazby, jimž odpovídají vazby holonomní:

$$x_1 \equiv x - X = (R - r)\bar{S}, \quad (4.52)$$

$$z_1 \equiv z - Z = -(R - r)\bar{C}. \quad (4.53)$$

Odtud dostáváme

$$(x - X)^2 + (z - Z)^2 = (R - r)^2,$$

což je rovnice kružnice v rovině xz se středem (X, Z) a poloměrem $R - r$. Kombinací neholonomních vazeb (42), (43), (44), (45) tedy dostáváme semiholonomní vazby, které zaručují, že vzdálenost těžišť obou válců je konstantní a rovná se $R - r$.

3. Speciální případy \vec{v}_1 :

(a) Váleček W se nebude vůči válci V pohybovat ($\vec{v}_1 = \vec{0}$) právě tehdy, když $r\dot{\psi} = R\dot{\beta}$, tj. obvodové rychlosti obou válců budou shodné. Válec W se valí „na dně“ válce V .

(b) Nebude-li se válec V otáčet ($\dot{\beta} = 0$), bude

$$\vec{v}_1 = r\dot{\psi}(\cos \chi, \sin \chi).$$

(c) Bude-li válec W nalepen uvnitř válce V , který se otáčí s úhlovou rychlostí $\dot{\beta}$, pak pro úhlovou rychlost válečku W platí $\dot{\psi} = \dot{\beta}$, $\chi = -\beta$ a dostáváme $v_1 = -(R - r)\dot{\beta}$. Máme tedy

$$\vec{v}_1 = (R - r)\dot{\beta}(-\cos \beta, \sin \beta),$$

což je obvodová rychlost bodu na kružnici o poloměru $R - r$, která se otáčí úhlovou rychlostí $\dot{\beta}$.

Vazby (42), (43), (44), (45) jsou uvedeny v normálním tvaru a můžeme je přepsat do standardní podoby:

$$\begin{aligned} f^1 &\equiv \dot{x} - (r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{C} - R\dot{\beta} \cos \varphi = 0, \\ f^2 &\equiv \dot{z} - (r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{S} - R\dot{\beta} \sin \varphi = 0, \\ f^3 &\equiv \dot{X} - R\dot{\beta} \cos \varphi = 0, \\ f^4 &\equiv \dot{Z} - R\dot{\beta} \sin \varphi = 0. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Soubor těchto vazebních podmínek zadává vazební podvarietu Q , $\dim Q = 9$, neboť je splněna podmínka (3.2).

Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný nevázanému systému $[\alpha]$ a vazbě Q je reprezentován 2-formou

$$\begin{aligned} \alpha_Q &= \bar{A}_1\omega^1 \wedge dt + \bar{A}_2\omega^2 \wedge dt + \bar{B}_{11}\omega^1 \wedge d\dot{\psi} + \bar{B}_{22}\omega^2 \wedge d\dot{\beta} \\ &\quad + \bar{B}_{12}\omega^1 \wedge d\dot{\beta} + \bar{B}_{21}\omega^2 \wedge d\dot{\psi}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

redukované rovnice jsou tvaru:

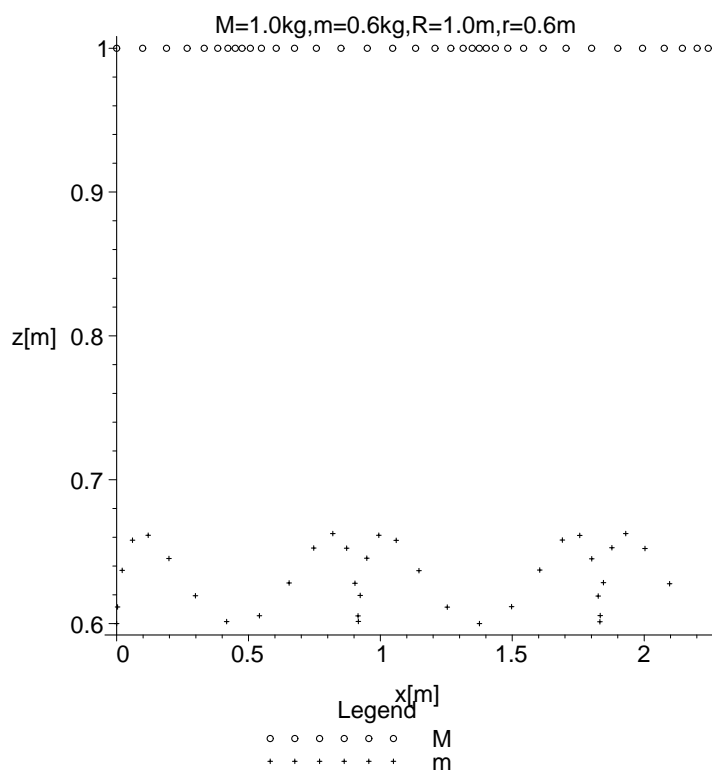
$$\begin{aligned}
 (\bar{A}_1 + \bar{B}_{11}\ddot{\psi} + \bar{B}_{12}\ddot{\beta}) \circ J^2\bar{\gamma} &= 0, \\
 (\bar{A}_2 + \bar{B}_{22}\ddot{\beta} + \bar{B}_{21}\ddot{\psi}) \circ J^2\bar{\gamma} &= 0, \\
 \dot{x} &= D\bar{C} + R\dot{\beta} \cos \varphi, \\
 \dot{z} &= D\bar{S} + R\dot{\beta} \sin \varphi, \\
 \dot{X} &= R\dot{\beta} \cos \varphi, \\
 \dot{Z} &= R\dot{\beta} \sin \varphi,
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_1 &= -mgr\bar{S} - mrR\dot{\varphi}\dot{\beta}S, \\
 \bar{A}_2 &= mgR\bar{S} - (M+m)gR \sin \varphi + mS \left[\frac{R}{R-r}D^2 + R^2\dot{\varphi}\dot{\beta} \right], \\
 \bar{B}_{11} &= -mr^2 - J_m, \\
 \bar{B}_{22} &= -MR^2 - J_M - 2mR^2(1-C), \\
 \bar{B}_{12} &= \bar{B}_{21} = mrR(1-C), \\
 D &= r\dot{\psi} - R\dot{\beta}, \\
 C &= \cos \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta - \varphi \right), \\
 S &= \sin \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta - \varphi \right), \\
 \bar{C} &= \cos \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta \right), \\
 \bar{S} &= \sin \left(\frac{r}{R-r}\psi - \frac{R}{R-r}\beta \right).
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Redukované rovnice nemají analytické řešení.

Obrázek 7: Numerické řešení: pohyb těžišť válců pro $\varphi(t) = 0$



Numerické řešení vázaného systému obdržíme pro konkrétní počáteční podmínky, které zadávají:

$$\beta(0), \psi(0), x(0), z(0), X(0), Z(0), \dot{\beta}(0), \dot{\psi}(0).$$

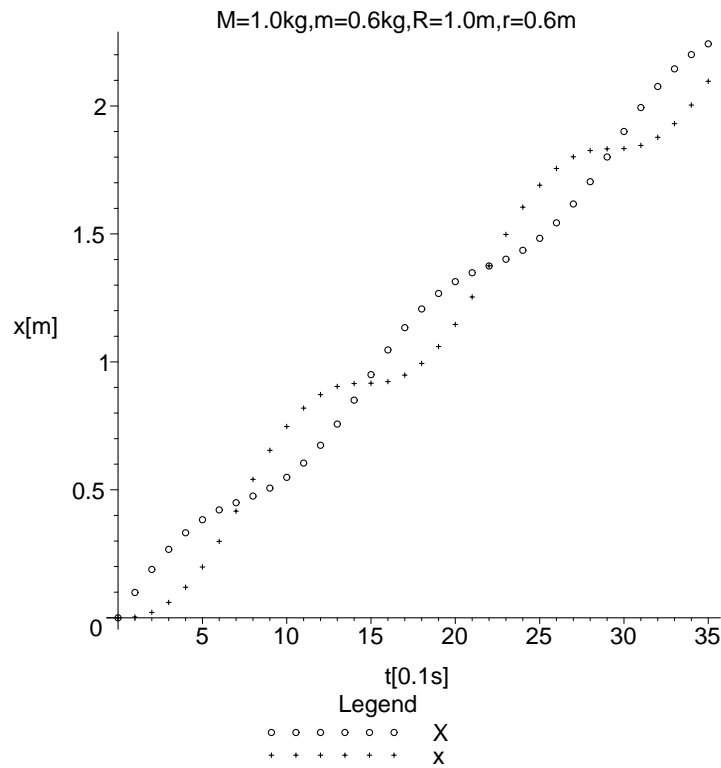
Samy počáteční podmínky musí být zadány v souladu se zadáním příkladu tj. poloha těžiště malého válečku musí být zadána tak, že váleček W leží na vnitřní ploše válce V . To zajistíme, pokud za $x(0), z(0)$ dosadíme z rovnic

$$\begin{aligned} x(0) &= X(0) + (R - r) \sin \chi(0), \\ z(0) &= Z(0) - (R - r) \cos \chi(0), \end{aligned} \quad (4.58)$$

kde $\chi(0)$ je úhel χ v čase $t = 0$ s.

Nalezněme numerické řešení vázaného systému charakterizovaného parametry $M = 1.0$ kg, $m = 0.6$ kg, $R = 1.0$ m, $r = 0.6$ m.

Obrázek 8: Numerické řešení $X(t)$ a $x(t)$ pro $\varphi(t) = 0$



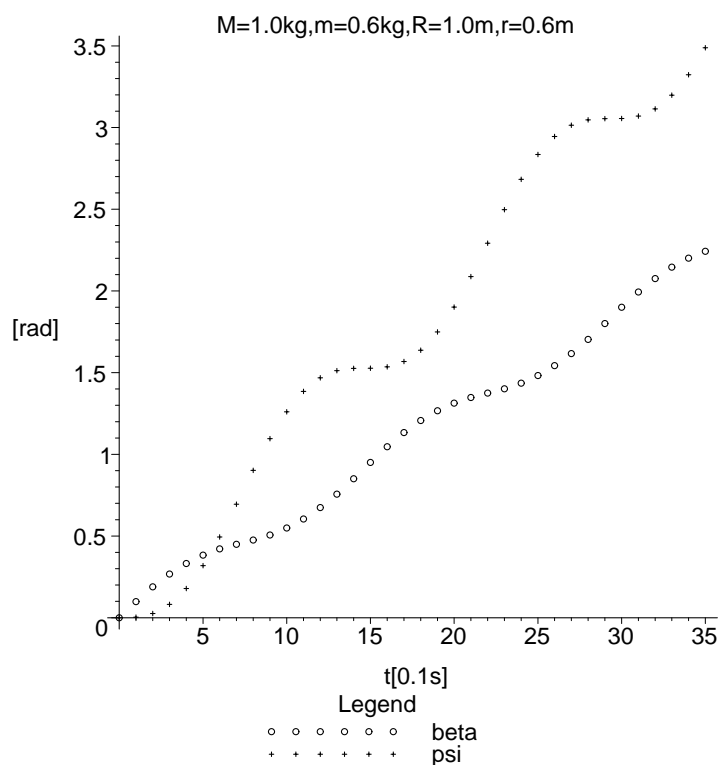
Volíme počáteční podmínky ($\chi(0) = 0$):

$$\begin{aligned} z(0) &= r, Z(0) = R, x(0) = X(0) = 0 \text{ m}, \\ \psi(0) = \beta(0) &= 0, \dot{\psi}(0) = 0 \text{ s}^{-1}, \dot{\beta}(0) = 1 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (4.59)$$

a funkci $\varphi = 0$ resp. $\varphi = -\pi/10t$. Počáteční podmínky (59) popisují situaci, kdy váleček W je položen "na dně" uvnitř válce V a v okamžiku $t = 0$ s je válci V udělena počáteční úhlová rychlost.

Numerická řešení byla získána v programu Maple. Nejprve jsme řešili příklad pro funkci $\varphi(t) = 0$. Válec V se pohybuje po pevné vodorovné podložce, takže nastává semiholonomní případ vazby Q . Řešení vázaného systému je vyneseno v grafech na obrázcích 8, 9 a 10. Na obrázku 8 resp. 9 je zobrazen časový vývoj x -ových resp. z -ových souřadnic polohy těžišť válců. Vidíme, že ve směru

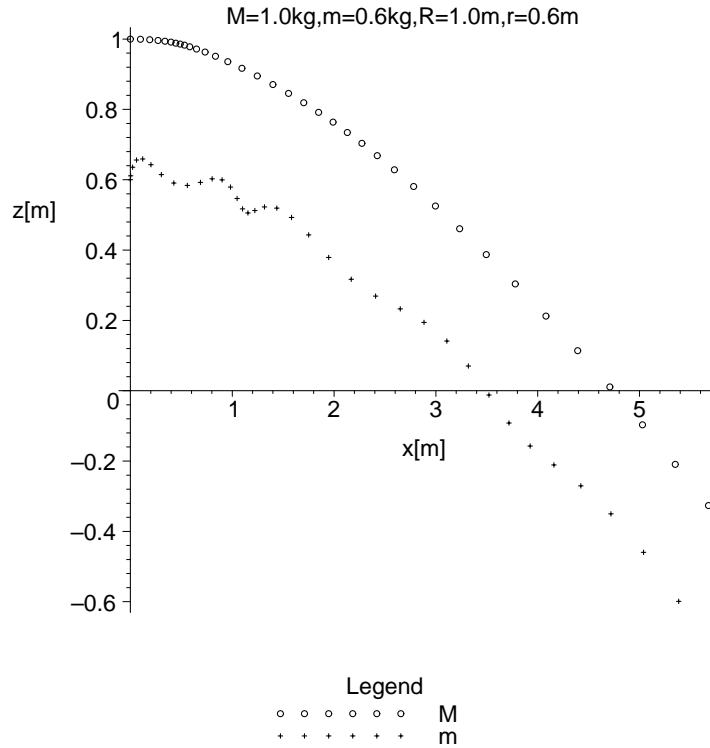
Obrázek 10: Numerické řešení $\beta(t)$ a $\psi(t)$ pro $\varphi(t) = 0$



rázcích 12, 13 a 14 vidíme numerické řešení vázaného systému. Podobně jako v předchozím případě jsou vyneseny x -ové a z -ové souřadnice těžišť válců do společných grafů na obrázcích 12 a 13.

V grafu na obrázku 14 vidíme časový vývoj celkového otočení válců, tj. průběh funkcí $\beta(t)$ a $\psi(t)$. Na obrázku 11 jsou v časovém intervalu $t \in [0\text{s}, 3.5\text{s}]$ vyneseny body trajektorie těžišť válců v okamžicích vzdálených o 0.1 s. Vidíme, že na počátku pohybu malého válečku dochází k zákmitům, které jsou s postupujícím časem a tedy zvětšujícím se sklonem podložky, stále méně patrné. Z rostoucích vzdáleností bodů představujících polohu těžiště válce V v závěrečné části trajektorie můžeme usuzovat na zrychlený pohyb válce V , což odpovídá představě valení se s kopce. Malý váleček s postupujícím časem koná stále menší zákmity a rovněž se valí s kopce.

Obrázek 11: Numerické řešení, pohyb těžišť válců pro $\varphi(t) = -t/10$

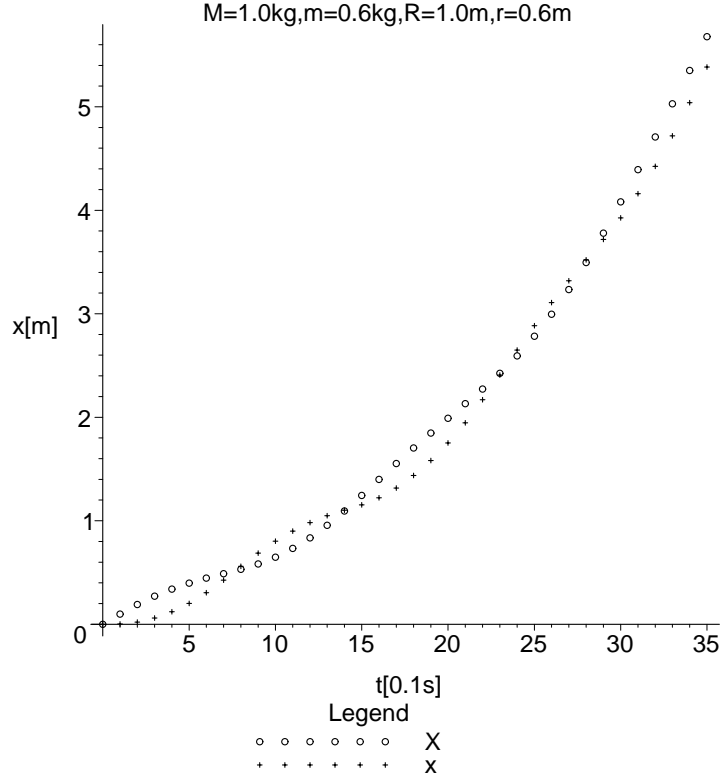


Variačnost vázaného systému. Vázaný mechanický systém $[\alpha_Q]$ je variační. Příslušná vazební Lepageova 1-forma má tvar

$$\eta = \bar{L}dt + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\psi}} \omega^1 + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\beta}} \omega^2 + \bar{L}_1 \bar{\varphi}^1 + \bar{L}_2 \bar{\varphi}^2 + \bar{L}_3 \bar{\varphi}^3 + \bar{L}_4 \bar{\varphi}^4,$$

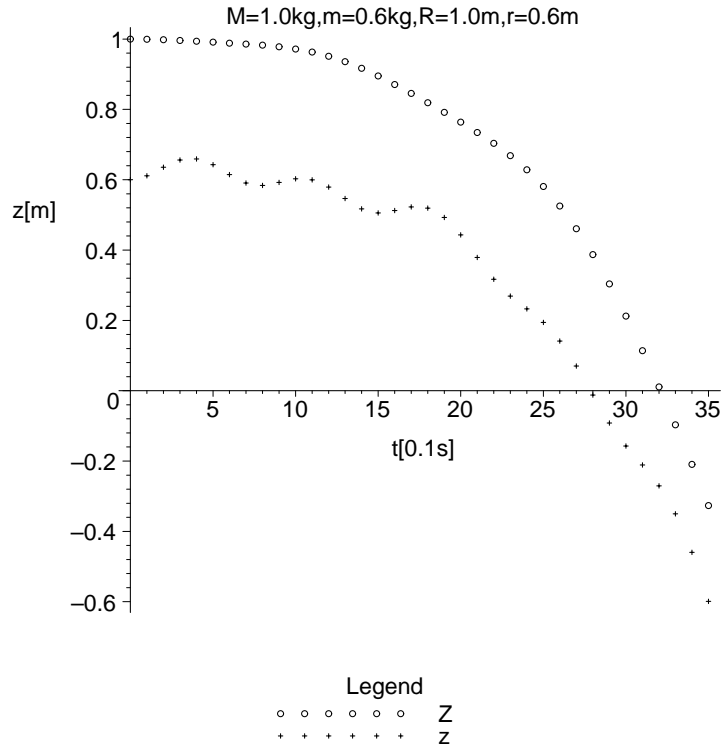
kde $\bar{\varphi}^i$, $1 \leq i \leq 4$ jsou kanonické vazební 1-formy. Funkce \bar{L} , \bar{L}_i mohou být podle (3.97) tvaru:

Obrázek 12: Numerické řešení $X(t)$ a $x(t)$ pro $\varphi(t) = -t/10$



$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{2}m \left(((r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{C} + R\dot{\beta} \cos \varphi)^2 + ((r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{S} + R\dot{\beta} \sin \varphi)^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}M \left((R\dot{\beta} \cos \varphi)^2 + (R\dot{\beta} \sin \varphi)^2 \right) + \frac{1}{2}J_m\dot{\psi}^2 + J_M\dot{\beta}^2 - mgz - MgZ, \\ \bar{L}_1 &= m(r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{C} + mR\dot{\beta} \cos \varphi, \\ \bar{L}_2 &= m(r\dot{\psi} - R\dot{\beta})\bar{S} + mR\dot{\beta} \sin \varphi, \\ \bar{L}_3 &= MR\dot{\beta} \cos \varphi, \\ \bar{L}_4 &= MR\dot{\beta} \sin \varphi. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Obrázek 13: Numerické řešení $Z(t)$ a $z(t)$ pro $\varphi(t) = -t/10$

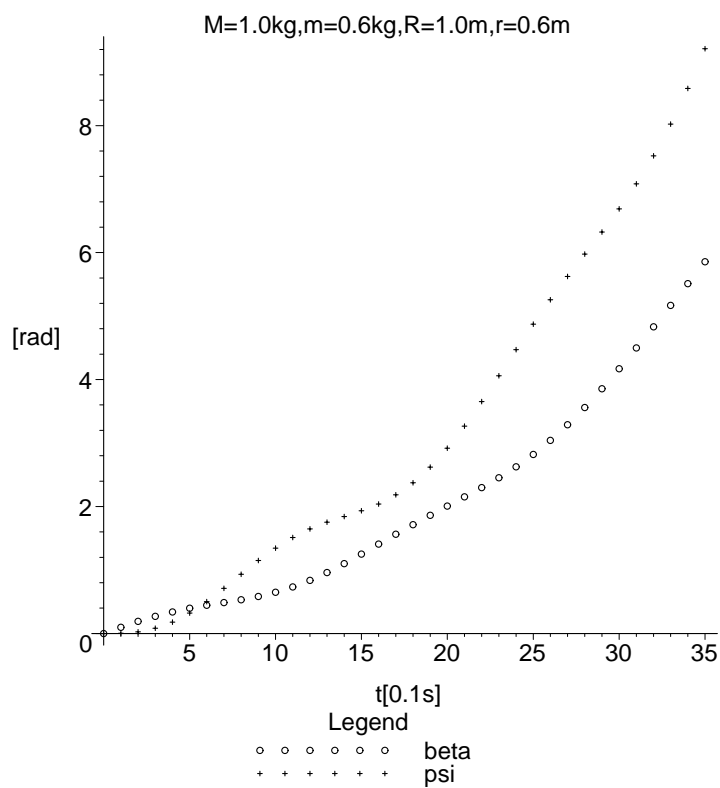


Deformované rovnice. Chetaevova vazební síla má pro neholonomní vazby (54) tvar

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4, \\
 \Phi_1 &= \mu_1(-r\bar{C}, R\bar{C} - R\cos\varphi, 1, 0, 0, 0) \\
 \Phi_2 &= \mu_2(-r\bar{S}, R\bar{S} - R\sin\varphi, 0, 1, 0, 0) \\
 \Phi_3 &= \mu_3(0, -R\cos\varphi, 0, 0, 1, 0) \\
 \Phi_4 &= \mu_4(0, -R\sin\varphi, 0, 0, 0, 1)
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

kde $\mu = \mu(t, \psi, \beta, x, z, X, Z, \dot{\psi}, \dot{\beta}, \dot{x}, \dot{z}, \dot{X}, \dot{Z})$.

Obrázek 14: Numerické řešení β a ψ pro $\varphi(t) = -t/10$



Deformované rovnice jsou

$$\begin{aligned}
 -J_m \ddot{\psi} + \mu_1 r \bar{C} + \mu_2 r \bar{S} &= 0, \\
 -J_M \ddot{\beta} - \mu_1 [R \bar{C} - R \cos \varphi] - \\
 -\mu_2 [R \bar{S} - R \sin \varphi] + \mu_3 R \cos \varphi + \mu_4 R \sin \varphi &= 0, \\
 -m \ddot{x} - \mu_1 &= 0, \\
 -m \ddot{z} - mg - \mu_2 &= 0, \\
 -M \ddot{X} - \mu_3 &= 0, \\
 -M \ddot{Z} - Mg - \mu_4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Nalezneme fyzikální význam Chetaevovy vazební síly vystupující v deformačních rovnicích (62). Podívejme se na příklad fyzikálně a formulujme impulsové věty.

Nechť (x, y, z) jsou souřadnice v R^3 . Souřadnice x, z mají nezměněný význam, popisují polohu těžiště malého válečku v rovině xz , souřadnice y je třetí kartézskou souřadnicí. Obdobně použijeme souřadnice (X, Y, Z) v R^3 pro popis polohy těžiště válce V a nadále budeme používat úhly ψ a β definované výše. Soustavu souřadnic volíme pravotočivou.

V místě dotyku malého válečku W s válcem V vznikají síly vzájemného působení válců. Jde o tlakovou sílu a sílu statického tření. Označme \vec{N} výslednici těchto sil působící na váleček W a $-\vec{N}$ reakci, která působí na válec V . Složky těchto sil jsou

$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_z), \quad -\vec{N} = (-N_x, -N_y, -N_z).$$

Na válec V navíc působí v místě dotyku s podložkou tlaková síla podložky a síla statického tření, jejichž výslednice je $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$. Protože ani jeden z válců se nepohybuje ve směru osy y , vyplývá ze silové rovnováhy, že $N_y = 0$, $P_y = 0$. Moment síly \vec{N} vzhledem k těžišti válce W je \vec{M}_W a moment síly $-\vec{N}$ vzhledem k těžišti válce V je \vec{M}_{V1} . Moment síly \vec{P} vzhledem k těžišti válce V označme \vec{M}_{V2} . Na válec V (vzhledem k jeho těžišti) působí celkový moment $\vec{M}_V = \vec{M}_{V1} + \vec{M}_{V2}$

Označme \vec{r} resp. \vec{R}_1 rameno síly \vec{N} resp. $-\vec{N}$. Platí $\vec{r} = r(\bar{S}, 0, -\bar{C})$, $\vec{R}_1 = R(\bar{S}, 0, -\bar{C})$ a můžeme psát

$$\vec{M}_W = \vec{r} \times \vec{N} = r(\bar{C}N_y, -\bar{C}N_x - \bar{S}N_z, \bar{S}N_y) = r(0, -\bar{C}N_x - \bar{S}N_z, 0) \quad (4.63)$$

$$\vec{M}_{V1} = -\vec{R}_1 \times \vec{N} = -R(\bar{C}N_y, -\bar{C}N_x - \bar{S}N_z, \bar{S}N_y) = -R(0, -\bar{C}N_x - \bar{S}N_z, 0).$$

Poznamenejme, že síly vzájemného působení působí podél celé povrchové úsečky styku válců. V případě, kdy jsou válce homogenní, můžeme nahradit sumu momentů jednotlivých sil jediným momentem výslednice sil vzájemného působení \vec{N} resp. $-\vec{N}$. Totéž platí pro síly vzájemného působení podložky a válce V .

Označme \vec{R}_2 rameno síly \vec{P} . Platí $\vec{R}_2 = R(\sin \varphi, 0, -\cos \varphi)$ a

$$\begin{aligned} \vec{M}_{V2} &= \vec{R}_2 \times \vec{P} = R(P_y \cos \varphi, -P_x \cos \varphi - P_z \sin \varphi, P_y \sin \varphi) = \\ &= R(0, -P_x \cos \varphi - P_z \sin \varphi, 0). \end{aligned}$$

Celkový moment sil působící na válec V je tedy

$$\vec{M}_V = R(0, \bar{C}N_x + \bar{S}N_z - P_x \cos \varphi - P_z \sin \varphi, 0). \quad (4.64)$$

Označme

$$M_W = -r(\bar{C}N_x + \bar{S}N_z), \quad (4.65)$$

$$M_V = R(\bar{C}N_x + \bar{S}N_z - P_x \cos \varphi - P_z \sin \varphi). \quad (4.66)$$

Z (63) a (64) vidíme, že $\vec{M}_W = (0, M_W, 0)$ a $\vec{M}_V = (0, M_V, 0)$, což jsou momenty síly, které způsobují rotaci válců kolem osy rovnoběžné s osou y a procházející těžištěm příslušného válce.

Uvažujeme-li tlakové a třecí síly vznikající ve styčných bodech s podložkou, mají pohybové rovnice systému tvar

$$\begin{aligned} -J_m \ddot{\psi} - r(\bar{C}N_x + \bar{S}N_z) &= 0, \\ -J_M \ddot{\beta} + R(\bar{C}N_x + \bar{S}N_z - P_x \cos \varphi - P_z \sin \varphi) &= 0, \\ -m\ddot{x} + N_x &= 0, \\ -m\ddot{y} &= 0, \\ -m\ddot{z} - mg + N_z &= 0, \\ -M\ddot{X} - N_x + P_x &= 0, \\ -M\ddot{Y} &= 0, \\ -M\ddot{Z} - Mg - N_z + P_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Tento systém pohybových rovnic popisuje pohyb válečku W uvnitř válce V bez jakýchkoliv dodatečných podmínek kladených na pohyb. Vidíme, že složky sil \vec{N} , $-\vec{N}$, \vec{P} vystupující v pohybových rovnicích jsou neurčeny (v rovnicích vystupují jako neznámé). Systém pohybových rovnic (67) je třeba doplnit vazebními podmínkami (54), které zajišťují neprokluzování válců při rotačním pohybu. Přidáme počáteční podmínky:

$$y(0) = konst_1, Y(0) = konst_2, \dot{y}(0) = \dot{Y}(0) = 0, \quad (4.68)$$

které zajistí, že válce se nepohybují smykem ve směru osy y . Systém pohybových rovnic (67) můžeme nyní zredukovat na šest rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned} -J_m \ddot{\psi} - r(\bar{C}N_x + \bar{S}N_z) &= 0, \\ -J_M \ddot{\beta} + R(\bar{C}N_x + \bar{S}N_z - P_x \cos \varphi - P_z \sin \varphi) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-m\ddot{x} + N_x &= 0, \\
-m\ddot{z} - mg + N_z &= 0, \\
-M\ddot{X} - N_x + P_x &= 0, \\
-M\ddot{Z} - Mg - N_z + P_z &= 0,
\end{aligned} \tag{4.69}$$

a čtyři neholonomní vazby (54) pro deset neznámých funkcí

$$(\psi, \beta, x, z, X, Z, N_x, N_z, P_x, P_z).$$

Porovnáme-li systém (69) se systémem deformovaných rovnic (62) vidíme, že můžeme psát

$$\mu_1 = -N_x, \mu_2 = -N_z, \mu_3 = N_x - P_x, \mu_4 = N_z - P_z. \tag{4.70}$$

Chetaevova vazební síla (61) má po dosazení multiplikátorů (70) s využitím označení (65), (66) tvar

$$\Phi = -(M_W, M_V, N_x, N_z, P_x - N_x, P_z - N_z). \tag{4.71}$$

Má tedy význam fyzikálních sil a momentů vznikajících v místě dotyku válce V s podložkou a válců navzájem.

4.2 Nevariační systém podrobený neholonomní vazbě

V minulé kapitole jsme demonstrovali na příkladech, že variační systém podrobený neholonomní vazbě je variační také ve vázaném smyslu. Vázaný systém, který vznikl přidáním neholonomní vazby k nevariačnímu systému, může být jak variační tak nevariační.

Typickým fyzikálním nevariačním nevázaným systémem je systém, ve kterém se nezanedbají síly odporu okolního prostředí. Věnujme se proto v této kapitole příkladům, ve kterých uvažujeme mechanické systémy v odporujícím prostředí, kde sílu odporujícího prostředí reprezentuje Stokesova síla. Budeme hledat takové vazby, které převedou nevariační nevázaný systém na variační vázaný.

Podkladová fibrovaná varieta je v následujících příkladech stejná: $X \equiv \mathbb{R}$, $Y \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, souřadnice na bázi X značme standardně $\varphi = (t)$, fibrované souřadnice na Y $\psi = (t, x, y)$ a asociované fibrované souřadnice na J^1Y značme $\psi^1 = (t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Stokesova síla má v asociovaných fibrovaných souřadnicích na J^1Y složky $\vec{F}_S = -\beta(\dot{x}, \dot{y})$, kde $\beta > 0$. Budeme užívat kontaktní 1-formy

$$\omega^1 = dx - \dot{x}dt, \quad \omega^2 = dy - \dot{y}dt.$$

4.2.1 Neholonomní vazba: zachování mechanické energie

Neholonomní vazbou, která převede nevariační nevázaný mechanický systém popsaný výše na variační vázaný, je například požadavek zachování mechanické energie systému. V následujících příkladech se budeme zajímat o tvar Chetaevovy vazební síly a dále o vlastnosti variačního vázaného systému.

Hmotný bod v odporujícím prostředí. Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje v odporujícím prostředí. Nevázaný systém $[\alpha]$ je nevariační, je reprezentován Lepageovou 2-formou

$$\alpha = \beta\dot{x}\omega^1 \wedge dt + \beta\dot{y}\omega^2 \wedge dt + m(\omega^1 \wedge d\dot{x} + \omega^2 \wedge d\dot{y}) \quad (4.72)$$

a dynamickou formou

$$E = (m\ddot{x} + \beta\dot{x})\omega^1 \wedge dt + (m\ddot{y} + \beta\dot{y})\omega^2 \wedge dt.$$

Pohybové rovnice nevázaného systému mají tvar

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0, \quad m\ddot{y} + \beta\dot{y} = 0. \quad (4.73)$$

Podrobme nevázaný systém vazbě

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E_0, \quad (4.74)$$

kteřá požaduje, aby se celková mechanická energie systému zachovávala. Normální tvar vazby je

$$\dot{y} = g^1(\dot{x}) = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \dot{x}^2}.$$

Neholonomní vazba (78) definuje vazební podvarietu Q , $\dim Q = 4$. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný nevázanému systému $[\alpha]$ reprezentuje forma

$$\alpha_Q = \frac{2E_0}{\frac{2E_0}{m} - \dot{x}^2} \omega^1 \wedge d\dot{x}. \quad (4.75)$$

Redukované rovnice jsou tvaru

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \dot{x}^2}, \quad \ddot{x} \frac{2E_0}{(g^1)^2} = 0. \quad (4.76)$$

Vidíme, že řešením redukovaných rovnic je

$$x = v_{0x}t + x_0, y = t\sqrt{\frac{2E_0}{m} - v_{0x}^2} + y_0, \quad (4.77)$$

kde v_{0x} , x_0 , y_0 jsou konstanty. Řešení (77) představuje pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí $\vec{v} = (v_{0x}, \sqrt{2E_0/m - v_{0x}^2})$. Jde tedy o řešení shodné s řešením pohybových rovnic volného hmotného bodu s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x} = v_{0x}$, $\dot{y} = \sqrt{2E_0/m - v_{0x}^2}$.

Vazební podmínku (78) přepíšeme do tvaru

$$f^1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - E_0 = 0. \quad (4.78)$$

Chetaevova vazební síla je

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial f^1}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f^1}{\partial \dot{y}} \right) = \mu(m\dot{x}, m\dot{y}),$$

kde μ je funkce na Q . Zavedením Chetaevovy vazební síly do nevázaných rovnic dostáváme deformované pohybové rovnice:

$$m\ddot{x} + (\beta - m\mu)\dot{x} = 0, \quad m\ddot{y} + (\beta - m\mu)\dot{y} = 0. \quad (4.79)$$

Po dosazení řešení (77) do deformovaných rovnic dostáváme vztah $\mu = \frac{\beta}{m}$ a Chetaeova vazební síla má tvar

$$\Phi = \beta(\dot{x}, \dot{y}), \quad (4.80)$$

což znamená, že kompenzuje odporující sílu prostředí. Vázaný mechanický systém je variační. Lepageova vazební 1-forma není pro variační vázaný systém dána jednoznačně. Uvádíme tři vazební Lepageovy 1-formy reprezentující systém $[\alpha_Q]$:

$$\begin{aligned} \eta_A &= -mg^1 \bar{\varphi}^1, \\ \eta_B &= \frac{1}{2}C \frac{2E_0}{m} \dot{x}^2 dt + C \frac{2E_0}{m} \dot{x} \omega^1 - (mg^1 + C(g^1)^3) \bar{\varphi}^1, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \eta_C &= \left(-E_0 \ln(g^1)^2 + \sqrt{\frac{E_0 m}{2}} \dot{x} \ln \frac{\sqrt{\frac{2E_0}{m}} - \dot{x}}{\sqrt{\frac{2E_0}{m}} + \dot{x}} \right) dt + \\ &\quad + \left(\sqrt{\frac{E_0 m}{2}} \ln \frac{\sqrt{\frac{2E_0}{m}} - \dot{x}}{\sqrt{\frac{2E_0}{m}} + \dot{x}} \right) \omega^1. \end{aligned}$$

Vidíme, že u formy $\bar{\eta}_A$ je $\bar{L}_1 \neq 0$, $\bar{L} = 0$, zatímco u formy $\bar{\eta}_C$ je tomu právě naopak a vazební Lepageova 1-forma $\bar{\eta}_B$ je zadána nenulovými funkcemi \bar{L} , \bar{L}_1 . Není však pravidlem, že by bylo možno u každého variačního vázaného systému najít vazební Lepageovu 1-formu s libovolnou kombinací nulových a nenulových funkcí \bar{L} a \bar{L}_i , což uvidíme v následujícím příkladě.

Hmotný bod v odporujícím prostředí v tíhovém poli Země. Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje v tíhovém poli Země s tíhovým zrychlením $\vec{G} = (G, 0)$. Nulovou hladinu potenciální energie volíme $x = 0$. Uvažujeme odpor prostředí. Nevázaný systém $[\alpha]$ je nevariační, je reprezentován Lepageovou 2-formou

$$\alpha = (\beta\dot{x} - mG)\omega^1 \wedge dt + \beta\dot{y}\omega^2 \wedge dt + m(\omega^1 \wedge d\dot{x} + \omega^2 \wedge d\dot{y}). \quad (4.82)$$

Dynamická forma reprezentující nevázaný systém je

$$E = (m\ddot{x} + \beta\dot{x} - mG)\omega^1 \wedge dt + (m\ddot{y} + \beta\dot{y})\omega^2 \wedge dt.$$

Pohybové rovnice nevázaného systému:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} - mG = 0, \quad m\ddot{y} + \beta\dot{y} = 0. \quad (4.83)$$

Podrobme systém vazbě

$$E_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mGx \quad (4.84)$$

tj.

$$\dot{y} = g^1(\dot{x}) = \sqrt{\frac{2E_0}{m} + 2Gx - \dot{x}^2}.$$

vyjadřující opět zákon zachování mechanické energie. Neholonomní vazba (84) definuje vazební podvarietu Q , $\dim Q = 4$. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný nevázanému systému $[\alpha]$ reprezentuje forma

$$\alpha_Q = -mG \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) \omega^1 \wedge dt + m \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) \omega^1 \wedge d\dot{x}. \quad (4.85)$$

Redukované pohybové rovnice jsou

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} + 2Gx - \dot{x}^2}, \quad m\ddot{x} \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) - mG \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) = 0. \quad (4.86)$$

Řešením redukovaných rovnic dostáváme

$$x = \frac{1}{2}Gt^2 + v_{0x}t + x_0, \quad y = t \sqrt{\frac{2E_0}{m} + 2Gx_0 - v_{0x}^2} + y_0, \quad (4.87)$$

kde v_{0x} , x_0 , y_0 jsou konstanty. Řešením vázaného systému $[\alpha_Q]$ je tedy vrh šikmý v prostředí bez tření s počáteční rychlostí

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, \sqrt{2E_0/m + 2Gx_0 - v_{0x}^2}) = 0.$$

Zapišeme-li vazební podmínku (84) ve tvaru

$$f^1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mGx - E_0 = 0,$$

pak Chetaeova vazební síla má tvar $\Phi = \mu(m\dot{x}, m\dot{y})$, kde μ je funkce na Q . Dostáváme deformované pohybové rovnice v podobě:

$$m\ddot{x} + (\beta - m\mu)\dot{x} - mG = 0, \quad m\ddot{y} + (\beta - m\mu)\dot{y} = 0. \quad (4.88)$$

Po dosazení řešení vázaného systému do deformovaných rovnic dostáváme: $\mu = \frac{\beta}{m}$ a Chetaeova vazební síla má tvar

$$\Phi = \beta(\dot{x}, \dot{y}), \quad (4.89)$$

což znamená, že kompenzuje sílu odporujícího prostředí.

Vázaný mechanický systém je variační a vazební Lepageovu 1-formu můžeme nalézt například ve tvaru:

$$\eta = -2mGx dt - m\sqrt{\frac{2E_0}{m} - \dot{x}^2 + 2Gx} \bar{\varphi}^1, \quad (4.90)$$

ve kterém $\bar{L}_1 \neq 0$ a $\bar{L} \neq 0$. Pokusme se nalézt vazební Lepageovu 1-formu takovou, že pro ni $\bar{L}_1=0$. Z rovnic (3.94), (3.95) dostáváme podmínky pro funkci \bar{L} :

$$m \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2} \right) = -\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{x}^2} \quad (4.91)$$

$$-mG \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}}. \quad (4.92)$$

Tyto podmínky však nemají žádné řešení a proto nemůžeme nalézt vazební Lepageovu 1-formu s nulovou funkcí \bar{L}_1 . Obdobně zjistíme, že pro daný systém neexistuje vazební Lepageova 1-forma, pro kterou $\bar{L} = 0$. Ačkoliv tedy vazební Lepageova 1-forma není zadána pro daný vázaný variační systém jednoznačně, existují v jednotlivých případech určitá omezení na její možné vyjádření.

Tlumený harmonický oscilátor. Hmotný bod o hmotnosti m kmitá okolo rovnovážné polohy v odporujícím prostředí. Působí na něj pružná síla $F = -k(x, y)$ a síla odporujícího prostředí $F_S = -\beta(\dot{x}, \dot{y})$, $k > 0$, $\beta > 0$. Nevázaný systém $[\alpha]$ je nevariační, je reprezentován Lepageovou 2-formou

$$\alpha = (\beta\dot{x} + kx)\omega^1 \wedge dt + (\beta\dot{y} + ky)\omega^2 \wedge dt + m(\omega^1 \wedge d\dot{x} + \omega^2 \wedge d\dot{y}). \quad (4.93)$$

Dynamická forma reprezentující nevázaný systém je

$$E = (m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx)\omega^1 \wedge dt + (m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky)\omega^2 \wedge dt.$$

Pohybové rovnice nevázaného systému jsou:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0,$$

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky = 0.$$

Uvažujme neholonomní vazbu

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) = E_0, \quad (4.94)$$

tj.

$$\dot{y} = g^1(\dot{x}) = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m}(x^2 + y^2) - \dot{x}^2},$$

která definuje vazební podvarietu Q , $\dim Q = 4$. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný nevázanému systému $[\alpha]$ reprezentuje forma:

$$\alpha_Q = kx \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) \omega^1 \wedge dt + m \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) \omega^1 \wedge d\dot{x}. \quad (4.95)$$

Redukované pohybové rovnice jsou

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m}(x^2 + y^2) - \dot{x}^2}, \\ m\ddot{x} \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) + kx \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení redukovaného systému pro počáteční podmínky $x(0) = A$, $y(0) = \sqrt{\frac{2E_0}{k} - A^2}$, $\dot{x}(0) = 0$ je:

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad y = \sqrt{\frac{2E_0}{k} - A^2} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad (4.96)$$

což jsou rovnice pro netlumený harmonický oscilátor v rovině xy . Chetaevova vazební síla má pro neholonomní vazbu (94) ve tvaru

$$f^1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) - E_0 = 0$$

stejný tvar jako v předchozích dvou příkladech

$$\Phi = \mu(m\dot{x}, m\dot{y}), \quad (4.97)$$

kde μ je funkce na Q . Dostáváme deformované pohybové rovnice ve tvaru:

$$m\ddot{x} + (\beta - m\mu)\dot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + (\beta - m\mu)\dot{y} + ky = 0. \quad (4.98)$$

Po dosazení řešení vázaného systému do deformovaných rovnic dostáváme: $\mu = \frac{\beta}{m}$ a Chetaevova vazební síla má tvar $\Phi = \beta(\dot{x}, \dot{y})$, což znamená, že stejně jako v předchozích příkladech kompenzuje odporovou sílu prostředí.

Vázaný mechanický systém je variační a vazební Lepageovu 1-formu můžeme nalézt například ve tvaru:

$$\eta = k(x^2 + y^2) dt - m\sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m}(x^2 + y^2) - \dot{x}^2} \varphi^1.$$

V předchozích příkladech jsme viděli, že fyzikálně jasně interpretovatelnou vazbou, která převede nevariační nevázaný systém na variační vázaný systém je požadavek konstantní celkové mechanické energie systému. Příslušná Chetaevova vazební síla totiž kompenzuje odporovou sílu prostředí a řešení vázaného systému je shodné s řešením nevázaného systému zanedbávajícího tření se zadanými počátečními podmínky splňujícími vazbu. Ovšem z hlediska popisu se systémy odlišují. Vázaný systém charakterizuje vazební Lepageova 1-forma zadaná funkcemi \bar{L} a \bar{L}_1 , zatímco nevázaný systém bez tření je charakterizován jednoznačně zadaným lagranžiánem L . Informaci o lagranžiánu L již ale ve funkcích \bar{L} a \bar{L}_1 nenalezneme; jde tedy z hlediska popisu o dva odlišné mechanické systémy. Můžeme shrnout, že neholonomní vazba v podobě zachování mechanické energie aplikovaná na fyzikální systém v odporujícím prostředí převádí tento nevázaný systém na variační vázaný, který (z hlediska popisu) není totožný s nevázaným systémem bez odporu prostředí, ačkoliv časový vývoj obou systémů (pro počáteční podmínky splňující vazbu) je shodný.

4.2.2 Reonomní neholonomní vazba

Převod nevázaného nevariačního systému na vázaný variační se může uskutečnit i prostřednictvím jiných neholonomních vazeb než požadavku na zachování mechanické energie systému. Následující příklady představují právě takové vazby. Jde o matematické modely, které jsou již hůře fyzikálně interpretovatelné, nebudeme proto uvádět řešení vázaných systémů. Společným prvkem všech příkladů je explicitní závislost vazby na čase.

Hmotný bod v odporujícím prostředí. Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje v odporujícím prostředí. Nevázaný systém $[\alpha]$ je nevariační, je reprezentován Lepageovou 2-formou

$$\alpha = \beta \dot{x} \omega^1 \wedge dt + \beta \dot{y} \omega^2 \wedge dt + m(\omega^1 \wedge d\dot{x} + \omega^2 \wedge d\dot{y}) \quad (4.99)$$

a dynamickou formou

$$E = (m\ddot{x} + \beta\dot{x})\omega^1 \wedge dt + (m\ddot{y} + \beta\dot{y})\omega^2 \wedge dt.$$

Pohybové rovnice nevázaného systému mají tvar

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0, \quad m\ddot{y} + \beta\dot{y} = 0. \quad (4.100)$$

Podrobme nevázaný systém vazbě

$$f^1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \delta t^2) - A_0 = 0, \quad \delta, A_0 = konst, \quad (4.101)$$

tj.

$$\dot{y} = g^1(\dot{x}) = \sqrt{\frac{2A_0}{m} - \dot{x}^2 - \delta t^2},$$

která zadává vztah mezi kinetickou energií systému a jistou funkcí času. Neholonomní vazba (101) definuje vazební podvarietu Q , $\dim Q = 4$. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ reprezentuje forma

$$\alpha_Q = m\dot{x}\frac{\delta t}{(g^1)^2}\omega^1 \wedge dt + m\left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right)\omega^1 \wedge dx \quad (4.102)$$

a odtud redukované rovnice jsou

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2A_0}{m} - \dot{x}^2 - \delta t^2}, \quad m\ddot{x}\left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) + m\dot{x}\frac{\delta t}{(g^1)^2} = 0. \quad (4.103)$$

Z redukovaných rovnic dostáváme:

$$\dot{x} = K\sqrt{\frac{2A_0}{m} - \delta t^2}, \quad \dot{y} = \sqrt{(1 - K^2)\left(\frac{2A_0}{m} - \delta t^2\right)}, \quad (4.104)$$

kde K je konstanta. Chetaeova vazební síla je $\Phi = \mu(m\dot{x}, m\dot{y})$, kde μ je funkce na Q . Zavedením Chetaeovy vazební síly do nevázaných rovnic dostáváme deformované pohybové rovnice:

$$m\ddot{x} + (\beta - m\mu)\dot{x} = 0, \quad m\ddot{y} + (\beta - m\mu)\dot{y} = 0. \quad (4.105)$$

Po dosazení (104) do deformovaných rovnic dostáváme vztah

$$\mu = -\frac{K^2\delta t}{\dot{x}^2} + \frac{\beta}{m}$$

a Chetaevova vazební síla má tvar

$$\Phi = -m \frac{\delta t}{\sqrt{\frac{2A_0}{m} - \delta t^2}} \left(K, \sqrt{1 - K^2} \right) + \beta(\dot{x}, \dot{y}). \quad (4.106)$$

Skládá se ze složky kompenzující odporující sílu prostředí a ze složky explicitně závislé na čase. Vázaný mechanický systém je variační. Lepageova vazební 1-forma může být například tvaru

$$\eta = -m \sqrt{\frac{2A_0}{m} - \dot{x}^2 - \delta t^2} \bar{\varphi}^1. \quad (4.107)$$

Hmotný bod v odporujícím prostředí v tíhovém poli Země. Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje v tíhovém poli Země s tíhovým zrychlením $\vec{G} = (G, 0)$. Opět uvažujeme odpor prostředí. Nevázaný systém $[\alpha]$ je nevariační, je reprezentován Lepageovou 2-formou

$$\alpha = (\beta\dot{x} - mG)\omega^1 \wedge dt + \beta\dot{y}\omega^2 \wedge dt + m(\omega^1 \wedge d\dot{x} + \omega^2 \wedge d\dot{y}). \quad (4.108)$$

Dynamická forma reprezentující nevázaný systém je

$$E = (m\ddot{x} + \beta\dot{x} - mG)\omega^1 \wedge dt + (m\ddot{y} + \beta\dot{y})\omega^2 \wedge dt.$$

Pohybové rovnice nevázaného systému:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} - mG = 0, \quad m\ddot{y} + \beta\dot{y} = 0. \quad (4.109)$$

Podrobně systém vazbě

$$f^1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mGx - A_0 = 0, \quad (4.110)$$

tj.

$$\dot{y} = g^1(\dot{x}) = \sqrt{\frac{2A_0}{m} - 2Gx - \dot{x}^2},$$

která požaduje, aby se rozdíl kinetické a potenciální energie zachovával. Vazba definuje vazební podvarietu Q , $\dim Q = 4$. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný nevázanému systému $[\alpha]$ reprezentuje forma

$$\alpha_Q = -mG \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2} \right) \omega^1 \wedge dt + m \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2} \right) \omega^1 \wedge d\dot{x}. \quad (4.111)$$

Redukované pohybové rovnice jsou

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2A_0}{m} - 2Gx - \dot{x}^2}, \quad m\ddot{x} \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) - mG \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{(g^1)^2}\right) = 0. \quad (4.112)$$

Chetaevova vazební síla má tvar $\Phi = \mu(m\dot{x}, m\dot{y})$, kde μ je funkce na Q . Dostáváme deformované pohybové rovnice v podobě:

$$m\ddot{x} + (\beta - m\mu)\dot{x} - mG = 0, \quad m\ddot{y} + (\beta - m\mu)\dot{y} = 0. \quad (4.113)$$

Vyjádříme multiplikátor μ z deformovaných rovnic. Dostaneme jej ve tvaru

$$\mu = \frac{\beta}{m} - \frac{G}{\dot{x}} \left(1 - \frac{(g^1)^2 - \dot{x}^2}{(g^1)^2 + \dot{x}^2}\right)$$

a Chetaevova síla je

$$\Phi = (\beta\dot{x}, \beta\dot{y}) - \frac{mG}{\dot{x}} \left(1 - \frac{(g^1)^2 - \dot{x}^2}{(g^1)^2 + \dot{x}^2}\right) (\dot{x}, \dot{y}). \quad (4.114)$$

Skládá se tedy ze složky kompenzující tření prostředí a z další složky. Vázaný mechanický systém je variační a vazební Lepageovu 1-formu můžeme nalézt například ve tvaru:

$$\eta = -m\sqrt{\frac{2A_0}{m} - \dot{x}^2 - 2Gx} \bar{\varphi}^1. \quad (4.115)$$

Tlumený harmonický oscilátor. Hmotný bod o hmotnosti m kmitá okolo rovnovážné polohy v odporujícím prostředí. Působí na něj pružná síla $F = -k(x, y)$ a síla odporujícího prostředí $F_S = -\beta(\dot{x}, \dot{y})$, $\beta > 0$, $k > 0$. Nevázaný systém $[\alpha]$ je nevariační, je reprezentován Lepageovou 2-formou

$$\alpha = (\beta\dot{x} + kx)\omega^1 \wedge dt + (\beta\dot{y} + ky)\omega^2 \wedge dt + m(\omega^1 \wedge d\dot{x} + \omega^2 \wedge d\dot{y}).$$

Dynamická forma reprezentující nevázaný systém je

$$E = (m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx)\omega^1 \wedge dt + (m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky)\omega^2 \wedge dt.$$

Pohybové rovnice nevázaného systému jsou:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky = 0.$$

Uvažujme vazbu

$$\dot{y} = g^1(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{1 + \frac{\dot{x}}{T}},$$

kde T je konstanta. Vazba definuje vazební podvarietu Q , $\dim Q = 4$. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný nevázanému systému $[\alpha]$ reprezentuje forma

$$\alpha_Q = \left(\dot{x}(\beta + \beta P^2 - \frac{m}{T}P^3) + kx + kyP \right) \omega^1 \wedge dt + m(1 + P^2) \omega^1 \wedge d\dot{x}, \quad (4.116)$$

kde $P \equiv \frac{1}{1+\frac{t}{T}}$. Redukované rovnice jsou

$$\dot{y} = \dot{x}P, \quad m\ddot{x}(1 + P^2) + \dot{x}(\beta + \beta P^2 - \frac{m}{T}P^3) + kx + kyP = 0.$$

Chetaevova vazební síla má pro vazební podmínku

$$f^1 = \dot{y} - \frac{\dot{x}}{1 + \frac{t}{T}} = 0 \quad (4.117)$$

tvár $\Phi = \mu(-P, 1)$, kde μ je funkce na Q . Dostáváme deformované pohybové rovnice v podobě:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx + \mu P = 0, \quad m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky - \mu = 0.$$

Multiplikátor μ vyjádříme z deformovaných rovnic, jako v předchozím příkladě:

$$\mu = -\frac{1}{1 + P^2} \left(\dot{x} \frac{mP^2}{T} + kxP - ky \right).$$

Chetaevova vazební síla nabývá tvar

$$\Phi = \frac{1}{1 + P^2} \left(\dot{x} \frac{mP^2}{T} + kxP - ky \right) (P, -1). \quad (4.118)$$

Vidíme, že Chetaevova vazební síla neobsahuje složku, která by kompenzovala tření prostředí. Narozdíl od předchozích dvou příkladů systémů vázaných neholonomními reonomními vazbami, které bylo možno splnit jen eliminací Stokesovy síly, lze vazbu (4.2.2) u harmonického oscilátoru splnit i v odporujícím prostředí. Vázaný mechanický systém je variační a vazební Lepageovu 1-formu můžeme nalézt například ve tvaru:

$$\eta = \left[-\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + P^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \right] dt - T\dot{x} \left[\beta + \frac{\beta}{P^2} + \frac{mP}{T} \right] \bar{\varphi}^1 - m\dot{x}(1 + P^2)\omega^1.$$

4.3 Triviální vazební Lepageova 1-forma

V tomto odstavci se budeme věnovat zajímavému aspektu geometrické teorie neholonomních systémů, kterým je existence Eulerových-Lagrangeových rovnic s identicky nulovou levou stranou. Ty vznikají jako důsledek nejednoznačnosti vazební Lepageovy 1-formy η charakterizující vázaný variační systém $[\alpha_Q]$. Jak jsme uvedli v předchozích kapitolách vázaný variační mechanický systém $[\alpha_Q]$ reprezentuje v geometrické teorii 2-forma na J^1Y , jejíž obecný tvar je

$$\alpha_Q = d\eta = \bar{A}_l \omega^l \wedge dt + \bar{B}_{ls} \omega^l \wedge dq^s + \bar{F}_{ls} \omega^l \wedge \omega^s + \varphi,$$

kde φ je vazební 2-forma.

Nechť η_1, η_2 jsou vazební Lepageovy 1-formy příslušné vázanému variačnímu systému $[\alpha_Q]$. Připomeňme relaci ekvivalence vazebních Lepageových 1-form, kterou jsme zavedli vztahem (3.96):

$$\eta_1 \sim \eta_2 \Leftrightarrow d\eta_1 - d\eta_2 = \bar{F}_{ls} \omega^l \wedge \omega^s + \varphi.$$

Vazební Lepageovu 1-formu $\tau = \eta_1 - \eta_2$ budeme nazývat *triviální vazební Lepageovou 1-formou* a budeme ji pomocí funkcí na Q značených \bar{T}, \bar{T}_i v souladu s (3.85) zapisovat ve tvaru:

$$\tau = \bar{T} dt + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}^l} \omega^l + \bar{T}_i \varphi^i.$$

Triviální vazební Lepageova 1-forma je příslušná vázanému mechanickému systému s redukovanými pohybovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \varepsilon_l(\bar{T}) - \bar{T}_i \varepsilon_l(g^i) &\equiv 0, \\ f^i &= 0, \text{ kde} \end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q^l} - \frac{d'_\mathcal{C}}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} - \ddot{q}^s \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^s}, \\ \frac{\partial \mathcal{C} f}{\partial q^l} &= \frac{\partial f}{\partial q^l} + \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial f}{\partial q^{m-k+i}}, \\ \frac{d'_\mathcal{C} f}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial f}{\partial q^{m-k+i}} g^i, \end{aligned} \tag{4.120}$$

$1 \leq l, s \leq m - k, 1 \leq i \leq k$. Řešením systému (119) jsou libovolné Q -přípustné řezy. Ze (119) dostáváme pro funkce \bar{T}, \bar{T}_i rovnice:

$$\frac{\partial_c \bar{T}}{\partial q^l} - \frac{d'_c}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}^l} = \bar{T}_i \left(\frac{\partial_c g^i}{\partial q^l} - \frac{d'_c}{dt} \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} \right), \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^l} = \bar{T}_{m-k+i} \left(\frac{\partial^2 g^i}{\partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^l} \right). \quad (4.122)$$

Tyto podmínky určují pro zadanou vazbu $f^i \equiv \dot{q}^{m-k+i} - g^i = 0$ triviální vazební Lepageovu 1-formu.

Vnější derivací triviální vazební Lepageovy 1-formy τ dostáváme 2-formu ρ charakterizující vázaný variační systém s vazebními Eulerovými- Lagrangeovými rovnicemi s identicky nulovou levou stranou:

$$\begin{aligned} d\tau = \rho = & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \dot{q}^s} \varepsilon'_l(g^i) \right]_{Alt(l,s)} \omega^l \wedge \omega^s + \left[\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \dot{q}^l} \right] d\dot{q}^l \wedge \bar{\varphi}^i + \\ & + \left[\frac{d'_c \bar{T}_i}{dt} + \bar{T}_j \frac{\partial g^j}{\partial q^{m-k+i}} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q^{m-k+i}} \right] dt \wedge \bar{\varphi}^i + \\ & + \left[\frac{\partial_c \bar{T}_i}{\partial q^l} + \bar{T}_j \frac{\partial^2 g^j}{\partial \dot{q}^l \partial q^{m-k+i}} - \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \dot{q}^l \partial q^{m-k+i}} \right] \omega^l \wedge \bar{\varphi}^i + \\ & + \left[\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial q^{m-k+j}} \right]_{Alt(i,j)} \bar{\varphi}^j \wedge \bar{\varphi}^i, \end{aligned} \quad (4.123)$$

kde

$$\varepsilon'_l = \frac{\partial_c}{\partial q^l} - \frac{d'_c}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}.$$

Všechny takové systémy patří do stejné třídy ekvivalence $[\alpha_Q]$.

Vždy existuje triviální vazební Lepageova 1-forma τ taková, že $\rho = d\tau = 0$, tj. $\tau = dh$, kde $h(t, q^\sigma, \dot{q}^l)$ je funkce na Q . V následujícím příkladu uvedeme neholonomní vazbu, pro kterou $\rho \neq 0$.

Příklad. Uvažujme fibrovanou varietu Y , $\dim Y = 4$ a nevázaný systém $[\alpha]$ na $J^1 Y$, který podrobíme vazbě typu

$$g^1 = a_{ls}(t, q^\sigma) \dot{q}^l \dot{q}^s. \quad (4.124)$$

Zajímá nás, zda může nějaký mechanický systém $[\alpha]$ podrobený neholonomní vazbě (124) přejít na triviální vázaný systém, pro nějž je $\rho \neq 0$.

Zvolme $g^1 = \dot{q}^3 = \alpha [(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2]$, kde $\alpha = const$, pak nalezneme pouze triviální vázaný systém, pro nějž $\rho = 0$ a stejně tak pro $g^1 = \alpha K \dot{q}^1 \dot{q}^2$, kde $K = const$, $K \neq 2, -2, 0$.

Zvolme neholonomní vazbu

$$g^1 = \left(\dot{q}^1 + \frac{K}{2} \dot{q}^2 \right)^2, \quad (4.125)$$

pak z podmínky variačnosti vázaného systému $d\rho = 0$ resp. z (123) dostáváme

$$\rho = a dt \wedge \bar{\varphi}^1 + b \omega^1 \wedge \bar{\varphi}^1 + \frac{K}{2} b \omega^2 \wedge \bar{\varphi}^1 + c d\dot{q}^1 \wedge \bar{\varphi}^1 + \frac{K}{2} c d\dot{q}^2 \wedge \bar{\varphi}^1,$$

kde a, b, c jsou funkce na Q , které závisí na volbě konkrétního nevázaného systému $[\alpha]$. Zvolíme-li např. takový nevázaný systém, že příslušný systém vázaný vazbou (125) je charakterizován Lepageovou 1-formou τ zadanou funkcemi

$$\bar{T} = -\ln\left(\dot{q}^1 + \frac{K}{2}\dot{q}^2\right)^2, \quad (4.126)$$

$$\bar{T}_1 = \left(\dot{q}^1 + \frac{K}{2}\dot{q}^2\right)^{-2}, \quad (4.127)$$

dostáváme formu ρ ve tvaru

$$\rho = \left(\dot{q}^1 + \frac{K}{2}\dot{q}^2\right)^{-3} (-2d\dot{q}^1 - Kd\dot{q}^2) \wedge \bar{\varphi}^1. \quad (4.128)$$

Tato forma reprezentuje triviální vázaný variační mechanický systém. Poznamenejme, že jde o matematický model bez fyzikální interpretace.

5 Závěr

Práce se zabývá důsledky definice variačnosti neholonomně vázaných systémů v mechanice, která byla zavedena podle [26]. V kapitole 4 jsme se věnovali třem tématickým okruhům spjatým s definicí vázané variačnosti. V souborech příkladů jsme studovali:

1. variační systém podrobený neholonomní vazbě,
2. nevariační systém podrobený neholonomní vazbě,
3. triviální vazební Lepageovu 1-formu.

V prvním odstavci kapitoly 4 jsme se zabývali problematikou variačního nevázaného systému podrobeného neholonomní vazbě. Z každého variačního nevázaného mechanického systému vzniká přidáním libovolné neholonomní vazby variační vázaný mechanický systém (viz věta 3.8). Funkce \bar{L} , \bar{L}_i charakterizující vazební Lepageovu 1-formu mohou být v tomto případě zadány pomocí lagranžianu nevázaného systému (viz (3.97)), což jsme demonstrovali na příkladech s jasnou fyzikální interpretací. V příkladu (4.1.1) jsme studovali pohyb snakeboardu, kde neholonomní vazba představovala požadavek, aby se kolečka snakeboardu nesmýkala do boku. Podobně v příkladu (4.1.2) neholonomní vazba zajišťuje nepodkluzování válců. Kromě zadání příkladu (4.1.1), které bylo převzato z [24], jsou oba příklady včetně konstrukce neholonomních vazeb (4.20), (4.21), (4.54) původní a rozšiřují tak v literatuře malý počet kompletně řešených fyzikálních příkladů s neholonomní tematikou. V příkladech byl kladen důraz na podrobnou konstrukci neholonomních vazeb.

Kromě aplikace geometrické teorie neholonomních systémů, kterou shrnuje teoretická část práce v kapitolách 2 a 3, jsme se v příkladech zaměřili na fyzikální podstatu geometrických objektů. Pro konkrétní volbu funkce $b(t) = \pi/4$, při které jezdí snakeboard zrychleně po kružnici, jsme našli Chetaevovu vazební sílu ve tvaru (4.34). První dvě složky vazební síly mají význam výslednice dostředivé a tečné síly (vzhledem ke kružnicové trajektorii těžiště) působící na těžiště snakeboardu a poslední složka má význam momentu síly, který způsobuje rovnoměrně zrychlenou rotaci prkna kolem vertikální osy procházející jeho těžištěm. Porovnáním řešení příkladu (4.1.2) ryze fyzikální metodou, tj. formulací impulzových vět, s řešením pomocí geometrické teorie jsme získali vztah Chetaevovy vazební síly a tlakových a třecích sil a jejich momentů (viz (4.71)).

V druhém odstavci jsme našli příklady nevariačních systémů podrobených neholonomní vazbě, která převádí nevariační nevázaný systém na systém variační. Nalezli jsme jak fyzikální příklady (viz 4.2.1), tak matematické modely (viz 4.2.2). Šest původních příkladů je rozděleno po třech do prvního a druhého pododstavce. Nevariační nevázaný mechanický systém představují jak v 4.2.1 tak v 4.2.2 postupně :

1. hmotný bod v odporujícím prostředí,
2. hmotný bod v odporujícím prostředí v tíhovém poli Země,
3. tlumený harmonický oscilátor.

V 4.2.1 jsou nevázané systémy podrobeny neholonomní podmínce představující zachování mechanické energie, zatímco v druhém odstavci jsou podrobeny tytéž systémy různým neholonomním vazbám, které spojuje explicitní závislost vazby na čase. Všechny vázané systémy jsou variační.

Nalezením tří rozdílných vazebních Lepageových 1-forem (4.81) v prvním příkladě jsme demonstrovali nejednoznačnost zadání vazební Lepageovy 1-formy. V následujícím příkladě jsme ukázali, že nelze pro každý variační vázaný systém nalézt vazební Lepageovu 1-formu s libovolnou předem zadanou kombinací nulových a nenulových funkcí \bar{L} , \bar{L}_i (viz podmínky (4.91) a (4.92)). Pro variační vázaný systém neexistuje jednoznačná funkce obdobná lagranžiánu u variačního nevázaného systému.

Neholonomní vazba v podobě zachování mechanické energie aplikovaná na fyzikální systém v odporujícím prostředí převádí tento nevázaný systém na variační vázaný, který (z hlediska popisu) není totožný s nevázaným systémem bez odporu prostředí, ačkoliv časový vývoj obou systémů (pro počáteční podmínky splňující vazbu) je shodný. Vázaný systém je totiž charakterizován funkcemi \bar{L} , \bar{L}_i , zatímco nevázaný systém v neodporujícím prostředí je jednoznačně zadán lagranžiánem L . Informaci o lagranžiánu L však již ve funkcích \bar{L} , \bar{L}_i nenalezneme.

U všech příkladů jsme našli Chetaevovu sílu buď prostřednictvím nalezeného řešení systému (viz (4.80), (4.89), (4.97), (4.106)) anebo vyjádřením multiplikátoru μ z deformovaných rovnic (viz (4.114), (4.118)). Chetaevovy síly (4.80), (4.89), (4.97) zajišťující zachování mechanické energie vázaného systému právě kompenzují Stokesovu sílu odporujícího prostředí, zatímco Chetaevovy síly (4.106), (4.114) kromě složky kompenzující Stokesovu sílu obsahují i další složky.

Splnění vazby (4.117) zajišťuje Chetaeova vazební síla (4.118), která Stokesovu sílu odporujícího prostředí nekompensuje.

V odstavci 4.3 jsme se věnovali zajímavému důsledku teorie variačních vázaných systémů: existenci triviální vazební Lepageovy 1-formy. Vnější derivací triviální vazební Lepageovy 1-formy dostáváme reprezentanta ρ (viz (4.123)) třídy ekvivalence $[\alpha_Q]$, do níž náležejí všechny triviální vázané systémy. Vždy lze najít uzavřenou triviální vazební Lepageovu 1-formu. Funkcemi (4.126), (4.127) jsme zadali triviální vazební Lepageovu 1-formu, jejíž vnější derivací dostáváme nenulovou formu ρ .

Koncept triviálních vazebních Lepageových 1-forem je možno studovat také z fyzikálního úhlu pohledu. V budoucnu lze hledat odpovědi na otázky, jaký nevázaný mechanický systém lze převést přidáním jisté neholonomní vazby na vázaný triviální vazební systém a jaký tato vazba může nabývat tvar.

Literatura

- [1] M. Brdička, A. Hladík, Teoretická mechanika, Academia Praha ,1987
- [2] N.G.Chetaev, On the Gauss Principle, Izv. Kazan. Fiz. Mat. Obsc. 6, 323-326, 1933
- [3] N. G. Chetaev, On Some Problems of Stability of Motion in Mechanics, Prikl. Mat. Mech. 20, 309-314, 1956
- [4] L. Czudková, J. Janová, J. Musilová, J. Trivial Constraint Variational Problem. Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, ISSN 0009-725X, 2005
- [5] L. Czudková, J. Janová, J. Musilová, Non-holonomic Mechanical Systems and Variational Principle. In Differential Geometry and its Applications. Proc. Conf. Prague, August 30 - September 3, 2004. 2005. vyd. Prague, Czech Republic : Charles University, ISBN 80-86732-63-0. od s. 571-579, 2005.
- [6] A. Ibort, M. de León, G. Marmo, D.M. de Diego, Non-holonomic constrained systems as implicit differential equation, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol 54,3, 295-317, 1996
- [7] J. Janová, Geometrická teorie mechanických soustav s neholonomními vazbami, Diplomová práce, Brno, 2002
- [8] D. Krupka, Some Geometric Aspects of Variational Problems in Fibered Manifolds, Folia, PřF UJEP Brunensis 14, 1-65, 1973
- [9] D. Krupka, Lepagean forms in higher order variational theory, Modern Developments in Analytical Mechanics 1: Geometrical Dynamics, Proc. IUTAM-ISSIM Symposium, Torino, Italy, 197-238, 1982
- [10] O. Krupková, Mechanical Systems with Nonholonomic Constraints, J. Math. Phys. 38 , 5098-5138, 1997
- [11] O. Krupková, The Geometry of Ordinary Variational Equations, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1997
- [12] O. Krupková, On the geometry of non-holonomic mechanical systems, Proc. Conf. Diff. Geom. Appl. Brno, 533-546, 1998

- [13] O. Krupková, Higher order mechanical systems with constraints, *J. Math. Phys.* 41, No. 8, 5304-5324, 2000
- [14] O. Krupková, Recent results in the geometry of constrained systems, *Rep. Math. Phys.* 49,269-278, 2002
- [15] O. Krupková and J. Musilová, The relativistic particle as a mechanical system with nonlinear constraints, *J. Phys. A.:Math. Gen* 34, 3859-3875, 2001
- [16] O. Krupková, J. Musilová, Constraint Helmholtz conditions, Preprint 6/2002, ÚTFA, Masarykova Univerzita, Brno, 2002
- [17] O. Krupková, M. Swaczyna, Horizontal and Contact Forms on Constrained Manifolds, *Proc. 24th Winter School Geometry and Physics, Srní, 2004*, *Suppl. ai Rend. del Circ Mat. di Palermo, Serie II (Suppl. 75)*,259-267, 2005
- [18] O.Krupková, M. Swaczyna, The Non-holonomic Variational Principle, Preprint 8/2002, ÚTFA, MU, Brno, 2002
- [19] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover publications, inc. New York, 1986
- [20] L.D.Landau, E.M.Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Mechanics*, Butterworth-Heinenann, Oxford, 2001
- [21] M. de León, J.C. Marrero, D. M. de Diego, Mechanical systems with nonlinear constraints, *International Journal of Theoretical Physics*, Vol 36, No 4, 979-995, 1997
- [22] A. D. Lewis, J. P. Ostrowski, R. M. Murray, and J. W. Burdick, Nonholonomic mechanics and locomotion: The snakeboard example, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, (San Diego, CA), 2391-7, 1994
- [23] Ch.M. Marle, *Geometry of Mechanical Systems with Active and Kinematic Constraints*, Univ. P. et M. Curie, preprint, 1998
- [24] J.C. Monforte, *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems*, Springer, Berlin, 2002

- [25] Ju.I.Neimark, N.A. Fufaev, Dynamics of Nonholonomic Systems, Translations of Mathematical Monographs 33, American Mathematical Society, Rhode Island, 1972
- [26] M. Swaczyna, Variational Aspects of Nonholonomic Mechanical Systems, Ph.D. thesis, Olomouc, 2005
- [27] M. Swaczyna, On the nonholonomic variational principle, Global Analysis and Applied Mathematics, sborník International Workshop on Global Analysis, Ankara, 297-306, 2004
- [28] A.M. Vershik, L.D. Faddaev, Differential Geometry and Lagrangian mechanics with Constraints, sov. Phys. Dokl.,17, 34-36, 1972