

**VYBRANÉ PROBLÉMY
MECHANIKY SOUSTAV HMOTNÝCH BODŮ
A TUHÉHO TĚLESA**

Dizertační práce
předložená na
Přírodovědecké fakultě
Masarykovy univerzity v Brně

Lenka Czudková

září 2002

Školitelka:

Jméno: Doc. RNDr. Jana Musilová, CSc.

Pracoviště: Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta, MU Brno

Oponenti:

Jméno:

Pracoviště:

Jméno:

Pracoviště:

Komise pro státní doktorskou zkoušku:

Předseda:

Členové:

Datum a místo konání obhajoby:

Děkuji doc. RNDr. Janě Musilové, CSc., za trpělivé vedení mé práce, za množství přínosných diskuzí a za řadu podnětných připomínek k rukopisu. Dále děkuji doc. RNDr. Antonínu Havránkovi, CSc., za poskytnuté konzultace, za zájem o postup práce a za návrhy k její definitivní podobě. Poděkování patří také Mgr. Mojžíru Meduňovi za pomoc při přípravě grafů ke kapitolám 4., 6. a 9. a za scan a úpravu převzatých obrázků.

Děkuji i všem ostatním, kteří na mne působili.

Lenka Čudlínová

Abstrakt

Práce se zabývá rozбором vybraných problémů mechaniky hmotného bodu a mechaniky tuhého tělesa na úrovni určené absolventům bakalářského studijního programu fyziky. Takto formulované pasáže potom v sevřené podobě transformuje také na středoškolskou úroveň. Výběr témat je zaměřen jednak na oblasti, které studentům často činí problémy, jednak na oblasti, v nichž se běžně dostupná literatura omezuje na řešení speciálních případů.

Text sestává ze dvou volně navazujících částí: *Mechaniky hmotného bodu* a *Mechaniky tuhého tělesa*. Každá z nich je uvedena souhrnem potřebných fyzikálních pojmů a zákonů, které jsou v následujících kapitolách aplikovány na konkrétní situace: pohyb sférického kyvadla a pohyb hmotného bodu v blízkosti rotující Země v části první a pohyb setrvačnicků v části druhé. Důraz je přitom kladen na důslednou matematickou formulaci problémů a na její fyzikální interpretaci. Ve srovnání s běžnou literaturou je při obecném popisu pohybu tuhého tělesa výrazně preferován maticový formalismus. Obě části uzavírá stručný elementární výklad tematiky na středoškolské úrovni, doplněný souborem úloh k samostatnému řešení.

Práce je určena absolventům kurzu obecné fyziky a odpovídajících matematických disciplín (úroveň bakalářů), jejichž poznatky v mnohém rozšiřuje. Učitelům fyziky navíc poskytuje prostor k výběru a způsobu zpracování látky pro běžné i nestandardní hodiny.

Abstract

The thesis presents an analysis of some problems of the mechanics of a point particle and the mechanics of a rigid body at the level appropriate to Bachelors of Physics. Thus formulated passages are then transformed into concise version appropriate to the secondary school level. The choice of topics is aimed at fields often being problematic for most students on the one hand and at the topics restricted to the form of solving particular cases in the literature available on the other hand.

The text consists of two loosely linked parts: *Mechanics of a Point Particle* and *Mechanics of a Rigid Body*. Each of them is opened with a summary of useful physical concepts and principles that are applied to concrete situations in following chapters: motion of a spherical pendulum and motion of a point particle in the proximity of the rotating Earth in the first part and motion of a rigid body about a fixed point in the second part. Great emphasis is put on consistent mathematical formulation of analysed situations and on its physical interpretation. In comparison with textbooks available, matrix algebra is considerably preferred for general description of a rigid body motion. Both parts are concluded with a brief elementary presentation of the topics appropriate to the secondary school level completed with a complex of examples for the individual study.

The work is drawn up for university students who completed the introductory course of general physics and corresponding mathematical disciplines (Bachelor level). It makes knowledge of the students more profound in many ways. Moreover, teachers can use it for the choice of topic and method for presentation in both common and non-standard classes.

Obsah

Úvod	1
------------	---

I. ČÁST: MECHANIKA HMOTNÉHO BODU

1. Základní kinematické pojmy a veličiny	5
1.1 Pohyb hmotného bodu. Rychlost a zrychlení	5
1.2 Tečné a normálové zrychlení	6
1.3 Pohyb hmotného bodu po kružnici	9
2. Popis pohybu hmotného bodu různými pozorovateli	10
2.1 Vektorová formulace	10
2.2 Maticová formulace	12
3. Dynamika hmotného bodu	14
3.1 Inerciální vztažné soustavy	14
3.2 Neinerciální vztažné soustavy. Fiktivní síly	16
4. Pohyb sférického kyvadla	18
4.1 Základní informace o sférickém kyvadle	18
4.2 Kvalitativní charakteristika pohybu sférického kyvadla	20
4.3 Sférické kyvadlo s jednostrannou vazbou	25
5. Laboratorní vztažná soustava a její neinerciálnost	28
5.1 Pohyb nevázaného hmotného bodu	28
A) Řešení pohybových rovnic v laboratorní vztažné soustavě	29
B) Řešení pohybových rovnic ve vztažné soustavě S	33
5.2 Foucaultovo kyvadlo	35
6. Mechanika hmotného bodu na elementární úrovni	38
6.1 Kinematika hmotného bodu	38
A) Pohyb hmotného bodu. Rychlost a zrychlení	38
B) Pohyb hmotného bodu po kružnici. Tečné a normálové zrychlení	43
Úlohy	47
6.2 Dynamika hmotného bodu	48
A) Inerciální vztažné soustavy. Newtonovy zákony	48
B) Neinerciální vztažné soustavy. Fiktivní síly	49
C) Pohyb sférického kyvadla	52
D) Otáčející se vztažné soustavy	55
Úlohy	58

II. ČÁST: MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

7. Kinematika tuhého tělesa	63
7.1 Poloha tuhého tělesa	63
7.2 Pohyb tuhého tělesa – geometrický popis	64
7.3 Pohyb tuhého tělesa – algebraický popis	66
7.4 Otočení tuhého tělesa	69
7.5 Okamžitá osa otáčení	72

8. Dynamika tuhého tělesa	75
8.1 Pohybové rovnice tuhého tělesa	75
8.2 Otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy	77
8.3 Otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu. Tenzor setrvačnosti.	79
8.4 Vlastnosti tenzoru setrvačnosti. Volné osy.	81
8.5 Eulerovy dynamické rovnice	85
9. Pohyb setrvačníků	86
9.1 Základní informace o setrvačnicích	86
9.2 Bezmomentový setrvačnick	87
A) Kulový setrvačnick	88
B) Symetrický setrvačnick	89
B) Asymetrický setrvačnick	92
9.3 Těžký symetrický setrvačnick	96
10. Mechanika tuhého tělesa na elementární úrovni	104
10.1 Dynamika tuhého tělesa	104
A) První impulzová věta. Střed hmotnosti tělesa	104
B) Druhá impulzová věta	105
C) Soustavy sil působících na tuhé těleso. Těžiště tuhého tělesa	107
D) Otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy	109
E) Volné osy	114
F) Otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu	115
G) Otáčení tuhého tělesa kolem různoběžných os	117
Úlohy	118
10.2 Pohyb setrvačníků	120
A) Setrvačnický a jejich rozdělení	120
B) Bezmomentový setrvačnick	120
C) Těžký setrvačnick	121
Úlohy	122
10.3 Použití setrvačníků	123
A) Umělý horizont	123
B) Kola dopravních prostředků	123
C) Stabilizátory kmitů	124
D) Setrvačnickový kompas	124
Úloha	125
Závěr	126
Literatura	127
Dotatky	I

Úvod

Klasická mechanika tvoří již tradičně vstupní blok každého kurzu obecné fyziky, prezentovaného na různých stupních a typech škol. Toto pojetí je dáno předmětem samotné mechaniky – nejstarší fyzikální disciplíny, popisující pohyb makroskopických těles, která nás běžně obklopují. Právě možnost četných odkazů na každodenní zkušenost a její postupné zobecňování dovoluje prostřednictvím mechaniky názorně prezentovat axiomatický způsob výstavby fyzikálních teorií a vstřípnit tak studentům základy fyzikálního myšlení.

První formulace axiomů klasické mechaniky – trojice Newtonových pohybových zákonů – spadá do druhé poloviny 17. století. Přestože se později objevily i jiné přístupy k budování klasické mechaniky (D'Alembert, Lagrange, Hamilton a jiní), které vycházejí z obecnějších principů a vedou například k přehlednějšímu zápisu pohybových rovnic vázaných systémů, zůstává i nadále význam Newtonových zákonů nesporný. Newtonovy zákony totiž mají jednoduchý tvar uvádějící do souvislosti veličiny zavedené s ohledem na každodenní praktickou zkušenost a jsou zcela univerzální, tj. umožňují bezesbytku popsat pohyb libovolného mechanického systému i jeho částí.

Předložená práce je zaměřena na oblast fyzikálního vzdělávání, a proto důsledně respektuje newtonovskou formulaci mechaniky. Text je rozdělen do dvou volně navazujících částí: *Mechaniky hmotného bodu* a *Mechaniky tuhého tělesa*. V každé z nich jsou pro úplnost nejprve vymezeny základní pojmy a zákony vztahující se k dané problematice (kapitoly 1., 2., 3., 7. a 8.), které jsou následně aplikovány na vybrané situace (kapitoly 4., 5. a 9.). Zmíněné kapitoly jsou podány na úrovni navazující na bakalářský studijní program fyziky, a proto je v nich kladen důraz především na důslednou matematickou formulaci pojmů, zákonů i konkrétních problémů a na rozbor speciálních případů, u nichž lze získané výsledky názorně fyzikálně interpretovat. Obě části pak uzavírá výklad problematiky na středoškolské úrovni (kapitoly 6. a 10.).

Výběr témat zařazených do první části práce je motivován skutečností, že řada studentů nerozumí dobře obsahu Newtonových zákonů a nedovede je aplikovat na jednoduché situace ([7]). Vhodným, avšak v učebnicové literatuře zpravidla opomíjeným systémem, na němž lze z oblasti mechaniky hmotného bodu ukázat i procvičit velmi mnoho, je malé tělíčko zavěšené na niti neproměnné délky – tzv. sférické kyvadlo. Rozboru jeho obecného pohybu na pokročilé (vysokoškolské) úrovni je věnována kapitola 4. Následující kapitola 5. si na téže úrovni všímá pohybu hmotného bodu vzhledem k neinerciální vztažné soustavě spojené s rotující Zemí. Ukazuje a porovnává také dvojí možný přístup k nalezení trajektorie nevázaného hmotného bodu: řešení pohybových rovnic formulovaných v neinerciální vztažné soustavě spojené se Zemí na straně jedné a řešení pohybových rovnic formulovaných v inerciální vztažné soustavě a transformaci výsledků do vztažné soustavy spojené se Zemí na straně druhé. První tři kapitoly práce představují přípravný rámec, v němž jsou shrnuty potřebné pojmy a zákony kinematiky a dynamiky hmotného bodu.

Druhá část práce se zabývá nejprve kinematikou a dynamikou tuhého tělesa (kapitoly 7. a 8.), a to jak prostřednictvím názorných geometrických představ, tak užitím maticového aparátu. Kapitola 9. pak aplikuje vyvozené závěry na pohyb setrvačníků. Důvodem k právě této volbě je praktická důležitost setrvačníků a tím vznikající potřeba popsat různé aspekty jejich pohybu. Přestože by bylo možné přistupovat zde k řešení pohybu setrvačnicku co nejobecněji a na základě získaných výsledků dospět ke speciálním případům, záměrně této možnosti není využito. Obecné řešení problému (například pohyb asymetrického setrvačnicku) je totiž poměrně náročné, zatímco speciální případy (pohyb kulového a symetrického setrvačnicku) lze popsat snadno – uplatněním konkrétních postupů pro každý z nich.

Kapitoly 6. a 10. převádějí v závěru každé z částí diskutovanou problematiku na středoškolskou úroveň a jsou dokladem skutečnosti, že dobré porozumění pohybovým zákonům umožňuje pochopit i poměrně složité mechanické jevy. Nekladou si však za cíl prezentovat úplný a vzorový učebnicový výklad (vzhledem k chybějícímu kontextu předchozí a navazující látky by to ani nebylo možné). Obě tyto kapitoly jsou koncipovány jako stručný návod pro učitele, který vystihuje myšlenkový

sled vedení výkladu, rekapituluje klíčové pojmy a zákony dané oblasti a aplikuje je na konkrétní situace. Pro přiblížení zaváděných pojmů a pro ukázkou použití probíraného aparátu je v textu zařazeno několik řešených příkladů, oddělených od dalšího výkladu symbolem \diamond . Každý z oddílů je pak zakončen souborem úloh k samostatnému řešení, zaměřeným na procvičení a hlubší pochopení látky. Náročnější úlohy jsou podle běžného zvyku označeny hvězdičkou. Poněvadž jsou obě kapitoly formulovány jako relativně samostatné, nebylo možné vyhnout se na některých místech částečnému zopakování již dříve uvedených pasáží. Podstatná část kapitoly 6. byla publikována v článcích [6] a [7].

Práce se v mnohém opírá o dostupnou literaturu. Použity byly především středoškolské učebnice [2] a [27], vysokoškolské učebnice [3], [8], [9], [11], [15], [17] a [18], ale také starší a dnes již ke studiu málo doporučovaná kniha [26]. Témat, která jsou zde diskutována, si literatura všímá s různou mírou podrobností. Zatímco pohyb hmotného bodu v blízkosti rotující Země je řešen pouze v [26] z hlediska neinerciální vztahné soustavy, pohyb sférického kyvadla je vyčerpávajícím způsobem popsán v téže publikaci a stručněji pak v novější knize [3]. Pohyb setrvačnicků řeší některé vysokoškolské učebnice (např. [3], [9], [11] a [17]) jen pro speciální případy, obecnější postupy uvádí [8] a [18] a detailní rozbor [26].

Řada výsledků potřebných k sepsání práce byla čerpána z učebnice [26], zde je však použito odlišného způsobu jejich zpracování a prezentace. Učebnice je totiž velmi podrobná a precizní, s množstvím zajímavých argumentací, ale obsahuje zastaralé postupy a její části na sebe místy natolik těsně navazují, že potřebnou pasáž nelze pročíst bez znalosti kontextu okolních paragrafů. Ostatní citované prameny dobře sloužily zejména k prvnímu seznámení s problematikou, k němuž [26] není nejvhodnější.

V textu je použito obvyklého značení fyzikálních veličin. Ve snaze nezavádět příliš netypická označení jsou přitom některé – zpravidla pomocné – veličiny označeny již dříve použitými symboly. Vzhledem k jejich dostatečné prostorové vzdálenosti by ale nemělo dojít k případné záměně. S ohledem na přehlednost jednotlivých pasáží se pak podle potřeby (vždy však s dostatečným upozorněním) mění způsob značení a indexování některých veličin: zatímco označení vztahné soustavy způsobem $S = \langle O; x_1, x_2, x_3 \rangle$ a rozlišení složek vektorů dolními číslicovými indexy $1, 2, 3$ je výhodné na místech, kde se užitím Einsteinovy sumační konvence provádějí obecné maticové výpočty, v případě konkrétních aplikací (kapitoly 4., 5., 6., a 10.) je použito označení $S = \langle O; x, y, z \rangle$ a rozlišení složek vektorů dolními indexy x, y, z . Na místech, kde se nepředpokládá nedorozumění, je opět se zřetelem na přehlednost textu vynecháno explicitní vyznačení závislostí veličin na čase, souřadnicích atd.

Každá z částí práce je členěna do průběžně číslovaných kapitol. Kapitoly se dále dělí do oddílů, pro něž je zvoleno obvyklé desetinné číslování, v případě potřeby pak dále do paragrafů označených velkými písmeny latinské abecedy. Pasáže psané *petitem* obsahují rozšiřující informace nebo podrobnější komentáře a jejich vynechání nenaruší souvislost výkladu. Doplňující poznámky, které by mohly rušit čtenářovu pozornost, jsou uvedeny vždy pod čarou na příslušné straně. Rozsáhlejší početní postupy a odvození jsou zařazeny v dodatcích.

I. ČÁST

MECHANIKA HMOTNÉHO BODU

1. Základní kinematické pojmy a veličiny

Předmětem nejstarší fyzikální disciplíny – *mechaniky* – je studium pohybu těles a jejich částí. Podle přístupu k tomuto problému mechaniku dělíme na *kinematiku*, která pohyb těles popisuje, a na *dynamiku*, která zkoumá příčiny změn jejich pohybového stavu. Kinematika tedy zavádí s ohledem na potřeby axiomaticky budované dynamiky základní pojmy a veličiny charakterizující pohyb.

Protože se vždy zabýváme jen některými aspekty pohybu, nahrazujeme reálná tělesa vhodnými modely, které abstrahují od nepotřebných informací. Nejjednodušším modelem je *hmotný bod*. Rozumíme jím geometrický bod, v němž je formálně soustředěna hmotnost tělesa, ztotožněný s některým z jeho bodů. Mechanika hmotného bodu má široké aplikační možnosti, neboť každé těleso lze myšlenkově rozdělit na dostatečně malé elementy a na ně pak v celé řadě situací pohlížet jako na hmotné body. Základní kinematické pojmy a veličiny jsou proto zavedeny právě pro hmotný bod.

1.1 Pohyb hmotného bodu. Rychlost a zrychlení

Pohybem hmotného bodu označujeme děj, při němž se mění poloha hmotného bodu vzhledem k danému pozorovateli. Abychom mohli pohyb hmotného bodu kvantitativně popsat, spojujeme s pozorovatelem *vztažnou soustavu* $S = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle O; x_1, x_2, x_3 \rangle$, zadanou počátkem v bodě O a bází $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, která určuje směr a orientaci souřadnicových os x_1, x_2, x_3 . Bázi vztažné soustavy je zvykem vybírat tak, aby byla ortonormální a pravotočivá.

Poloha hmotného bodu v okamžiku t je vzhledem k soustavě S popsána trojicí souřadnic $X = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$, resp. složkami *polohového vektoru*

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OX} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad (1.1)$$

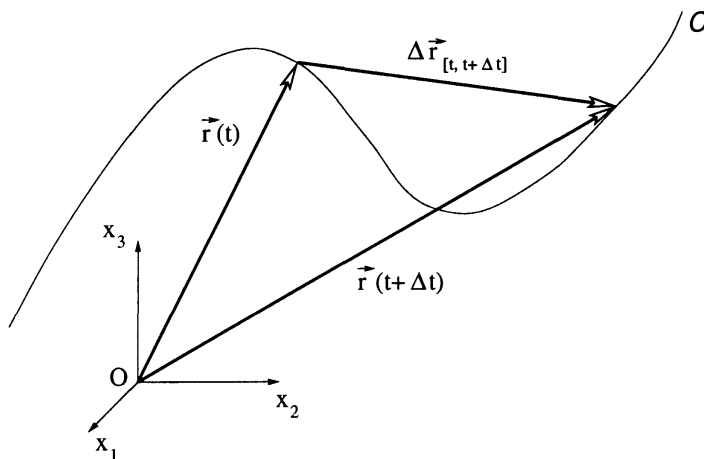
kde $x_i(t)$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$ jsou funkce času. Křivku

$$C : x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), \quad (1.2)$$

jejímž parametrem je čas, nazýváme *trajektorii* hmotného bodu. V případě, že je trajektorie částí přímky, mluvíme o *přímočarém* pohybu, v opačném případě nazýváme pohyb *křivočarým* (v daném časovém intervalu $[t, t + \Delta t]$).

Změnu polohy hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ charakterizuje *vektor posunutí* (obr. 1.1)

$$\Delta \vec{r}_{[t, t+\Delta t]} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (1.3)$$



Obr. 1.1. K definici vektoru posunutí

Prostřednictvím vektoru posunutí definujeme *průměrnou rychlost* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ vztahem

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \frac{\Delta \vec{r}_{[t, t + \Delta t]}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Průměrná rychlost obecně závisí na délce intervalu, k němuž ji vztahujeme (přesněji na volbě okamžiků t a $t + \Delta t$). Pro delší časové úseky může být příliš hrubou charakteristikou pohybu, a proto je snahou volit Δt co nejmenší. Jako limitní případ průměrné rychlosti pro $\Delta t \rightarrow 0$ zavádíme *okamžitou rychlost* hmotného bodu, která se již vztahuje pouze k okamžiku t , tj.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t). \quad (1.5)$$

Podle časového průběhu okamžité rychlosti dělíme pohyby hmotného bodu na *rovnoměrné* ($|\vec{v}(t)| = \text{konst.}$) a *nerovnoměrné* ($|\vec{v}(t)| \neq \text{konst.}$).

Podobně zavádíme *průměrné zrychlení* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$

$$\langle \vec{a} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \frac{\Delta \vec{v}_{[t, t + \Delta t]}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.6)$$

a *okamžité zrychlení* hmotného bodu v čase t

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t). \quad (1.7)$$

1.2 Tečné a normálové zrychlení

Vektor okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$ hmotného bodu je podle definice vždy tečný k trajektorii. *Jednotkový vektor tečny k trajektorii* v bodě $\vec{r}(t)$ proto v kinematice vyjadřujeme vztahem

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}. \quad (1.8)$$

Vektor $\vec{\tau}(t)$ splňuje v každém okamžiku podmínku $\vec{\tau}(t) \cdot \vec{\tau}(t) = 1$. Jejím derivováním podle času dostáváme $2\vec{\tau}(t) \cdot \dot{\vec{\tau}}(t) = 0$, odkud je patrné, že vektory $\vec{\tau}(t)$ a $\dot{\vec{\tau}}(t)$ jsou vzájemně kolmé. Vektor

$$\vec{n}(t) = \frac{\dot{\vec{\tau}}(t)}{|\dot{\vec{\tau}}(t)|} \quad (1.9)$$

nazýváme *jednotkovým vektorem hlavní normály k trajektorii* v bodě $\vec{r}(t)$. Tento vektor má mezi všemi jednotkovými vektory, které jsou kolmé k tečně trajektorie, privilegované postavení. Vzhledem ke způsobu zavedení totiž určuje spolu s polohou hmotného bodu $\vec{r}(t)$ v okamžiku t a vektorem $\vec{\tau}(t)$ *oskulační rovinu*, v níž leží bod $\vec{r}(t)$ a dva jemu limitně blízké body trajektorie. Zaměření oskulační roviny zpravidla popisujeme *jednotkovým vektorem binormály*

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\tau}(t) \times \vec{n}(t). \quad (1.10)$$

Hmotný bod opíše v intervalu $[t, t + \Delta t]$ *oblouk trajektorie* o délce

$$\Delta s_{[t, t + \Delta t]} = \int_t^{t + \Delta t} \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_t^{t + \Delta t} v(t) dt, \quad (1.11)$$

do okamžiku t tedy urazí *dráhu*

$$s(t) = \Delta s_{[0, t]}. \quad (1.12)$$

Pomocí těchto veličin je definována *křivost* trajektorie v bodě $\vec{r}(t)$ jako velikost změny vektoru $\vec{r}(t)$ vztážená k oblouku trajektorie o limitně malé délce, tj.

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s_{[t,t+\Delta t]} \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}_{[t,t+\Delta t]}|}{\Delta s_{[t,t+\Delta t]}} = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{ds(t)} \right|. \quad (1.13)$$

Uvedený vztah má ovšem smysl pouze za předpokladu, že dráha hmotného bodu $s(t)$ je – alespoň v jistém intervalu zahrnujícím okamžik t – vzájemně jednoznačnou funkcí času a čas tak lze vyjádřit jako $t = t(s)$. Derivaci na pravé straně (1.13) je tedy nutno chápat jako derivaci vektoru $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$ podle dráhy. Odtud

$$\kappa(t) = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{ds(t)} \right| = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \frac{dt(s)}{ds} = \frac{|\dot{\vec{r}}(t)|}{v(t)}. \quad (1.14)$$

S křivostí bezprostředně souvisí *poloměr křivosti* trajektorie v bodě $\vec{r}(t)$

$$\mathcal{R}(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{v(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}. \quad (1.15)$$

Obecně definované charakteristiky křivost a poloměr křivosti mají ve speciálních případech přímočarého pohybu a pohybu po kružnici očekávaný význam. Pro přímočarý pohyb hmotného bodu platí (s případnou výjimkou okamžiků, kdy $v(t) = 0$)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}, \quad (1.16)$$

proto

$$\kappa(t) = 0, \quad \mathcal{R}(t) \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Všimněme si pohybu hmotného bodu po kružnici o poloměru R . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tato kružnice leží v rovině Ox_1x_2 soustavy S a její střed splývá s bodem O . Polohový vektor hmotného bodu má složky

$$\vec{r}(t) = (R \cos \varphi(t), R \sin \varphi(t), 0), \quad (1.18)$$

kde $\varphi(t)$ je funkce času. Užitím definičních vztahů dostáváme postupně

$$\vec{v}(t) = (-R \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t), R \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), 0), \quad (1.19)$$

$$\vec{r}(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|} (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t), 0). \quad (1.20)$$

Předpokládáme-li, že $\dot{\varphi}(t) > 0$, platí

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), -\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t), 0), \quad (1.21)$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \dot{\varphi}(t), \quad v(t) = R \dot{\varphi}(t) \quad (1.22)$$

a odtud

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}}(t)|}{v(t)} = \frac{1}{R}, \quad \mathcal{R}(t) = R. \quad (1.23)$$

Pro $\dot{\varphi}(t) < 0$ vychází totéž, pro $\dot{\varphi}(t) = 0$ nelze (stejně jako pro $v(t) = 0$ v případě přímočarého pohybu) k výpočtu křivosti trajektorie v bodě $\vec{r}(t)$ vztah (1.14) použít.

Kružnici o poloměru $\mathcal{R}(t)$, která leží v oskulační rovině a má v bodě $\vec{r}(t)$ s trajektorií hmotného bodu společnou tečnu, nazýváme *oskulační kružnicí*.

Pro okamžité zrychlení hmotného bodu můžeme užitím (1.8), (1.9) a (1.15) psát

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d[v(t)\vec{\tau}(t)]}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}(t) + v(t)\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}(t) + \frac{v^2(t)}{\mathcal{R}(t)}\vec{n}(t). \quad (1.24)$$

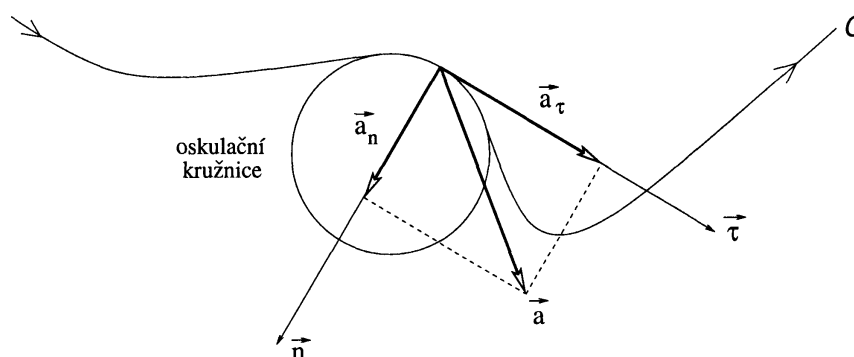
Vidíme, že vektor zrychlení hmotného bodu leží v oskulační rovině. Jeho průmět do směru tečny k trajektorii

$$\vec{a}_\tau(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}(t) \quad (1.25)$$

nazýváme *tečným zrychlením*, průmět do směru normály k trajektorii

$$\vec{a}_n(t) = \frac{v^2(t)}{\mathcal{R}(t)}\vec{n}(t) \quad (1.26)$$

nazýváme *normálovým zrychlením* (obr. 1.2).



Obr. 1.2. Rozklad vektoru zrychlení hmotného bodu do směru tečny a do směru normály k trajektorii

Tečné zrychlení má směr tečny k trajektorii a určuje změnu velikosti rychlosti hmotného bodu, normálové zrychlení směřuje do středu oskulační kružnice a souvisí se změnou směru vektoru rychlosti. Klasifikaci pohybů hmotného bodu podle tečného a normálového zrychlení ukazuje následující tabulka:

TYP POHYBU	ROVNOMĚRNÝ	NEROVNOMĚRNÝ
PŘÍMOČARÝ	$\vec{a}_\tau(t) \equiv \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \equiv \vec{0}$	$\vec{a}_\tau(t) \neq \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \equiv \vec{0}$
KŘIVOČARÝ	$\vec{a}_\tau(t) \equiv \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \neq \vec{0}$	$\vec{a}_\tau(t) \neq \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \neq \vec{0}$

Podle velikosti tečného zrychlení dělíme dále pohyby hmotného bodu na *rovnoměrně zrychlené* ($a_\tau(t) = \text{konst.}$) a *nerovnoměrně zrychlené* ($a_\tau(t) \neq \text{konst.}$).

1.3 Pohyb hmotného bodu po kružnici

Samostatně popisovaným případem je pohyb hmotného bodu po kružnici.

Předpokládejme zde – opět bez újmy na obecnosti, že uvažovaná kružnice o poloměru R , která je současně kružnicí oskulační, leží v rovině Ox_1x_2 a její střed splývá s bodem O . Polohu hmotného bodu popisuje vektor

$$\vec{r}(t) = (R \cos \varphi(t), R \sin \varphi(t), 0), \quad (1.27)$$

kde funkci času $\varphi(t)$ nazýváme *úhlem otočení*. Takto zavedený úhel otočení je odečítán od kladné poloosy x_1 proti směru pohybu hodinových ručiček. Jeho prostřednictvím definujeme *průměrnou úhlovou rychlost* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ vztahem

$$\langle \vec{\omega} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \frac{\Delta \varphi_{[t, t + \Delta t]}}{\Delta t} \vec{e}_3 = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \vec{e}_3. \quad (1.28)$$

Limitním případem průměrné úhlové rychlosti pro $\Delta t \rightarrow 0$ je *okamžitá úhlová rychlost* hmotného bodu v čase t

$$\vec{\omega}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi(t)}{dt} \vec{e}_3 = \dot{\varphi}(t) \vec{e}_3. \quad (1.29)$$

Dále definujeme *průměrné úhlové zrychlení* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \frac{\Delta \vec{\omega}_{[t, t + \Delta t]}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}(t + \Delta t) - \vec{\omega}(t)}{\Delta t} \quad (1.30)$$

a *okamžitá úhlové zrychlení* hmotného bodu v čase t

$$\vec{\varepsilon}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\omega}(t + \Delta t) - \vec{\omega}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \dot{\vec{\omega}}(t) = \ddot{\varphi}(t) \vec{e}_3. \quad (1.31)$$

Pro velikost vektoru okamžité rychlosti hmotného bodu, který se pohybuje po kružnici, platí

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right| = R |\omega_3(t)|, \quad (1.32)$$

kde jsme označili $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega_3(t))$. Protože vektory $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ a $\vec{\omega}(t)$ tvoří v uvedeném pořadí ortogonální pravotočivou soustavu¹, dostáváme odtud

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = R \vec{n}(t) \times \vec{\omega}(t). \quad (1.33)$$

Vektorovým násobením posledního vztahu zleva vektorem $\vec{r}(t)$ a využitím identity $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\vec{B})\vec{C}$ získáme pro $\vec{\omega}(t)$ vyjádření

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)}{\vec{r}(t) \vec{r}(t)} = \frac{\vec{v}(t) \times \vec{n}(t)}{R}. \quad (1.34)$$

Dosadíme-li jej do definičního vztahu pro okamžitá úhlová zrychlení, vychází po úpravě

$$\vec{\varepsilon}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{\vec{a}_\tau(t) \times \vec{n}(t)}{R}. \quad (1.35)$$

V analogii s (1.34) a (1.35) pak zavádíme *okamžitou úhlovou rychlost* a *okamžitá úhlová zrychlení* hmotného bodu, který se pohybuje po obecné trajektorii, vztahy

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\vec{v}(t) \times \vec{n}(t)}{\mathcal{R}(t)}, \quad \vec{\varepsilon}(t) = \frac{\vec{a}_\tau(t) \times \vec{n}(t)}{\mathcal{R}(t)}, \quad (1.36)$$

v nichž $\mathcal{R}(t)$ je poloměr odpovídající oskulační kružnice, určený vztahem (1.15).

¹Vektor okamžité úhlové rychlosti $\vec{\omega}(t)$ je vždy souhlasně rovnoběžný s vektorem binormály $\vec{\beta}(t)$.

2. Popis pohybu hmotného bodu různými pozorovateli

Veličiny definované v předchozí kapitole vykazují závislost na způsobu volby vztažné soustavy. Proto vzniká potřeba nalézt mezi nimi příslušné *transformační vztahy*.

Uvažujme tedy o dvou vztažných soustavách $S = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ a $S' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$. Nejjednodušší situace nastává v případě času. Zkušenost, že čas plyne ve všech vztažných soustavách stejně, tj.

$$t = t', \quad (2.1)$$

mu v rámci klasické mechaniky umožňuje přiřadit roli univerzálního parametru. Transformační vztahy mezi ostatními veličinami jako funkcemi času t pak vyjadřujeme podle okolností dvojným způsobem: vektorově a maticově.

2.1 Vektorová formulace

Označme $\vec{r}(t)$ polohový vektor hmotného bodu v soustavě S , $\vec{r}'(t)$ polohový vektor téhož hmotného bodu v soustavě S' a $\vec{b}(t) = \overrightarrow{OO'}$ polohový vektor bodu O' v soustavě S (obr. 2.1). Tyto vektory splňují vztah

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{b}(t), \quad (2.2)$$

z něž odvodíme souvislost mezi rychlostí $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ hmotného bodu vzhledem k soustavě S a rychlostí $\vec{v}'(t) = \frac{d'\vec{r}'(t)}{dt}$ hmotného bodu vzhledem k soustavě S' . Symbolem

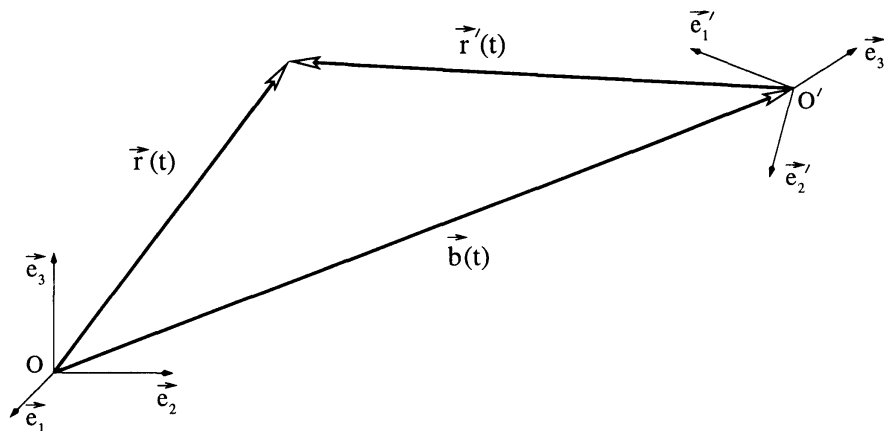
$$\frac{d}{dt}, \quad \text{resp.} \quad \frac{d'}{dt}$$

přítom vyjadřujeme, že časovou změnu příslušné veličiny posuzujeme z hlediska soustavy S , resp. S' .

Derivování (2.2) podle času dává

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}, \quad (2.3)$$

kde jsme s ohledem na přehlednost zápisů již nevyznačovali závislosti jednotlivých veličin na čase.



Obr. 2.1. Polohový vektor hmotného bodu ve dvou různých vztažných soustavách

Předpokládejme, že soustava S' koná vzhledem k soustavě S zcela obecný pohyb, složený z *posuvného* (*translačního*) pohybu bodu O' rychlostí $\vec{v}_t = \frac{d\vec{b}}{dt}$ a z *otáčivého* (*rotačního*) pohybu báze

$\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ kolem bodu O' úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Podle obr. 2.2 platí pro libovolný vektor \vec{u} , který je v soustavě S' neproměnný,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (2.4)$$

Pokud se navíc vektor \vec{u} mění také v soustavě S' , platí obecný vztah

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d'\vec{u}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (2.5)$$

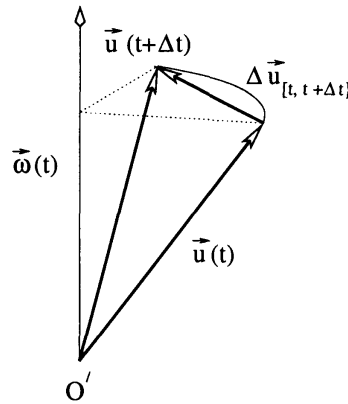
Jeho aplikací na \vec{r}' vychází z (2.3)

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{v}_u. \quad (2.6)$$

Veličina

$$\vec{v}_u = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (2.7)$$

souvisí se vzájemným pohybem vztažných soustav S a S' . Nazýváme ji *unášivou rychlostí* hmotného bodu, neboť představuje rychlost, již pozorovatel v soustavě S připíše hmotnému bodu, který je trvale v klidu v počátku soustavy S' .



Obr. 2.2. K vyjádření změny vektoru \vec{u} vzhledem ke dvěma různým vztažným soustavám

Podobně odvodíme vztah mezi zrychlením $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ hmotného bodu vzhledem k soustavě S a zrychlením hmotného bodu $\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt}$ vzhledem k soustavě S' . Označíme-li $\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$ zrychlení bodu O' vzhledem k soustavě S , dostáváme

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{a}' + \vec{a}_u. \quad (2.8)$$

Veličinu

$$\vec{a}_u = \vec{a}_t + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' \quad (2.9)$$

nazýváme *unášivým zrychlením* hmotného bodu.

Zdůrazněme, že složky všech vektorů vystupujících ve vztazích (2.2) – (2.9) musí být vyjádřeny vždy ve stejné bázi, tedy buď v bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, nebo v bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$. Souvislost mezi vyjádřením složek daného vektoru v různých bázích ukazuje následující oddíl.

2.2 Maticová formulace

Uvažme libovolný vektor \vec{u} . Jeho složky nechť jsou v bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ soustavy S

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_S \quad (2.10)$$

a v bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ soustavy S'

$$\vec{u} = (u'_1, u'_2, u'_3)_{S'}, \quad (2.11)$$

tj.

$$\vec{u} = u_i \vec{e}_i = u'_i \vec{e}'_i, \quad \text{kde } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.12)$$

Každý z vektorů báze $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ však můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, tedy

$$\vec{e}'_i = a_{ij} \vec{e}_j, \quad \text{kde } i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.13)$$

Regulární matici

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

nazýváme *maticí přechodu od báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ k bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$* . Její prvky a_{ij} jsou v případě vzájemného pohybu soustav S a S' obecně funkcemi času. Spojením (2.12) a (2.13) dostáváme

$$\vec{u} = u_j \vec{e}_j = u'_i a_{ij} \vec{e}_j \quad (2.15)$$

a odtud, vzhledem k jednoznačnosti vyjádření složek vektoru \vec{u} v dané bázi,

$$u_j = u'_i a_{ij}, \quad \text{resp. } \mathbf{u} = \mathbf{u}' A, \quad (2.16)$$

kde $\mathbf{u} = (u_i)$ a $\mathbf{u}' = (u'_i)$ jsou postupně řádkové matice tvořené složkami vektoru \vec{u} v bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ a v bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$. Obě tyto báze jsou ortonormální, proto je matice A ortogonální, tj.

$$A^T = A^{-1}. \quad (2.17)$$

Odtud

$$A A^T = A^T A = E, \quad \text{resp. } a_{ij} a_{kj} = a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}. \quad (2.18)$$

Vztahy (2.18) nazýváme *relacemi ortogonalit*. Z nich a z předpokládané pravotočivosti obou bází vyplývá, že

$$\det A = 1. \quad (2.19)$$

Protože A^T má význam matice přechodu od báze $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ k bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, platí

$$u'_j = u_i a_{ji}, \quad \text{resp. } \mathbf{u}' = \mathbf{u} A^T. \quad (2.20)$$

Uvedené obecné závěry nyní použijeme k odvození transformačních vztahů pro rychlost a zrychlení hmotného bodu vzhledem ke vztažené soustavě S a S' . Označme, stejně jako v předchozím oddíle, $\vec{r}(t)$ polohový vektor hmotného bodu v soustavě S a $\vec{r}'(t)$ polohový vektor téhož hmotného bodu v soustavě S' . Dále označme

$$\mathbf{r} = (x_i) \quad (2.21)$$

řádkovou matici složek vektoru \vec{r} v soustavě S a

$$\mathbf{r}' = (x'_i) \quad (2.22)$$

řádkovou matici složek vektoru \vec{r}' v soustavě S' . Tyto matice současně reprezentují souřadnice hmotného bodu v soustavě S a v soustavě S' . Podle (2.2) a (2.16) platí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' A + \mathbf{B}, \quad (2.23)$$

kde B je řádková matice tvořená složkami vektoru $\vec{b} = \overrightarrow{OO'}$, vyjádřenými v soustavě S . Derivováním (2.23) podle času vychází

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'A + r'\dot{A} + \mathbf{v}_t, \quad (2.24)$$

kde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ je řádková matice složek vektoru rychlosti hmotného bodu vzhledem k soustavě S , matice $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}'}$ má podobný význam a $\mathbf{v}_t = \dot{B}$. Druhá derivace pak v souladu se zavedeným způsobem označení dává

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'A + 2\mathbf{v}'\dot{A} + r'\ddot{A} + \mathbf{a}_t. \quad (2.25)$$

Vzhledem k tomu, že A je maticí přechodu mezi bázemi soustav, které se v obecném případě vzájemně otáčejí, musí její prvky souviset se složkami vektoru úhlové rychlosti. Všimněme si této souvislosti podrobněji.

Nechť jsou v bázi soustavy S složky vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)_S$. Uvažme opět libovolný vektor \vec{u} . Užitím (2.16) a (2.20) vychází

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}'A + \mathbf{u}'\dot{A} = \dot{\mathbf{u}}'A + \mathbf{u}'A^T\dot{A}, \quad \text{resp.} \quad \frac{d u_i}{dt} = \frac{d' u_i}{dt} + a_{jk}\dot{a}_{ji}u_k. \quad (2.26)$$

Porovnání posledního vztahu s (2.5) dává

$$(\vec{\omega} \times \vec{u})_i = \epsilon_{ijk}\omega_j u_k = a_{jk}\dot{a}_{ji}u_k, \quad (2.27)$$

kde ϵ_{ijk} je Levi-Civitův symbol. Libovolnost vektoru \vec{u} vede k závěru

$$\epsilon_{ijk}\omega_j = a_{jk}\dot{a}_{ji}, \quad \text{resp.} \quad \Omega = A^T\dot{A}, \quad (2.28)$$

kde

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Určíme-li z (2.28)

$$\dot{A} = A\Omega \implies \ddot{A} = A\Omega^2 + A\dot{\Omega} \quad (2.30)$$

a dosadíme do transformačních vztahu pro rychlost (2.24) a zrychlení (2.25), dostaneme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'A + r'A\Omega + \mathbf{v}_t, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'A + 2\mathbf{v}'A\Omega + r'A\Omega^2 + r'A\dot{\Omega} + \mathbf{a}_t. \quad (2.32)$$

Analogicky lze vyjádřit jednotlivé veličiny vztažené k soustavě S' prostřednictvím odpovídajících veličin vztažených k soustavě S .

3. Dynamika hmotného bodu

Způsob zavedení veličin popisujících pohyb hmotného bodu nezávisí na volbě vztažné soustavy. Z kinematického hlediska jsou tedy všechny vztažné soustavy rovnocenné. Při formulaci zákonů dynamiky je však třeba odlišovat preferované soustavy *inerciální* od ostatních – *neinerciálních*.

3.1 Inerciální vztažné soustavy

K definici preferované vztažné soustavy slouží abstraktní představa *volného hmotného bodu* jako hmotného bodu, který je zcela oproštěn od interakce s ostatními hmotnými objekty. Nalezneme-li (v rámci požadované přesnosti) čtveřici volných hmotných bodů, které neleží v jedné rovině, můžeme s nimi spojit vztažnou soustavu. Tuto vztažnou soustavu nazveme *inerciální*. Jedna z možných formulací *prvního Newtonova zákona* je potom následující:

V inerciální vztažné soustavě je každý volný hmotný bod v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.

Platnost prvního Newtonova zákona umožňuje vybrat inerciální vztažnou soustavu tak, že její báze je ortonormální a pravotočivá. Takové vztažné soustavy budeme mít v dalším textu také na mysli.

Z transformačního vztahu (2.6) pro rychlost hmotného bodu

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

vyplývá, že pokud je jistá soustava S inerciální, pak je inerciální také každá jiná soustava S' , pro kterou

$$\vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \overrightarrow{\text{konst.}} \quad (3.1)$$

Vzhledem k libovolnosti vektoru \vec{r}' je inerciálnost soustavy S' zaručena právě tehdy, když platí

$$\vec{v}_t = \overrightarrow{\text{konst.}}, \quad \vec{\omega} = \vec{0}. \quad (3.2)$$

Inerciálními jsou proto všechny vztažné soustavy, které se vzhledem k dané inerciální soustavě pohybují rovnoměrně přímočaře a neotáčejí se. Ostatní soustavy označujeme jako *neinerciální*.

Experimenty ukazují, že modelu inerciální soustavy dobře vyhovuje *Galileova vztažná soustava*, jejíž počátek leží ve středu hmotnosti sluneční soustavy a osy mají vzhledem ke stálícím stálý směr. Vztažná soustava spojená se Zemí¹ – *laboratorní vztažná soustava* – je neinerciální, protože se vzhledem ke Galileově soustavě pohybuje po zakřivené trajektorii a zároveň se otáčí. Při běžných pokusech a dějích však nejsou projevy její neinerciálnosti příliš významné (podrobněji kapitola 5.), a proto ji v prvním přiblížení obvykle považujeme za inerciální.

Z hlediska aplikací má zásadní význam *druhý Newtonův zákon*, který postuluje souvislost mezi časovou změnou hybnosti $\vec{p} = m\vec{v}$ hmotného bodu o hmotnosti m a výslednicí \vec{F} sil, kterými na tento bod působí okolní hmotné objekty:

V inerciální vztažné soustavě je derivace hybnosti hmotného bodu podle času rovna výslednici sil, které na něj působí, tj.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

¹Zemské těleso zde budeme pro jednoduchost pokládat za tuhé.

V případě $m = konst.$, jímž se budeme nadále zabývat, má druhý Newtonův zákon jednoduchý tvar

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (3.3)$$

Abychom mohli druhého Newtonova zákona použít k výpočtu trajektorie hmotného bodu, musíme jej doplnit *silovými zákony a principem superpozice sil*. Obsahem silového zákona je kvantitativní vyjádření síly, kterou na hmotný bod působí konkrétní hmotný objekt. Příkladem je vztah pro gravitační sílu, kterou na hmotný bod o hmotnosti m_1 a polohovém vektoru \vec{r}_1 působí jiný hmotný bod o hmotnosti m_2 polohovém vektoru \vec{r}_2

$$\vec{F}_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (3.4)$$

kde κ je experimentálně zjištěná *gravitační konstanta*. Princip superpozice sil pak určuje výslednici sil \vec{F}_i (vyjádřených odpovídajícími silovými zákony), jimiž na hmotný bod současně působí různé okolní objekty, předpisem

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{N-1} + \vec{F}_N. \quad (3.5)$$

Poslední, *třetí Newtonův zákon*, popisuje vzájemné působení hmotných bodů:

Každé dva hmotné body na sebe navzájem působí stejně velkými, ale opačně orientovanými silami. Tyto síly leží na přímé spojnici obou bodů a současně vznikají i zanikají.

Uvažme dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2 , které nejsou v interakci s jinými hmotnými objekty. Kombinací druhého a třetího Newtonova zákona dostáváme

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \implies \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (3.6)$$

Vztah (3.6) dovoluje z experimentálně zjištěných zrychlení určovat hmotnosti hmotných bodů vzhledem k předem danému etalonu. Z měření zrychlení hmotných bodů o známých hmotnostech, které jsou podrobeny interakci s konkrétním objektem, pak vyvozujeme tvar příslušného silového zákona².

Všimněme si dále soustavy n interagujících hmotných bodů. Zkušenost ukazuje, že výsledná síla, již na vybraný hmotný bod působí $(n-1)$ ostatních bodů, závisí obecně na polohách \vec{r}_i a rychlostech $\dot{\vec{r}}_i$ všech bodů, na čase t a na q_i skalárních parametrech α_{ij} , které charakterizují i -tý bod (například hmotnost, elektrický náboj atd.). Platí tedy

$$\vec{F} = \vec{F}(\alpha_{ij}, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t), \quad \text{kde } i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, q_i\}. \quad (3.7)$$

Trajektorie vybraného hmotného bodu potom vyhovuje soustavě tří diferenciálních *pohybových rovnic*

$$m\ddot{x}_1 = F_1(\alpha_{ij}, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t), \quad (3.8)$$

$$m\ddot{x}_2 = F_2(\alpha_{ij}, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t), \quad (3.9)$$

$$m\ddot{x}_3 = F_3(\alpha_{ij}, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad (3.10)$$

²V literatuře se někdy rozlišuje mezi hmotností vystupující v druhém Newtonově zákoně (*setrvačná hmotnost*) a hmotností figuruující ve vztahu pro gravitační sílu (*gravitační hmotnost*). Protože jsou si podle četných experimentů tyto veličiny úměrné, postulujeme se v rámci klasické fyziky jejich rovnost a mluvíme pouze o hmotnosti.

a počátečním podmínkám, obvykle zadaným ve tvaru

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0, \quad (3.11)$$

kde t_0 je vhodný okamžik (zpravidla volíme $t_0 = 0$). Rovnice (3.8) – (3.10) jsou součástí soustavy $3n$ skalárních diferenciálních pohybových rovnic pro n hmotných bodů.

V mechanice často řešíme případ, kdy pohyb vybraného hmotného bodu ovlivňuje pohyb ostatních zanedbatelným způsobem. Polohy a rychlosti ostatních hmotných bodů lze pak považovat za známé funkce času a pro vybraný hmotný bod psát

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\alpha_{ij}, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (3.12)$$

3.2 Neinerciální vztažné soustavy. Fiktivní síly

Většina vztažných soustav, které nás v každodenním životě obklopují (například rozjíždějící se dopravní prostředky, výtahy, ale také samotná Země), je neinerciální. Vyjasněme proto, jak se hmotný bod v takových vztažných soustavách pohybuje.

Označme $S = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ inerciální vztažnou soustavu a $S' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ soustavu neinerciální. Transformační vztah pro zrychlení hmotného bodu má tvar (2.8)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{a}' + \vec{a}_u.$$

Násobením obou stran hmotností m hmotného bodu dostáváme s využitím druhého Newtonova zákona

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

vztah

$$m\vec{a}' = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - m\vec{a}_u = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{F}^*. \quad (3.13)$$

Výraz

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_u = -m\vec{a}_t - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') - m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}') \quad (3.14)$$

nazýváme *fiktivní silou*, protože má fyzikální rozměr síly, avšak na rozdíl od *reálných sil* \vec{F}_i nemá v rámci newtonovské interpretace původ v interakci hmotného bodu s okolními hmotnými objekty. Tuto „sílu“ je nutno chápat pouze jako dodatečný faktor, který formálně rozšiřuje platnost druhého Newtonova zákona i na neinerciální vztažné soustavy. Fiktivní sílu \vec{F}^* tvoří součet čtyř členů: *translační (fiktivní) síla*

$$\vec{F}_t^* = -m\vec{a}_t, \quad (3.15)$$

odstředivá (fiktivní) síla

$$\vec{F}_{od}^* = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')], \quad (3.16)$$

Coriolisova (fiktivní) síla

$$\vec{F}_C^* = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') \quad (3.17)$$

a *Eulerova (fiktivní) síla*³

$$\vec{F}_E^* = -m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'). \quad (3.18)$$

Zápis (3.13) nazveme *druhým Newtonovým zákonem v neinerciální vztažné soustavě S'* . Třetí Newtonův zákon zůstává v platnosti beze změny, protože se týká reálných sil vzájemného působení hmotných bodů.

³Literatura někdy zavádí podobné názvy také pro odpovídající členy unášivého zrychlení. Terminologie však není jednotná, a proto ji zde neuvádíme.

Závěrem tohoto oddílu si krátce všimneme laboratorní vztažné soustavy. Lze ukázat (kapitola 5.), že vliv Coriolisovy i Eulerovy fiktivní síly na pohyb hmotného bodu často bývá zanedbatelný. Do druhého Newtonova zákona v laboratorní vztažné soustavě však vždy musíme zahrnout měřitelnou výslednici reálné gravitační síly Země \vec{F}_g , fiktivní translační síly \vec{F}_t^* a fiktivní odstředivé síly \vec{F}_{od}^*

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_t^* + \vec{F}_{od}^*, \quad (3.19)$$

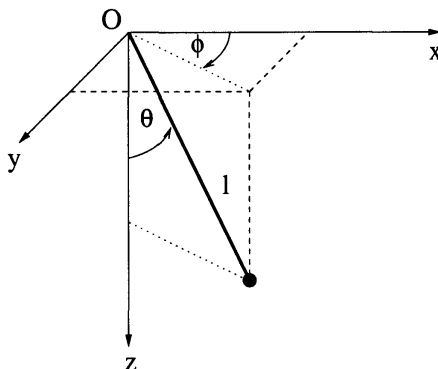
která je známá jako *tíhová síla*. Tíhová síla působí v laboratorní vztažné soustavě na každý hmotný bod, bez ohledu na to, zda se pohybuje nebo ne. Zrychlení, které tíhová síla udílí hmotnému bodu, nazýváme *tíhovým zrychlením*.

4. Pohyb sférického kyvadla

V této kapitole si všimneme pohybu jednoduchého fyzikálního objektu – *sférického kyvadla*. Rozumíme jím hmotný bod v homogenním tíhovém poli Země, jehož pohyb je vázán na kulovou plochu (sféru). Modelu sférického kyvadla vyhovuje malé tělísko zavěšené na niti nebo tyči zanedbatelné hmotnosti a neproměnné délky, případně tělísko, které klouže po podložce se sférickým povrchem¹.

4.1 Základní informace o sférickém kyvadle

Pohyb sférického kyvadla popíšeme v laboratorní vztahné soustavě $S = \langle O; x, y, z \rangle$, kterou budeme v celé této kapitole považovat za soustavu inerciální. Její počátek O ztotožníme se středem vazební kulové plochy (předpokládáme tak, že střed sféry je v laboratorní vztahné soustavě v klidu), osu z orientujeme ve směru tíhového zrychlení \vec{g} a zbývající dvě osy x, y zvolíme tak, aby soustava byla ortogonální a pravotočivá (obr. 4.1).



Obr. 4.1. Zavedení vztahné soustavy pro popis pohybu sférického kyvadla

Kartézské souřadnice kyvadla $[x(t), y(t), z(t)]$ splňují vazební podmínku

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = l^2 = \text{konst.}, \quad (4.1)$$

kde l je poloměr kulové plochy. Tato podmínka snižuje počet parametrů, které popisují polohu sférického kyvadla, na dva (např. [3]). Abychom je vybrali, přejdeme – s ohledem na geometrii problému – od kartézských souřadnic kyvadla k souřadnicím sférickým $[r(t), \theta(t), \phi(t)]$. V nich má vazební podmínka tvar

$$r(t) = l = \text{konst.} \quad (4.2)$$

Poloha kyvadla je tedy v každém okamžiku jednoznačně určena dvojicí úhlů $[\theta(t), \phi(t)]$. Výjimku tvoří pouze body o kartézských souřadnicích $[0, 0, \pm l]$, pro něž není úhel ϕ definován.

Zanedbáme-li odpor prostředí, působí na kyvadlo pouze tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a vazební síla \vec{T} , která má v každém bodě trajektorie kyvadla směr normály ke kulové ploše. Vazební silou působí na kyvadlo podle způsobu jeho realizace (nit nebo tyč), eventuálně podložka se sférickým povrchem. Pohybová rovnice kyvadla má tedy tvar

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T}. \quad (4.3)$$

¹Tělísko, které se po ploše valí, neodpovídá představě hmotného bodu, protože je nutné uvažovat nejen o jeho posuvném pohybu, ale také o pohybu otáčivém.

Jejím rozepsáním do kartézských, případně sférických složek obdržíme soustavu tří diferenciálních rovnic druhého řádu pro tři neznámé funkce času $\theta(t)$, $\phi(t)$ a $T(t)$. Postup je však poměrně pracný a získané rovnice jsou málo přehledné.

Jako ukázkou rozepíšeme pohybovou rovnici (4.3) do kartézských složek. Dostáváme

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{l}T, \quad (4.4)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{l}T, \quad (4.5)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{z}{l}T + mg, \quad (4.6)$$

kde $|T| = |\vec{T}|$ a $T > 0$ právě tehdy, když je vazební síla orientovaná do středu kulové plochy (T zde – na rozdíl od označení zavedeného v předchozích kapitolách – nevyjadřuje velikost vazební síly)².

Do rovnic (4.4) – (4.6) pak dosadíme transformační vztahy

$$x = l \sin \theta \cos \phi, \quad y = l \sin \theta \sin \phi, \quad z = l \cos \theta \quad (4.7)$$

a jejich druhé derivace podle času, pro něž vychází

$$\ddot{x} = l (\cos \theta \cos \phi \ddot{\theta} - \sin \theta \sin \phi \ddot{\phi} - \sin \theta \cos \phi \dot{\theta}^2 - 2 \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} \dot{\phi} - \sin \theta \cos \phi \dot{\phi}^2), \quad (4.8)$$

$$\ddot{y} = l (\cos \theta \sin \phi \ddot{\theta} + \sin \theta \cos \phi \ddot{\phi} - \sin \theta \sin \phi \dot{\theta}^2 + 2 \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} \dot{\phi} - \sin \theta \sin \phi \dot{\phi}^2), \quad (4.9)$$

$$\ddot{z} = -l (\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2). \quad (4.10)$$

Jako nejvýhodnější se ukazuje odvodit z pohybové rovnice kyvadla (4.3) tvar zákona zachování mechanické energie a druhé impulzové věty pro daný případ (např. [11], [17], [26]). Protože je třetí složka výsledného momentu působících sil vzhledem k bodu O nulová, nemění se podle druhé impulzové věty odpovídající složka momentu hybnosti kyvadla. Důsledkem pohybové rovnice (4.3) jsou tedy dva obecně nezávislé první integrály pohybu kyvadla³: mechanická energie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) - mgl \cos \theta = \text{konst.}, \quad (4.11)$$

kde hladinou nulové tíhové potenciální energie je vodorovná rovina $z = 0$, a třetí složka momentu hybnosti

$$L_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y) = ml^2 \sin^2\theta \dot{\phi} = \text{konst.} \quad (4.12)$$

Konstanty E a L_z jsou předepsány počátečními podmínkami kyvadla.

Vyjádření integrálů pohybu prostřednictvím sférických souřadnic θ a ϕ má smysl pouze v případě, že je úhel ϕ definován, tj. pro $\sin \theta \neq 0$. Za uvedeného předpokladu můžeme z (4.12) osamostatnit

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta} \quad (4.13)$$

a dosadit do (4.11). Vychází

$$E = \frac{1}{2}ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \sin^2\theta} \right) - mgl \cos \theta. \quad (4.14)$$

Zpětným dosazením $z = l \cos \theta$ do (4.14) získáme po úpravě vztah

$$\dot{z}^2 = \frac{f(z)}{(ml)^2} \quad \Longrightarrow \quad \dot{z} = \pm \frac{\sqrt{f(z)}}{ml} \quad \text{pro } f(z) \geq 0, \quad (4.15)$$

v němž jsme označili

$$f(z) = -2m^2gz^3 - 2Emz^2 + 2m^2gl^2z + 2Eml^2 - L_z^2 = 2m(E + mgz)(l^2 - z^2) - L_z^2. \quad (4.16)$$

²Zatímco se tělísko zavěšené na niti pohybuje po kulové ploše právě tehdy, když $T \geq 0$ (nit může být pouze napínána), pro tělísko upevněné na tyči žádné takové omezení neexistuje (tyč může být jak napínána, tak i stlačována).

³O nezávislosti funkcí je pojednáno např. v [24].

Všimněme si nyní případu, kdy v průběhu pohybu nastane $\sin \theta = 0$, tj. kyvadlo prochází některým z bodů o kartézských souřadnicích $[0, 0, \pm l]$. Dosazením těchto souřadnic do (4.12) zjistíme, že

$$L_z = 0. \quad (4.17)$$

Předpokládejme naopak, že platí $L_z = 0$. Potom

$$L_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y) = 0 \quad \implies \quad y(t) = Cx(t), \quad (4.18)$$

kde C je integrační konstanta určená počátečními podmínkami kyvadla. Pro $L_z = 0$ se tedy kyvadlo pohybuje ve stále stejné svislé rovině, která prochází bodem O . Polohu kyvadla v této rovině popisuje jediná souřadnice θ , jejímž prostřednictvím se vyjadřuje mechanická energie jako

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{konst.} \quad (4.19)$$

Poslední rovnost se nezmění vynásobením jejích stran výrazem $\sin^2 \theta$. Po zpětném dosazení $z = l \cos \theta$ a úpravě opět získáme dříve odvozené výsledky (4.15) a (4.16).

Obecně platné vztahy (4.15) a (4.16) slouží k nalezení závislosti $z(t)$, resp. $\theta(t)$. Protože však $f(z)$ představuje polynom třetího stupně, je – při volbě znaménka odpovídající směru pohybu kyvadla – závislost $z(t)$, resp. $\theta(t)$ eliptickým integrálem a nelze ji tudíž v obecném případě vyjádřit pomocí elementárních funkcí (např. [24]). Totéž platí také pro závislost $\phi(t)$, která je za předpokladu $L_z \neq 0$ určena diferenciální rovnicí (4.13). I přesto lze užitím vztahů (4.13), (4.15) a (4.16) získat alespoň kvalitativní představu o pohybu sférického kyvadla, a to v závislosti na jeho parametrech m , l a na vzájemném vztahu integračních konstant E , L_z .

4.2 Kvalitativní charakteristika pohybu sférického kyvadla

Pro třetí souřadnici sférického kyvadla platí

$$z \in [-l, l]. \quad (4.20)$$

Další omezení přípustné hodnoty proměnné z je podle (4.15) dáno požadavkem

$$f(z) \geq 0. \quad (4.21)$$

Abychom získali o pohybu kyvadla konkrétnější představu, vyšetříme průběh funkce $f(z)$ v závislosti na volbě hodnot E a L_z . Pro význačné body funkce platí

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = -\infty, \quad (4.22)$$

$$f(-l) = -L_z^2 \leq 0, \quad f(+l) = -L_z^2 \leq 0. \quad (4.23)$$

Polynom reprezentovaný $f(z)$ je třetího stupně, a proto má alespoň jeden reálný kořen z_1 . Ten leží podle předchozích závěrů v intervalu

$$z_1 \in (-\infty, -l]. \quad (4.24)$$

Zjistíme, za jakých podmínek má rovnice $f(z) = 0$ alespoň jeden reálný kořen v intervalu přípustných hodnot $z \in [-l, l]$. Výpočtem první a druhé derivace se přesvědčíme, že v bodě

$$z_{\min} = -\frac{\sqrt{E^2 + 3(mgl)^2} + E}{3mg} < 0 \quad (4.25)$$

nastává lokální minimum funkce $f(z)$ a v bodě

$$z_{\max} = \frac{\sqrt{E^2 + 3(mgl)^2} - E}{3mg} > 0 \quad (4.26)$$

nastává lokální maximum. Protože podle zákona zachování mechanické energie (4.11), resp. (4.19) splňují hodnoty E podmínku

$$E \geq -mgl, \quad (4.27)$$

platí

$$z_{\max} \in (0, l]. \quad (4.28)$$

Rovnice $f(z) = 0$ musí mít z fyzikálních důvodů v intervalu $z \in [-l, l]$ alespoň jeden reálný kořen, odpovídající nulové z -ové složce rychlosti kyvadla (srv. (4.15)). Proto mohou s ohledem na dosavadní informace o průběhu funkce $f(z)$ nabývat integrály pohybu kyvadla pouze takových hodnot E a L_z , aby platilo

$$f(z_{\max}) \geq 0, \quad (4.29)$$

tj.

$$L_z^2 \leq \frac{4E^2 \left[\sqrt{E^2 + 3(mgl)^2} - E \right] + 12(mgl)^2 \left[\sqrt{E^2 + 3(mgl)^2} + 3E \right]}{27mg^2}. \quad (4.30)$$

Fyzikálně možné průběhy funkce $f(z)$ jsou schematicky znázorněny na obr. 4.2.

Pro potřeby další diskuze ještě určíme z -ovou složku zrychlení kyvadla v libovolné z přípustných poloh. Užitím (4.15) vychází

$$\ddot{z} = \pm \frac{1}{ml} \frac{1}{2\sqrt{f(z)}} \frac{df(z)}{dz} \dot{z} = \pm \frac{1}{ml} \frac{1}{2\sqrt{f(z)}} \frac{df(z)}{dz} \left(\pm \frac{\sqrt{f(z)}}{ml} \right) = \frac{1}{2(ml)^2} \frac{df(z)}{dz}. \quad (4.31)$$

Nyní přikročíme k popisu pohybu sférického kyvadla. V závislosti na hodnotě L_z mohou nastat dva kvalitativně odlišné případy: $L_z \neq 0$ a $L_z = 0$.

(a) Předpokládejme, že $L_z \neq 0$ (situace znázorněné na obr. 4.2(a)). Z (4.12) dostáváme, že platí $\sin \theta \neq 0$ a tím také

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta}.$$

Protože rychlost $\dot{\phi}$ nemění znaménko, pohybuje se kolmý průmět kyvadla do vodorovné roviny ve stále stejném smyslu. Přitom mohou nastat tyto možnosti:

I. V (4.29), resp. (4.30) platí ostrá nerovnost, tj. rovnice $f(z) = 0$ má v intervalu $(-l, l)$ dva různé reálné kořeny $z_2 < z_3$ (obr. 4.2(a) I.). Vzhledem k (4.23) a (4.28) je vždy

$$z_3 \in (0, l), \quad (4.32)$$

kdežto podle (4.16) je

$$\begin{array}{llll} f(0) > 0, & \text{tj.} & z_2 \in (-l, 0) & \text{pro} & 2Eml^2 > L_z^2, \\ f(0) = 0, & \text{tj.} & z_2 = 0 & \text{pro} & 2Eml^2 = L_z^2, \\ f(0) < 0, & \text{tj.} & z_2 \in (0, l) & \text{pro} & 2Eml^2 < L_z^2. \end{array} \quad (4.33)$$

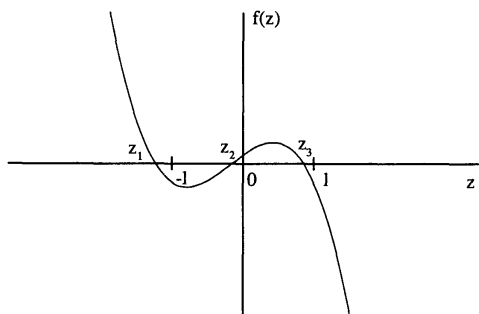
(Snadno se prověří, že žádná z trojice podmínek (4.33) není v rozporu s (4.27) a (4.30)). Podle obr. 4.2(a) I. a vztahů (4.15), (4.31) dále dostáváme

$$\dot{z} = 0, \quad \frac{df(z)}{dz} > 0 \implies \ddot{z} > 0 \quad \text{pro} \quad z = z_2, \quad (4.34)$$

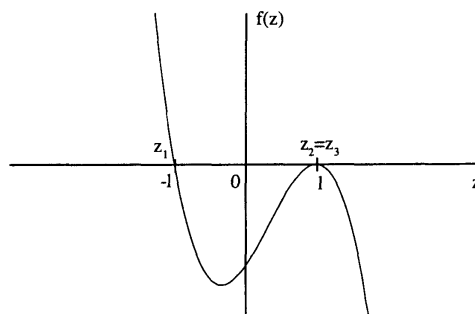
$$\dot{z} = 0, \quad \frac{df(z)}{dz} < 0 \implies \ddot{z} < 0 \quad \text{pro} \quad z = z_3, \quad (4.35)$$

$$\dot{z} \neq 0 \quad \text{pro} \quad z \in (z_2, z_3). \quad (4.36)$$

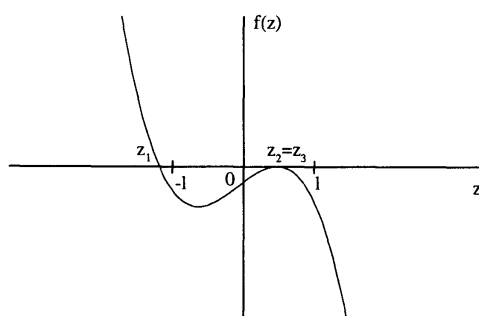
I.



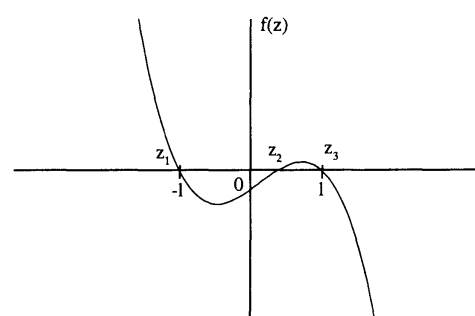
I.



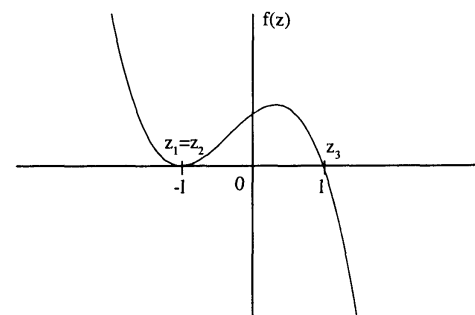
II.



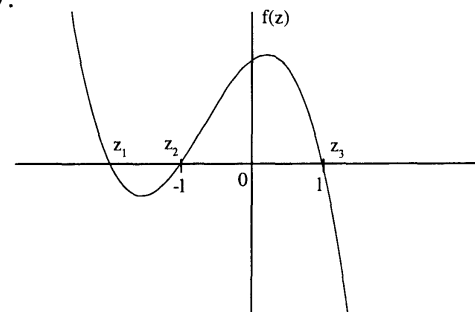
II.



III.



IV.



(a)

(b)

Obr. 4.2. Nákres možných průběhů funkce $f(z)$ pro sférické kyvadlo: (a) $L_z \neq 0$, (b) $L_z = 0$

Poněvadž pro žádnou hodnotu $z \in [z_2, z_3]$ není současně splněno $\dot{z} = 0$ a $\ddot{z} = 0$, pohybuje se kyvadlo periodicky mezi dvěma vodorovnými rovinami o rovnicích

$$z = z_2, \quad z = z_3. \quad (4.37)$$

Lze ukázat (např. [3], [26]), že mezi následujícími kontakty s danou hraniční rovinou opíše kyvadlo úhel

$$\Delta\phi > \pi. \quad (4.38)$$

II. V (4.29), resp. (4.30) platí rovnost, tj. rovnice $f(z) = 0$ má v intervalu $\in (-l, l)$ dvojnásobný reálný kořen (obr. 4.2(a) II.). Pro něj vzhledem k (4.23) a (4.28) platí

$$z_2 = z_3 = z_{\max} \in (0, l). \quad (4.39)$$

Kyvadlo se v tomto případě pohybuje rovnoměrně po kružnici, která leží ve vodorovné rovině určené rovnicí

$$z = z_2 = \frac{l}{\cos \theta_0}, \quad (4.40)$$

konstantní úhlovou rychlostí

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta_0} \quad (4.41)$$

(mluvíme o *kónickém kyvadle*).

(b) Předpokládejme, že $L_z = 0$ (situace znázorněné na obr. 4.2(b)). Podle výsledku (4.18) se sférické kyvadlo pohybuje ve stále stejné svislé rovině procházející bodem O (mluvíme o *matematickém* neboli *rovinném kyvadle*). Polynom $f(z)$ je opět třetího stupně, a proto nelze obecný pohyb matematického kyvadla popsat pomocí elementárních funkcí. Oproti případu (a) však z (4.16) ihned získáváme kořeny⁴ rovnice $f(z) = 0$

$$-\frac{E}{mg}, \quad \pm l. \quad (4.42)$$

V závislosti na hodnotě E mohou nastat následující situace:

I. Rovnice $f(z) = 0$ má dva různé reálné kořeny (obr. 4.2(b) I.)

$$z_1 = -l, \quad z_2 = z_3 = z_{\max} = l. \quad (4.43)$$

Tato situace nastane podle (4.42) právě tehdy, když mechanická energie nabývá své nejnižší přípustné hodnoty

$$E = -mgl. \quad (4.44)$$

Kyvadlo tedy setrvává v nejnižším bodě $[0, 0, l]$ vazební kulové plochy (je v rovnovážné poloze stálé).

II. Rovnice $f(z) = 0$ má tři různé reálné kořeny (obr. 4.2(b) II.)

$$-l = z_1 < z_2 < z_3 = l. \quad (4.45)$$

Tato situace nastane podle (4.42) právě tehdy, když

$$-mgl < E < mgl. \quad (4.46)$$

Kyvadlo se (ze stejného důvodu jako v části (a) I.) periodicky pohybuje po oblouku kružnice, který leží ve svislé rovině. Trajektorie je shora omezená vodorovnou rovinou

⁴V případě (a) by bylo možné kořeny rovnice $f(z) = 0$ rovněž získat, například užitím Cardanových vzorců. Výsledky by ale byly pro kvalitativní charakteristiku pohybu kyvadla zbytečné, nehledě na pracnost jejich odvození.

$z = z_2$, v níž má kyvadlo podle zákona zachování mechanické energie (4.19) a vztahu (4.42) nulovou rychlost.

Z (4.19) můžeme odvodit také pohybovou rovnici kyvadla. Derivováním podle času vychází

$$0 = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl \sin\theta\dot{\theta} \quad \implies \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0. \quad (4.47)$$

Tuto rovnici, popisující libovolný pohyb matematického kyvadla, není možné vyřešit explicitně (např. [26]). Pro kmity matematického kyvadla v blízkosti rovnovážné polohy $\theta = 0$ lze ale položit $\sin\theta \doteq \theta$, tj.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (4.48)$$

Obecné řešení poslední (již přibližné) rovnice má tvar

$$\theta(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right), \quad (4.49)$$

kde konstanty C_1, C_2 určujeme z počátečních podmínek kyvadla. Označíme-li $\theta(0) = \theta_0$ a $\dot{\theta}(0) = \omega_0$, dostáváme

$$\theta(t) = \omega_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right). \quad (4.50)$$

III. Rovnice $f(z) = 0$ má dva různé reálné kořeny (obr. 4.2(b) III.)

$$z_1 = z_2 = z_{\min} = -l, \quad z_3 = l. \quad (4.51)$$

Tato situace nastane podle (4.42) právě tehdy, když

$$E = mgl. \quad (4.52)$$

Kyvadlo se nyní může pohybovat po celé kružnici ležící ve svislé rovině. Protože ale platí

$$\dot{z} = 0, \quad \ddot{z} = 0 \quad \text{pro} \quad z = -l, \quad (4.53)$$

dosáhne kyvadlo bodu $z = -l$ za dobu $t \rightarrow \infty$ od uvedení do pohybu. Pokud $z(0) = 0$, setrvává kyvadlo v nejvyšším bodě $[0, 0, -l]$ vazební kulové plochy (je v rovnovážné poloze vratké).

Skutečnost, že bodu $z = -l$ dosáhne kyvadlo pro $t \rightarrow \infty$, lze potvrdit i výpočtem. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat následující volbu počátečních podmínek:

$$z(0) = z_0 \in (-l, l], \quad \dot{z}(0) < 0. \quad (4.54)$$

Polohy $z \in [-l, z_0)$ dosáhne kyvadlo podle (4.15) za dobu

$$t(z) = - \int_{z_0}^z \frac{ml \, dz}{\sqrt{f(z)}}. \quad (4.55)$$

Po dosazení

$$f(z) = -2m^2 g (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 2m^2 g (z + l)^2 (l - z) \quad (4.56)$$

vychází

$$t(z) = - \int_{z_0}^z \frac{l \, dz}{(z + l) \sqrt{2g(l - z)}}. \quad (4.57)$$

Pro $z = -l$ tento integrál diverguje, tj. $t(-l) \rightarrow \infty$.

IV. Rovnice $f(z) = 0$ má tři různé reálné kořeny (obr. 4.2(b) IV.)

$$z_1 \in (-\infty, -l), \quad z_2 = -l, \quad z_3 = l. \quad (4.58)$$

Tato situace nastane podle (4.42) právě tehdy, když

$$E > mgl. \quad (4.59)$$

V nejvyšší poloze vazební kulové plochy je nyní podle zákona zachování mechanické energie (4.19) velikost rychlosti kyvadla nenulová, a proto se kyvadlo pohybuje po kružnici ležící ve svislé rovině ve stále stejném smyslu.

4.3 Sférické kyvadlo s jednostrannou vazbou

Pro sférické kyvadlo platí vazební podmínka (4.1)

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = l^2 = konst.,$$

kteřá odpovídá *oboustranné vazbě hmotného bodu* na kulovou plochu. Pokud však uvažujeme například o pohybu tělíska zavěšeného na nehmotné niti neproměnné délky, platí pro ně vazební podmínka ve tvaru

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leq l^2 = konst. \quad (4.60)$$

a mluvíme o *jednostranné vazbě hmotného bodu* na kulovou plochu. Definici sférického kyvadla odpovídají pouze takové polohy hmotného bodu, pro něž platí v (4.60) znaménko rovnosti. Jako sférické kyvadlo se tedy tělísko zavěšené na niti chová pouze v případě, kdy je nit napnutá, tj. právě když platí (v souladu s označením zavedeným na str. 19) $T \geq 0$. Pro podrobnější diskuzi pohybu takového systému odvodíme vztah pro veličinu T (např. [26]).

Skalárním násobením pohybové rovnice (4.3) polohovým vektorem \vec{r} dostaneme

$$m\ddot{\vec{r}}\vec{r} = m\vec{g}\vec{r} + \vec{T}\vec{r}. \quad (4.61)$$

K určení $\ddot{\vec{r}}\vec{r}$ derivujeme vazební podmínku zapsanou ve tvaru $\vec{r}^2 = l^2 = konst.$ dvakrát podle času. Postupně vychází $\dot{\vec{r}}\vec{r} = 0$ a $\ddot{\vec{r}}\vec{r} + \dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = 0$. Po dosazení $\ddot{\vec{r}}\vec{r} = -\dot{\vec{r}}^2 = -v^2$, $\vec{T}\vec{r} = -Tl$, $\vec{g}\vec{r} = gz$ a $E = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$ do (4.61) získáme hledané vyjádření

$$T = \frac{2E + 3mgz}{l}. \quad (4.62)$$

Tělísko zavěšené na niti se chová jako sférické kyvadlo pouze v oblasti vazební kulové plochy shora omezené vodorovnou rovinou

$$z = z_T = -\frac{2E}{3mg} \quad (\text{tj. } T \geq 0). \quad (4.63)$$

Současně se kyvadlo podle zákona zachování mechanické energie může pohybovat pouze po části kulové plochy shora omezené vodorovnou rovinou

$$z = z_E = -\frac{E}{mg} \quad (\text{tj. } v^2 \geq 0). \quad (4.64)$$

Rovina $z = z_T$ leží pro $E \neq 0$ vždy blíže středu vazební kulové plochy než rovina $z = z_E$. Pro $E = 0$ obě roviny splývají a procházejí středem vazební plochy.

Je zřejmé, že kyvadlo, které se při vhodné volbě počátečních podmínek pohybuje pouze po dolní polokouli vazební plochy, nikdy nepřekročí rovinu $z = z_E$ a tím ani rovinu $z = z_T$, v níž je $T = 0$. Složitější je již případ, kdy kyvadlo v průběhu pohybu vystoupí na horní polokouli ($E > 0$). O tom, zda při dané volbě počátečních podmínek kyvadlo projde rovinou $z = z_T$, rozhoduje znaménko hodnoty $f(z_T)$:

- Pokud $f(z_T) > 0$, prochází kyvadlo během pohybu rovinou $z = z_T$ s nenulovou rychlostí. Je-li kyvadlo realizováno tělískem na niti, opouští v této rovině vazební kulovou plochu a dále se pohybuje po trajektorii šikmého vrhu až do okamžiku, kdy je nit opět napnutá.
- Pokud $f(z_T) = 0$, kyvadlo dosáhne roviny $z = z_T$, která je pro něj současně rovinou omezující jeho pohyb.
- Pokud $f(z_T) < 0$, kyvadlo roviny $z = z_T$ nedosáhne.

K určení typu pohybu sférického kyvadla s jednostrannou vazbou je třeba zjistit hodnotu $f(z_T)$. Dosazením (4.63) do (4.16) pro ni vychází

$$f(z_T) = -\frac{8}{27} \frac{E^3}{mg^2} + \frac{2}{3} Eml^2 - L_z^2. \quad (4.65)$$

Abychom rozhodli o jejím znaménku, vyšetříme průběh funkce

$$g(E) = -\frac{8}{27} \frac{E^3}{mg^2} + \frac{2}{3} Eml^2 - L_z^2. \quad (4.66)$$

Platí

$$\lim_{E \rightarrow -\infty} = +\infty, \quad \lim_{E \rightarrow +\infty} = -\infty. \quad (4.67)$$

Pro sférické kyvadlo jsou však přípustné pouze takové hodnoty mechanické energie E , pro něž je splněna nerovnost (4.27)

$$E \geq -mgl$$

a při daném E dále podmínka (4.30)

$$L_z^2 \leq \frac{4E^2 \left[\sqrt{E^2 + 3(mgl)^2} - E \right] + 12(mgl)^2 \left[\sqrt{E^2 + 3(mgl)^2} + 3E \right]}{27mg^2}.$$

Fyzikálně významným je tedy bod $E = -mgl$ (minimální přípustná hodnota mechanické energie kyvadla), dále bod $E = 0$ (pro $E = 0$ roviny $z = z_E$ a $z = z_T$ splývají) a konečně bod $E = \frac{3}{2}mgl$ (pro $E > \frac{3}{2}mgl$ leží rovina $z = z_T$ nad nejvyšším bodem vazební kulové plochy, a proto je vždy $T > 0$). Pro tyto body vychází

$$g(-mgl) = -\frac{10}{27}m^2gl^3 - L_z^2 < 0, \quad g(0) = -L_z^2 \leq 0, \quad g\left(\frac{3}{2}mgl\right) = -L_z^2 \leq 0. \quad (4.68)$$

Polynom reprezentovaný $g(E)$ je třetího stupně, proto má vždy alespoň jeden reálný kořen E_1 , který podle dosavadních závěrů leží v intervalu

$$E_1 \in (-\infty, -mgl). \quad (4.69)$$

Výpočtem první a druhé derivace zjistíme, že funkce $g(E)$ nabývá v bodě

$$E_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgl \in (-mgl, 0) \quad (4.70)$$

lokálního minima a v bodě

$$E_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}mgl \in (0, mgl) \quad (4.71)$$

lokálního maxima. Pro funkční hodnotu v maximu přitom vychází

$$g(E_{\max}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}m^2gl^3 - L_z^2. \quad (4.72)$$

Podle volby počátečních podmínek kyvadla mohou nastat následující situace (snadno se ověří, že žádná z nich není v rozporu s podmínkami (4.27) a (4.30)):

(a) $L_z \neq 0$ (situace znázorněné na obr. 4.3(a))

I. Pro $L_z^2 > \frac{2\sqrt{3}}{9}m^2gl^3$ je $g(E_{\max}) < 0$ a rovnice $g(E) = 0$ má jeden reálný kořen (obr. 4.3(a) I.)

$$E_1 \in (-\infty, -mgl). \quad (4.73)$$

Při jakékoli volbě hodnot E a L_z platí $g(E) < 0$, a proto je v průběhu pohybu kyvadla vždy $T > 0$.

II. Pro $L_z^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}m^2gl^3$ je $g(E_{\max}) = 0$ a rovnice $g(E) = 0$ má dva různé reálné kořeny (obr. 4.3(a) II.)

$$E_1 \in (-\infty, -mgl), \quad E_2 = E_3 = E_{\max} \in (0, mgl). \quad (4.74)$$

Při jakékoli volbě hodnot E a L_z je $g(E) \leq 0$, a proto v průběhu pohybu kyvadla stále platí $T \geq 0$.

III. Pro $L_z^2 < \frac{2\sqrt{3}}{9}m^2gl^3$ je $g(E_{\max}) > 0$ a rovnice $g(E) = 0$ má tři různé reálné kořeny (obr. 4.3(a) III.)

$$E_1 \in (-\infty, -mgl), \quad E_2 \in (0, E_{\max}), \quad E_3 \in \left(E_{\max}, \frac{3}{2}mgl\right), \quad (4.75)$$

přičemž pro $L_z^2 \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{9}m^2gl^3$ je $E_2 \rightarrow E_{\max}$, $E_3 \rightarrow E_{\max}$ (obr. 4.3(a) II.) a pro $L_z \rightarrow 0$ je užitím (4.68) $E_2 \rightarrow 0$, $E_3 \rightarrow \frac{3}{2}mgl$ (obr. 4.3(b)). Podle konkrétní volby E a L_z mohou nastat jak případy $g(E) \leq 0$ (vždy platí $T \geq 0$), tak případy $g(E) > 0$ (kyvadlo prochází rovinou $z = z_T$, v níž výraz (4.62) mění znaménko).

(b) $L_z = 0$ (situace znázorněná na obr. 4.3(b))

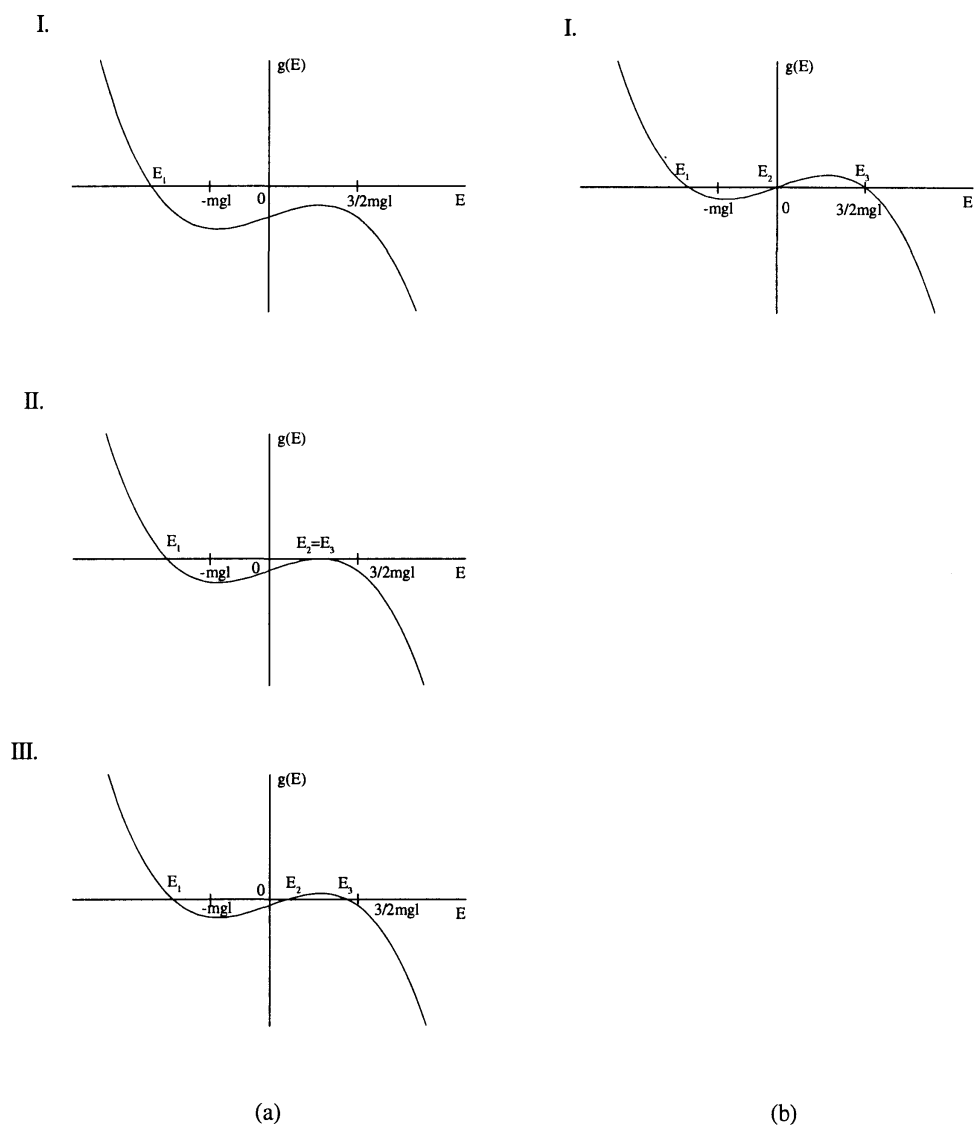
Rovnice $g(E) = 0$ má tři různé reálné kořeny

$$E_1 = -\frac{3}{2}mgl, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = \frac{3}{2}mgl. \quad (4.76)$$

Pro $E \leq 0$ platí $g(E) \leq 0$, tj. $T \geq 0$. Pro $E > 0$ je $g(E) > 0$, a proto kyvadlo vždy prochází rovinou $z = z_T$, v níž výraz (4.62) mění znaménko.

Zjištěné závěry jsou patrné také ze skutečnosti, že rovina $z = z_T$ leží (s výjimkou $E = 0$) blíže středu vazební kulové plochy než rovina $z = z_E$, která v případě, že protíná kulovou plochu, určuje maximální výšku výstupu matematického kyvadla.

Podobnou diskuzi lze provést také pro tělísko pohybující se po duté nebo vypuklé kulové ploše.



Obr. 4.3. Nákres možných průběhů funkce $g(E)$: (a) $L_z \neq 0$, (b) $L_z = 0$

5. Laboratorní vztažná soustava a její neinerciálnost

Libovolná vztažná soustava spojená se Zemí je neinerciální, protože se vzhledem k inerciální Galileově soustavě pohybuje po zakřivené trajektorii ($\vec{a}_t \neq \vec{0}$) a současně se otáčí kolem zemské osy ($\vec{\omega} \neq \vec{0}$). V této kapitole posoudíme, jaký vliv má neinerciálnost laboratorní vztažné soustavy na pohyb hmotných bodů. Zemi při tom budeme považovat za tuhou homogenní kouli, jejíž úhlová rychlost je konstantní.

Země ve skutečnosti tuhým homogenním tělesem není. Změny jejího tvaru a rovněž změny vektoru úhlové rychlosti způsobuje celá řada faktorů, například pochody v zemské kůře, proudění vodních a vzdušných mas, gravitační působení nebeských objektů atd. V rámci běžných experimentů lze však změny tvaru Země i změny vektoru její úhlové rychlosti zanedbat (např. [5]) a Zemi nahradit vhodným zjednodušeným modelem (např. [21]). O oprávněnosti volby modelu rozhoduje porovnání teoretických závěrů, které jeho užitím získáme, s výsledky odpovídajících experimentů.

5.1 Pohyb nevázaného hmotného bodu

Uvažujme o soustavě tvořené Zemí a *nevázaným hmotným bodem*, tj. hmotným bodem, jehož pohyb není podroben žádným vazbám. Zavedme vztažnou soustavu $S = \langle O; x, y, z \rangle$ s počátkem ve středu Země a s osou z souhlasně rovnoběžnou s vektorem její úhlové rychlosti $\vec{\omega} = \textit{konst.}$. Tato soustava nechť se vzhledem ke Galileově vztažné soustavě neotáčí. Bod O se však pohybuje po zakřivené trajektorii, a proto soustava S není inerciální.

Zanedbáme-li odpor vzduchu, má pohybová rovnice nevázaného hmotného bodu v soustavě S tvar (str. 16)

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \sum_i \vec{F}_{gi} + \vec{F}_t^* = \vec{F}_g + m \sum_i \vec{K}_i - m\vec{a}_t, \quad (5.1)$$

kde m je hmotnost hmotného bodu, \vec{F}_g je gravitační síla, kterou na hmotný bod působí Země, $\sum_i \vec{F}_{gi}$ je výslednice gravitačních sil, jimiž na hmotný bod působí nebeská tělesa¹, $\sum_i \vec{K}_i$ je intenzita odpovídajícího gravitačního pole a \vec{F}_t^* je fiktivní síla. Pro zrychlení \vec{a}_t bodu O (tj. pro zrychlení středu Země) vzhledem ke Galileově vztažné soustavě platí

$$M\vec{a}_t = M \sum_i \vec{K}_i - \vec{F}_g \implies \vec{a}_t = \sum_i \vec{K}_i - \frac{\vec{F}_g}{M}, \quad (5.2)$$

kde M je hmotnost Země². Porovnáním (5.1) a (5.2) dostáváme

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \frac{m}{M}\vec{F}_g \implies \frac{mM}{m+M}\vec{a} = \vec{F}_g. \quad (5.3)$$

Výraz

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \quad (5.4)$$

nazýváme *redukovanou hmotností* soustavy „Země + hmotný bod“. Protože obvykle platí $m \ll M$, je $\mu \doteq m$, tj.

$$m\vec{a} = \vec{F}_g. \quad (5.5)$$

¹K této síle nejvíce přispívá Slunce, Měsíc a planeta Jupiter.

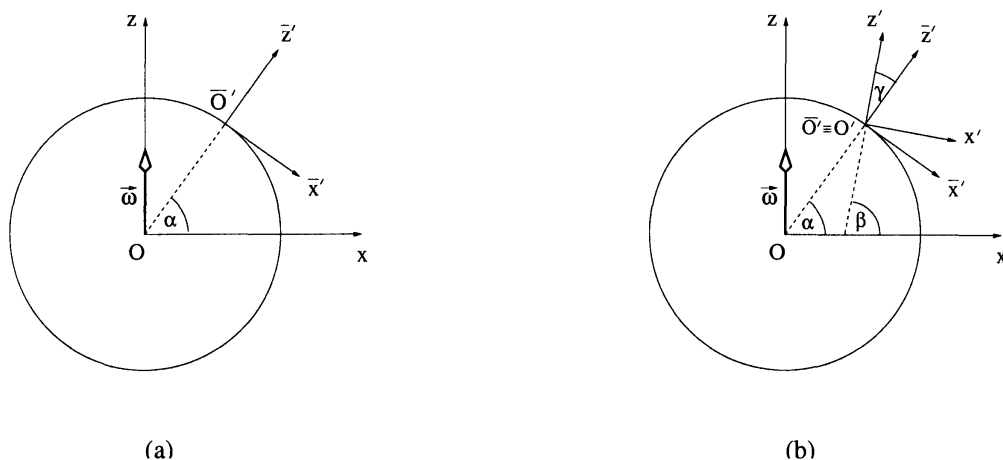
²Předpokládáme, že intenzita gravitačního pole buzeného nebeskými objekty je ve všech bodech zemského tělesa a jeho bezprostředního okolí stejná. Tento předpoklad je vzhledem k rozměrům Země a vzhledem ke vzdálenosti nebeských objektů velmi dobře splněn.

Pohyb nevázaného hmotného bodu tedy určuje pouze reálná gravitační síla Země³. Tato síla má pro uvažovaný model Země jako homogenní tuhé koule vyjádření

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{mM}{r^3} \vec{r} = m\vec{g}_g, \quad (5.6)$$

kde κ je gravitační konstanta, \vec{r} je polohový vektor hmotného bodu v soustavě S a $\vec{g}_g = \vec{K}$ je vektor gravitačního zrychlení (tj. vektor intenzity zemského gravitačního pole) v místě, kde se hmotný bod právě nachází. Vektor \vec{g}_g směřuje vždy do středu Země.

Zavedme laboratorní vztažnou soustavu $\bar{S}' = \langle \bar{O}'; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}' \rangle$ s počátkem \bar{O}' ve vybraném bodě na povrchu Země. Osa \bar{z}' nechť má opačný směr než vektor gravitačního zrychlení v tomto bodě, osu \bar{x}' volme tečnou k místnímu poledníku a směřující na jih; osa \bar{y}' je potom tečná k místní rovnoběžce a směřuje na východ (obr. 5.1(a)). Označme α úhel, který svírá osa \bar{z}' s rovinou rovníku Oxy (tzv. *geocentrická šířka* bodu \bar{O}').



Obr. 5.1. Zavedení vztažných soustav pro popis pohybu hmotného bodu

Trajektorii nevázaného hmotného bodu v laboratorní vztažné soustavě nalezneme dvojím způsobem:

- A) řešením pohybových rovnic v laboratorní vztažné soustavě,
- B) řešením pohybových rovnic ve vztažné soustavě S a transformací získaného vyjádření trajektorie do laboratorní vztažné soustavy.

Protože nám půjde především o posouzení neinerciálnosti laboratorní vztažné soustavy (tj. o projevy fiktivních sil), nebudeme pro jednoduchost přihlížet k dalším typům silového působení okolních objektů na hmotný bod, například k odporu vzduchu.

A) Řešení pohybových rovnic v laboratorní vztažné soustavě

Pohybová rovnice nevázaného hmotného bodu má v soustavě \bar{S}' tvar (str. 16)

$$m\vec{a}' = \vec{F}_g + \vec{F}_t^* + \vec{F}_{od}^* + \vec{F}_C^* = m\vec{g}_g - m\vec{a}'_t - m \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right] - 2m (\vec{\omega} \times \vec{v}'), \quad (5.7)$$

³V literatuře se zpravidla zakřivení trajektorie bodu O (tj. zrychlení \vec{a}'_t) zanedbává a soustava S se tak považuje za inerciální. Současně se nepřihlíží ani ke gravitačnímu působení nebeských těles. Zde jsme ukázali, že žádná taková zjednodušení není třeba přijímat, neboť oba vlivy se kompenzují.

kde čárkované veličiny s pruhem se vztahují k soustavě \bar{S}' a \vec{a}'_t označuje zrychlení bodu \bar{O}' vzhledem k soustavě S . Bod \bar{O}' se v soustavě S pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru $R \cos \alpha$, kde R je poloměr Země, proto pro složky vektoru \vec{a}'_t vyjádřené v soustavě \bar{S}' platí

$$\vec{a}'_t = \left(-R\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, 0, -R\omega^2 \cos^2 \alpha \right)_{\bar{S}'}. \quad (5.8)$$

Ostatní vektory vystupující v pohybové rovnici (5.7) mají v soustavě \bar{S}' složky

$$\vec{r}' = (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')_{\bar{S}'}, \quad \vec{v}' = (\dot{\bar{x}}', \dot{\bar{y}}', \dot{\bar{z}}')_{\bar{S}'}, \quad \vec{a}' = (\ddot{\bar{x}}', \ddot{\bar{y}}', \ddot{\bar{z}}')_{\bar{S}'}, \quad (5.9)$$

$$\vec{g}' = (0, 0, -g_g)_{\bar{S}'}, \quad \vec{\omega} = (-\omega \cos \alpha, 0, \omega \sin \alpha)_{\bar{S}'}. \quad (5.10)$$

Rozepsáním (5.7) dostaneme trojici skalárních rovnic⁴ pro trajektorii hmotného bodu

$$\ddot{\bar{x}}' = 2\dot{\bar{y}}'\omega \sin \alpha + R\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \bar{x}'\omega^2 \sin^2 \alpha + \bar{z}'\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (5.11)$$

$$\ddot{\bar{y}}' = -2\dot{\bar{x}}'\omega \sin \alpha - 2\dot{\bar{z}}'\omega \cos \alpha + \bar{y}'\omega^2, \quad (5.12)$$

$$\ddot{\bar{z}}' = 2\dot{\bar{y}}'\omega \cos \alpha + R\omega^2 \cos^2 \alpha + \bar{x}'\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \bar{z}'\omega^2 \cos^2 \alpha - g_g. \quad (5.13)$$

Všimněme si vektoru

$$\vec{g} = \vec{g}' - \vec{a}'_t - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad (5.14)$$

pro jehož složky $\vec{g} = (\bar{g}'_x, \bar{g}'_y, \bar{g}'_z)_{\bar{S}'}$ v soustavě \bar{S}' platí

$$\bar{g}'_x = R\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \bar{x}'\omega^2 \sin^2 \alpha + \bar{z}'\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (5.15)$$

$$\bar{g}'_y = \bar{y}'\omega^2, \quad (5.16)$$

$$\bar{g}'_z = R\omega^2 \cos^2 \alpha + \bar{x}'\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \bar{z}'\omega^2 \cos^2 \alpha - g_g. \quad (5.17)$$

Vektor \vec{g} jsme v závěru kapitoly 3. nazvali *vektorem tíhového zrychlení* a sílu $\vec{F}_G = m\vec{g}$ *tíhovou silou*. Tíhová síla působí v laboratorní vztažné soustavě na každý (i nepohyblivý) hmotný bod a žádným lokálním experimentem nelze rozlišit, jaká její část je dána reálným gravitačním působením Země a jaká část neinerciálností laboratorní vztažné soustavy⁵. Vztahy (5.11) – (5.13) proto přepíšeme do obvyklejšího tvaru

$$\ddot{\bar{x}}' = 2\dot{\bar{y}}'\omega \sin \alpha + \bar{g}'_x, \quad (5.18)$$

$$\ddot{\bar{y}}' = -2\dot{\bar{x}}'\omega \sin \alpha - 2\dot{\bar{z}}'\omega \cos \alpha + \bar{g}'_y, \quad (5.19)$$

$$\ddot{\bar{z}}' = 2\dot{\bar{y}}'\omega \cos \alpha + \bar{g}'_z. \quad (5.20)$$

Tíhové zrychlení \vec{g} závisí, stejně jako gravitační zrychlení \vec{g}_g , na místě, v němž jej určujeme. Zde budeme pro jednoduchost předpokládat, že pohyb hmotného bodu je omezen na takovou oblast prostoru, v níž je možné považovat gravitační pole za homogenní. Tato oblast musí mít s ohledem na (5.6) rozměry mnohem menší než zemské těleso. Ve vztazích (5.15) – (5.17) potom můžeme zanedbat výrazy obsahující součiny souřadnic a kvadrátů velikosti úhlové rychlosti jako velmi malé veličiny ($\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde $T \doteq 23$ h 56 min 4 s je *hvězdný den*) a pro složky tíhového zrychlení přibližně psát

$$\bar{g}'_x = R\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (5.21)$$

$$\bar{g}'_y = 0, \quad (5.22)$$

$$\bar{g}'_z = R\omega^2 \cos^2 \alpha - g_g. \quad (5.23)$$

V oblastech, kde je možné považovat gravitační pole za homogenní ($\vec{g}_g = \overrightarrow{\text{konst.}}$), lze podle poslední trojice vztahů považovat za homogenní také tíhové pole ($\vec{g} = \overrightarrow{\text{konst.}}$).

⁴Uvedené rovnice lze získat také užitím vztahu (2.32). Násobení příslušných matic (formulovány budou v druhém paragrafu tohoto oddílu) je však oproti výpočtům vektorových součinů podstatně pracnější.

⁵Tato skutečnost je důsledkem rovnosti gravitační a setrvačné hmotnosti.

Pro ilustraci odhadněme relativní změnu $\delta_r g_g$ velikosti gravitačního zrychlení ve výšce h vzhledem k povrchu Země. Užitím vztahu (5.6) vychází

$$\delta_r g_g = 1 - \left(\frac{R}{R+h} \right)^2. \quad (5.24)$$

Vezmeme-li např. $h = 500$ m, dostáváme dosazením $R \doteq 6,38 \cdot 10^6$ m výsledek $\delta_r g_g \doteq 0,02\%$.

Podobně pro dva body ležící ve vzdálenosti d na zemském povrchu (měřeno podél hlavní kružnice) svírají vektory gravitačního zrychlení úhel

$$\zeta = \frac{d}{R}. \quad (5.25)$$

Dosazením např. $d = 500$ m vychází $\zeta \doteq 0,004^\circ$.

Vzhledem k význačnosti *svislého směru* určeného vektorem tíhového zrychlení je výhodnější popisovat pohyb hmotného bodu ve vztahné soustavě $S' = \langle O'; x', y', z' \rangle$, jejíž počátek splývá s počátkem soustavy \bar{S}' (tj. $O' \equiv \bar{O}'$), osa z' má opačnou orientaci než vektor tíhového zrychlení a osa y' je tečná k místní rovnoběžce a směřuje na východ; osa x' potom míří na jih, ale není již tečnou k místnímu poledníku (obr. 5.1(b)). Označme β úhel, který svírá osa z' s rovinou rovníku Oxy (tzv. *geografická šířka* bodu $O' \equiv \bar{O}'$) a γ úhel, který svírají osy z' a \bar{z}' . Podle obr. 5.1(b) je

$$\gamma = \beta - \alpha. \quad (5.26)$$

Vektor tíhového zrychlení má (za předpokladu homogenity tíhového pole) v soustavě S' složky $\vec{g} = (g'_x, g'_y, g'_z)_{S'} = (0, 0, -g)_{S'} = \overline{\text{konst.}}$. Pro zrychlení nevázaného hmotného bodu vzhledem k soustavě S' tedy platí (srv. (5.18) – (5.20))

$$\ddot{x}' = 2\dot{y}'\omega \sin \beta + g'_x = 2\dot{y}'\omega \sin \beta, \quad (5.27)$$

$$\ddot{y}' = -2\dot{x}'\omega \sin \beta - 2\dot{z}'\omega \cos \beta + g'_y = -2\dot{x}'\omega \sin \beta - 2\dot{z}'\omega \cos \beta, \quad (5.28)$$

$$\ddot{z}' = 2\dot{y}'\omega \cos \beta + g'_z = 2\dot{y}'\omega \cos \beta - g. \quad (5.29)$$

Soustavu těchto rovnic vyřešíme zintegrováním (5.27) a (5.29), dosazením $\dot{x}'(t)$ a $\dot{z}'(t)$ do (5.28) a nalezením závislosti $y'(t)$. Dosazením $y'(t)$ do (5.27) a (5.29) pak integrací získáme také závislosti $x'(t)$ a $z'(t)$. Uplatněním počátečních podmínek

$$\vec{r}'(0) = (x'_0, y'_0, z'_0)_{S'}, \quad \vec{v}'(0) = (v'_{0x}, v'_{0y}, v'_{0z})_{S'} \quad (5.30)$$

vychází ([26])

$$\begin{aligned} x'(t) = & x'_0 + v'_{0x}t + v'_{0y} \sin \beta \frac{1 - \cos 2\omega t}{2\omega} - (v'_{0x} \sin \beta + v'_{0z} \cos \beta) \sin \beta \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) + \\ & + g \sin \beta \cos \beta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$y'(t) = y'_0 + v'_{0y} \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} - (v'_{0x} \sin \beta + v'_{0z} \cos \beta) \frac{1 - \cos 2\omega t}{2\omega} + \frac{g \cos \beta}{2\omega} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right), \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} z'(t) = & z'_0 + v'_{0z}t + v'_{0y} \cos \beta \frac{1 - \cos 2\omega t}{2\omega} - (v'_{0x} \sin \beta + v'_{0z} \cos \beta) \cos \beta \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) + \\ & + g \cos^2 \beta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right) - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Vztahy (5.31) – (5.33) představují parametrické rovnice trajektorie nevázaného hmotného bodu v soustavě S' . Výrazy obsahující g v nich souvisejí s výsledným působením reálné gravitační síly

Země, fiktivní síly translační a fiktivní síly odstředivé. Členy, v nichž vystupuje ω , se objevují v důsledku působení fiktivní síly Coriolisovy.

Protože jsou získané rovnice trajektorie málo přehledné a jejich platnost je navíc omezena na malé oblasti prostoru, odpovídající nepříliš dlouhým dobám pohybu hmotného bodu, provedeme Taylorův rozvoj goniometrických funkcí na pravých stranách. Ve výsledcích ponecháme výrazy obsahující členy řádu nejvýše (ωt) . Po úpravách dostaneme

$$x'(t) = x'_0 + v'_{0x}t + (v'_{0y}t \sin \beta)(\omega t), \quad (5.34)$$

$$y'(t) = y'_0 + v'_{0y}t + \frac{1}{3} [gt^2 \cos \beta - 3(v'_{0x} \sin \beta + v'_{0z} \cos \beta)t](\omega t), \quad (5.35)$$

$$z'(t) = z'_0 + v'_{0z}t + (v'_{0y}t \cos \beta)(\omega t) - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5.36)$$

Získané obecné vyjádření trajektorie budeme pro ilustraci aplikovat na nejjednodušší typ pohybu nevázaného hmotného bodu – volný pád z výšky h . Dosazením počátečních podmínek

$$\vec{r}'(0) = (0, 0, h)_{s'}, \quad \vec{v}'(0) = (0, 0, 0)_{s'} \quad (5.37)$$

vychází z (5.34) – (5.36)

$$x'(t) = 0, \quad (5.38)$$

$$y'(t) = \frac{1}{3}(gt^2 \cos \beta)(\omega t), \quad (5.39)$$

$$z'(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5.40)$$

Z poslední trojice vztahů je patrné, že při volném pádu z výšky h jsou souřadnice dopadu hmotného bodu na zemský povrch $x'_d = 0$ a na severní polokouli $y'_d > 0$. Volně puštěný hmotný bod tedy dopadne východněji od svislé přímky procházející jeho počáteční polohou. Vypočteme-li z rovnice (5.40) dobu pádu

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.41)$$

a dosadíme do (5.39), vychází pro $g \doteq 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a $\beta \doteq 50^\circ$ (oblast naší republiky)

$$t_d \doteq 4,5 \text{ s}, \quad y'_d \doteq 1 \text{ cm} \quad \text{pro } h = 100 \text{ m}, \quad (5.42)$$

$$t_d \doteq 10 \text{ s}, \quad y'_d \doteq 16 \text{ cm} \quad \text{pro } h = 500 \text{ m}. \quad (5.43)$$

Připomeňme, že výsledky (5.42) a (5.43) jsou pouze orientační. Při jejich odvození jsme totiž kromě homogenity tíhového pole předpokládali, že odpor vzduchu je zanedbatelný a k číselnému výpočtu jsme použili přibližných hodnot tíhového zrychlení a geografické šířky⁶. Přestože jsou odchylky od trajektorie hmotného bodu vypočtené za předpokladu $\vec{\omega} = \vec{0}$ (inerciální vztahná soustava) pro dostatečné výšky pádu měřitelné a pozemský pozorovatel je připisuje „působení“ Coriolisovy síly, při běžných experimentech se zpravidla zanedbávají a vztahná soustava spojená se Zemí se tak považuje za inerciální.

Pro výšku volného pádu $h = 500 \text{ m}$ lze gravitační pole Země ještě pokládat za homogenní (srv. text psaný petitem na str. 31). Doba volného pádu hmotného bodu z uvedené výšky činí podle (5.43) přibližně 10 s. Pro tuto dobu platí $(\omega t) \approx 10^{-4}$ a $(\omega t)^2 \approx 10^{-7}$, proto je ponechání členů řádu nejvýše (ωt) v Taylorových rozvozech goniometrických funkcí v (5.31) – (5.33) oprávněné.

⁶Tyto hodnoty jsou pro daná místa na povrchu Země tabelovány (např. [4], [21]). Při jejich zjišťování je však třeba mít na paměti, že pojmy „geocentrická šířka“ a „geografická šířka“ bodu nejsou v literatuře jednotné a jejich definice závisí také na použitém modelu Země. Případná záměna geocentrické a geografické šířky však nemá na provedené odhady velký vliv.

B) Řešení pohybových rovnic ve vztažné soustavě S

Vztahy (5.34) – (5.36) nyní odvodíme odlišným způsobem: vyjádříme parametrické rovnice trajektorie hmotného bodu v soustavě S a budeme je transformovat do soustavy S' .

Pohybová rovnice nevázaného hmotného bodu má v soustavě S tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_g = m\vec{g}_g. \quad (5.44)$$

Předpokládáme-li bez újmy na obecnosti, že v počátečním okamžiku leží bod $O' \equiv \bar{O}'$ v rovině Oxz , platí (obr. 5.1)

$$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})_S, \quad \vec{g}_g = (-g_g \cos \alpha \cos \omega t, -g_g \cos \alpha \sin \omega t, -g_g \sin \alpha)_S. \quad (5.45)$$

Integrací složkového zápisu pohybové rovnice (5.44)

$$\ddot{x} = -g_g \cos \alpha \cos \omega t, \quad (5.46)$$

$$\ddot{y} = -g_g \cos \alpha \sin \omega t, \quad (5.47)$$

$$\ddot{z} = -g_g \sin \alpha \quad (5.48)$$

dostaneme uplatněním počátečních podmínek

$$\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)_{S'}, \quad \vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})_{S'} \quad (5.49)$$

parametrické rovnice trajektorie hmotného bodu v soustavě S

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t - \frac{g_g}{\omega^2} \cos \alpha + \frac{g_g}{\omega^2} \cos \alpha \cos \omega t, \quad (5.50)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{g_g}{\omega} t \cos \alpha + \frac{g_g}{\omega^2} \cos \alpha \sin \omega t, \quad (5.51)$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}g_g t^2 \sin \alpha. \quad (5.52)$$

Tyto rovnice budeme užitím výsledků oddílu 2.2 transformovat do soustavy S' .

Mezi okamžitou polohou hmotného bodu v soustavě S a odpovídající polohou hmotného bodu v soustavě S' platí vztah

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{A}^T(t). \quad (5.53)$$

Zavedme označení

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \mathbf{w}(t), \quad (5.54)$$

kde

$$\mathbf{r}(t) = (x(t) \ y(t) \ z(t)), \quad \mathbf{r}(0) = (x_0 \ y_0 \ z_0), \quad \mathbf{v}(0) = (v_{0x} \ v_{0y} \ v_{0z}), \quad (5.55)$$

$$\mathbf{w}(t) = \left(-\frac{g_g}{\omega^2} \cos \alpha + \frac{g_g}{\omega^2} \cos \alpha \cos \omega t \quad -\frac{g_g}{\omega} t \cos \alpha + \frac{g_g}{\omega^2} \cos \alpha \sin \omega t \quad -\frac{1}{2}g_g t^2 \sin \alpha \right). \quad (5.56)$$

Dosazením za $\mathbf{r}(t)$ z (5.54) do (5.53) dostaneme s využitím vztahů

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}'(0) \mathbf{A}(0) + \mathbf{B}(0), \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}'(0) \mathbf{A}(0) + \mathbf{r}'(0) \mathbf{A}(0) \Omega + \dot{\mathbf{B}}(0) \quad (5.57)$$

řádkovou matici reprezentující polohu hmotného bodu v soustavě S'

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) = & [\mathbf{r}'(0) + \mathbf{v}'(0)t] \mathbf{A}(0) \mathbf{A}^T(t) + \mathbf{r}'(0)t \mathbf{A}(0) \Omega \mathbf{A}^T(t) + t \dot{\mathbf{B}}(0) \mathbf{A}^T(t) + \\ & + \mathbf{B}(0) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{A}^T(t) + \mathbf{w}(t) \mathbf{A}^T(t), \end{aligned} \quad (5.58)$$

kde

$$\mathbf{r}'(0) = (x'_0 \ y'_0 \ z'_0), \quad \mathbf{v}'(0) = (v'_{0x} \ v'_{0y} \ v'_{0z}). \quad (5.59)$$

K výpočtu $r'(t)$ zbývá určit matice $A(t)$, $B(t)$ a Ω . Protože se vektory báze $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ soustavy S' vyjadřují prostřednictvím vektorů báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ soustavy S jako (obr. 5.1(b))

$$\vec{e}'_1 = \sin \beta \cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \beta \sin \omega t \vec{e}_2 - \cos \beta \vec{e}_3, \quad (5.60)$$

$$\vec{e}'_2 = -\sin \omega t \vec{e}_1 + \cos \omega t \vec{e}_2, \quad (5.61)$$

$$\vec{e}'_3 = \cos \beta \cos \omega t \vec{e}_1 + \cos \beta \sin \omega t \vec{e}_2 + \sin \beta \vec{e}_3, \quad (5.62)$$

je

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \omega t & \sin \beta \sin \omega t & -\cos \beta \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ \cos \beta \cos \omega t & \cos \beta \sin \omega t & \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Dále platí (obr. 5.1(b) a oddíl 2.2)

$$B(t) = (R \cos \alpha \cos \omega t \quad R \cos \alpha \sin \omega t \quad R \sin \alpha), \quad (5.64)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Rutinním výpočtem součinů matic v (5.58) získáme s přihlédnutím k (5.26) parametrické rovnice trajektorie nevázaného hmotného bodu v soustavě S' , v nichž výrazy obsahující ω nyní souvisejí s výslednicí všech fiktivních sil (translační, odstředivé a Coriolisovy)

$$\begin{aligned} x'(t) = & (x'_0 + v'_{0x}t) (\sin^2 \beta \cos \omega t + \cos^2 \beta) + (y'_0 + v'_{0y}t) \sin \beta \sin \omega t + \\ & + (z'_0 + v'_{0z}t) (\sin \beta \cos \beta \cos \omega t - \sin \beta \cos \beta) + x'_0 \omega t \sin^2 \beta \sin \omega t - \\ & - y'_0 \omega t \sin \beta \cos \omega t + z'_0 \omega t \sin \beta \cos \beta \sin \omega t + R \omega t \sin \beta \cos \alpha \sin \omega t + \\ & + R \sin \beta \cos \alpha \cos \omega t - R \cos \beta \sin \alpha - R \sin \gamma + \frac{g_g}{\omega^2} \sin \beta \cos \alpha - \\ & - \frac{g_g}{\omega^2} \sin \beta \cos \alpha \cos \omega t - \frac{g_g}{\omega} t \sin \beta \cos \alpha \sin \omega t + \frac{1}{2} g_g t^2 \cos \beta \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} y'(t) = & -(x'_0 + v'_{0x}t) \sin \beta \sin \omega t + (y'_0 + v'_{0y}t) \cos \omega t - (z'_0 + v'_{0z}t) \cos \beta \sin \omega t + \\ & + x'_0 \omega t \sin \beta \cos \omega t + y'_0 \omega t \sin \omega t + z'_0 \omega t \cos \beta \cos \omega t + R \omega t \cos \alpha \cos \omega t - \\ & - R \cos \alpha \sin \omega t + \frac{g_g}{\omega^2} \cos \alpha \sin \omega t - \frac{g_g}{\omega} t \cos \alpha \cos \omega t, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} z'(t) = & (x'_0 + v'_{0x}t) (\sin \beta \cos \beta \cos \omega t - \sin \beta \cos \beta) + (y'_0 + v'_{0y}t) \cos \beta \sin \omega t + \\ & + (z'_0 + v'_{0z}t) (\cos^2 \beta \cos \omega t + \sin^2 \beta) + x'_0 \omega t \sin \beta \cos \beta \sin \omega t - \\ & - y'_0 \omega t \cos \beta \cos \omega t + z'_0 \omega t \cos^2 \beta \sin \omega t + R \omega t \cos \beta \cos \alpha \sin \omega t + \\ & + R \cos \beta \cos \alpha \cos \omega t + R \sin \beta \sin \alpha - R \cos \gamma + \frac{g_g}{\omega^2} \cos \beta \cos \alpha - \\ & - \frac{g_g}{\omega^2} \cos \beta \cos \alpha \cos \omega t - \frac{g_g}{\omega} t \cos \beta \cos \alpha \sin \omega t - \frac{1}{2} g_g t^2 \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Platnost rovnic (5.66) – (5.68) je omezena pouze na oblasti, kde lze gravitační pole považovat za homogenní. Podobně je tomu s rovnicemi (5.31) – (5.33), které platí v oblastech homogenity tíhového pole. Protože se ovšem gravitační zrychlení mění s polohou jinak než zrychlení tíhové

(srv. vztahy (5.6) a (5.15) – (5.17))⁷, mají rovnice (5.31) – (5.33) a (5.66) – (5.68) již na první pohled odlišný tvar. Pro oblasti homogenity gravitačního, resp. tíhového pole, tedy pro krátké doby pohybu hmotného bodu, však musí oba přístupy dávat stejné výsledky. Provedme proto opět Taylorův rozvoj goniometrických funkcí na pravých stranách (5.66) – (5.68), v němž u výrazů obsahujících souřadnice, rychlosti a gravitační zrychlení ponecháme členy řádu nejvýše (ωt) , kdežto u výrazů obsahujících zemský poloměr jako veličinu relativně velkou ponecháme členy do řádu $(\omega t)^3$. Vychází

$$x'(t) = x'_0 + v'_{0x}t + (v'_{0y}t \sin \beta)(\omega t) + \frac{1}{2} (R\omega^2 \sin \beta \cos \alpha - g_g \sin \gamma) t^2, \quad (5.69)$$

$$y'(t) = y'_0 + v'_{0y}t - (v'_{0x}t \sin \beta + v'_{0z}t \cos \beta)(\omega t) - \frac{1}{3} (R\omega^2 - g_g)(\cos \alpha) \omega t^3, \quad (5.70)$$

$$z'(t) = z'_0 + v'_{0z}t + (v'_{0y} \cos \beta)(\omega t) + \frac{1}{2} (R\omega^2 \cos \beta \cos \alpha - g_g \cos \gamma) t^2. \quad (5.71)$$

Uvážíme-li, že vzhledem ke způsobu zavedení soustav S a S' a k definici tíhového zrychlení platí (obr. 5.1(b))

$$g'_x = 0 = R\omega^2 \sin \beta \cos \alpha - g_g \sin \gamma, \quad (5.72)$$

$$g'_y = 0, \quad (5.73)$$

$$g'_z = -g = R\omega^2 \cos \beta \cos \alpha - g_g \cos \gamma, \quad (5.74)$$

případně

$$\bar{g}'_x = R\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = g \sin \gamma, \quad (5.75)$$

$$\bar{g}'_y = 0, \quad (5.76)$$

$$\bar{g}'_z = R\omega^2 \cos^2 \alpha - g_g = -g \cos \gamma, \quad (5.77)$$

dostáváme úpravou (5.69) – (5.71) podle očekávání vztahy (5.34) – (5.36).

5.2 Foucaultovo kyvadlo

Foucaultovým kyvadlem rozumíme sférické kyvadlo, které se pohybuje po takovou dobu, že se měřitelně projeví neinerciálnost laboratorní vztahné soustavy⁸.

K popisu pohybu kyvadla zavedeme laboratorní vztahnou soustavu $S' = \langle O'; x', y', z' \rangle$ tak, že její počátek je totožný se středem vazební kulové plochy, osa z' směřuje svisle dolů a osa y' je tečná k místní rovnoběžce a směřuje na východ; osa x' potom směřuje na sever, ale není tečnou k místnímu poledníku. Pohybová rovnice sférického kyvadla má v soustavě S' tvar

$$m\vec{a}' = \vec{F}_G + \vec{T} + \vec{F}_C^* = m\vec{g} + \vec{T} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'), \quad (5.78)$$

kde \vec{T} je vazební síla. Pro složky jednotlivých vektorů v soustavě S' platí

$$\vec{r}' = (x', y', z')_{S'}, \quad \vec{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')_{S'}, \quad \vec{a}' = (\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}')_{S'}, \quad (5.79)$$

$$\vec{g} = (0, 0, g)_{S'}, \quad \vec{\omega} = (\omega \cos \beta, 0, -\omega \sin \beta)_{S'}, \quad \vec{T} = \left(-\frac{x'}{l} T, -\frac{y'}{l} T, -\frac{z'}{l} T \right)_{S'}, \quad (5.80)$$

⁷Při předpokladu $\vec{g}_g \equiv \overrightarrow{\text{konst.}}$ platí $\vec{g} \doteq \overrightarrow{\text{konst.}}$ a naopak.

⁸Kyvadlo je pojmenováno po francouzském fyzikovi Jeanu Bernardu Léonu Foucaultovi (1819 – 1868), který pomocí něj v roce 1851 změřil úhlovou rychlost zemské rotace. Použil kyvadla tvořeného koulí o hmotnosti 30 kg zavěšené na ocelovém drátě délky 67 m v budově pařížského Pantheonu ([26]).

kde T má stejný význam jako v kapitole 4. Rozepsáním (5.78) do složek dostáváme tři skalární rovnice pro trajektorii kyvadla

$$m\ddot{x}' = -\frac{x'}{l}T - 2m\dot{y}'\omega \sin \beta, \quad (5.81)$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{y'}{l}T + 2m\dot{x}'\omega \sin \beta + 2m\dot{z}'\omega \cos \beta, \quad (5.82)$$

$$m\ddot{z}' = -\frac{z'}{l}T + mg - 2m\dot{y}'\omega \cos \beta. \quad (5.83)$$

V kapitole 4. bylo za předpokladu $\vec{\omega} = \vec{0}$ ukázáno, že v obecném případě nelze parametrické rovnice trajektorie \mathcal{C} kyvadla vyjádřit explicitními vzorci. Nyní je situace stejná, přestože má pohybová rovnice jiný tvar, doplněný o Coriolisovu sílu. (Předpokládáme-li totiž, že trajektorii \mathcal{C}' , zjištěnou z rovnic (5.81) – (5.83), lze vyjádřit explicitně, platí totéž pro trajektorii \mathcal{C} , kterou získáme z \mathcal{C}' limitním přechodem $\vec{\omega} \rightarrow \vec{0}$.) Zde si proto všimneme pouze speciálního, avšak důležitého typu pohybu Foucaultova kyvadla: malých kmitů v okolí rovnovážné polohy $[0, 0, l]$.

Poněvadž je Coriolisova síla vždy kolmá k trajektorii a nekoná tedy práci, platí pro kyvadlo zákon zachování mechanické energie

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 - mgz'. \quad (5.84)$$

Za malé kmity kyvadla v okolí rovnovážné polohy budeme považovat takový pohyb, pro nějž

$$E \doteq -mgl \quad \implies \quad z' \doteq l, \quad (5.85)$$

kde l je poloměr vazební kulové plochy. V kapitole 4., str. 25 byl pro vazební sílu odvozen vztah

$$T = \frac{2E + 3mgz'}{l}, \quad (5.86)$$

který pro malé kmity přechází do tvaru

$$T \doteq mg. \quad (5.87)$$

Jeho dosazením do pohybových rovnic (5.81) a (5.82) dostaneme s uvážením $\dot{z}' \ll \dot{x}'$ a $\dot{z}' \ll \dot{y}'$ soustavu dvou diferenciálních rovnic pro neznámé funkce času $x'(t)$ a $y'(t)$

$$\ddot{x}' = -\frac{x'}{l}g - 2\dot{y}'\omega \sin \beta, \quad (5.88)$$

$$\ddot{y}' = -\frac{y'}{l}g + 2\dot{x}'\omega \sin \beta. \quad (5.89)$$

Vynásobíme-li druhou z rovnic imaginární jednotkou i a přičteme k první, získáme jedinou diferenciální rovnici

$$\ddot{\xi} - 2i\omega \sin \beta \dot{\xi} + \frac{g}{l}\xi = 0, \quad (5.90)$$

kde $\xi(t) = x'(t) + iy'(t)$. Vzhledem k tomu, že $(\omega \sin \beta)^2 \ll \frac{g}{l}$, má její obecné řešení tvar

$$\xi(t) = \exp[i(\omega \sin \beta)t] \left[C_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \right] = \exp[i(\omega \sin \beta)t] \xi_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t), \quad (5.91)$$

v němž C_1, C_2 jsou integrační konstanty určené počátečními podmínkami a

$$\xi_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t) = C_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) = x'_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t) + iy'_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t) \quad (5.92)$$

určuje průmět polohy kyvadla do vodorovné roviny $O'x'y'$ za předpokladu $\vec{\omega} = \vec{0}$. Užitím Eulerovy identity

$$\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

dostaneme z (5.91) a (5.92)

$$x'(t) = x'_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t) \cos [(\omega \sin \beta) t] - y'_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t) \sin [(\omega \sin \beta) t], \quad (5.93)$$

$$y'(t) = x'_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t) \sin [(\omega \sin \beta) t] + y'_{[\vec{\omega}=\vec{0}]}(t) \cos [(\omega \sin \beta) t]. \quad (5.94)$$

Odtud je patrné, že průmět polohy kyvadla do vodorovné roviny určený pro $\vec{\omega} = \vec{0}$ se v soustavě S' otáčí úhlovou rychlostí

$$\vec{\omega}_\beta = (0, 0, \omega \sin \beta)_{S'}. \quad (5.95)$$

Uvažujeme-li tedy například o malých kmitech matematického kyvadla, otáčí se v našich oblastech ($\beta \doteq 50^\circ$) vlivem Coriolisovy fiktivní síly jejich rovina přibližně o 11° za hodinu, což je dobře měřitelná veličina.

Stejně závěry by bylo možné získat, podobně jako v předchozím oddíle, také řešením pohybových rovnic v soustavě S a transformací výsledků do soustavy S' . Postup je však poměrně pracný, a proto jej zde nebudeme uvádět.

6. Mechanika hmotného bodu na elementární úrovni

K nejstarším úkolům fyziky a přírodovědy vůbec patří studium pohybu okolních těles. Tímto problémem se zabývá *mechanika* – fyzikální disciplína, jejíž základy položili v 17. století Galileo Galilei (1564 – 1642) a Isaac Newton (1643 – 1727). Mechaniku dnes dělíme na *kinematiku*, která pohyb těles popisuje, a na *dynamiku*, která zjišťuje příčiny změn jejich pohybového stavu.

Protože se vždy zabýváme jen některými aspekty zkoumaných dějů, nahrazujeme reálné objekty vhodnými modely. Nejjednodušším modelem je *hmotný bod*. Rozumíme jím geometrický bod nesoucí informaci o hmotnosti tělesa, ztotožněný s některým z jeho bodů. Hmotným bodem nahrazujeme těleso v případě, že jeho rozměry nejsou při řešení dané úlohy podstatné. Na pohyb hmotných bodů však můžeme redukovat i celou řadu obecnějších situací, rozdělíme-li těleso myšlenkově na dostatečně malé části. Prvotním úkolem mechaniky je proto formulace pojmů a zákonů pro pohyb hmotného bodu.

6.1 Kinematika hmotného bodu

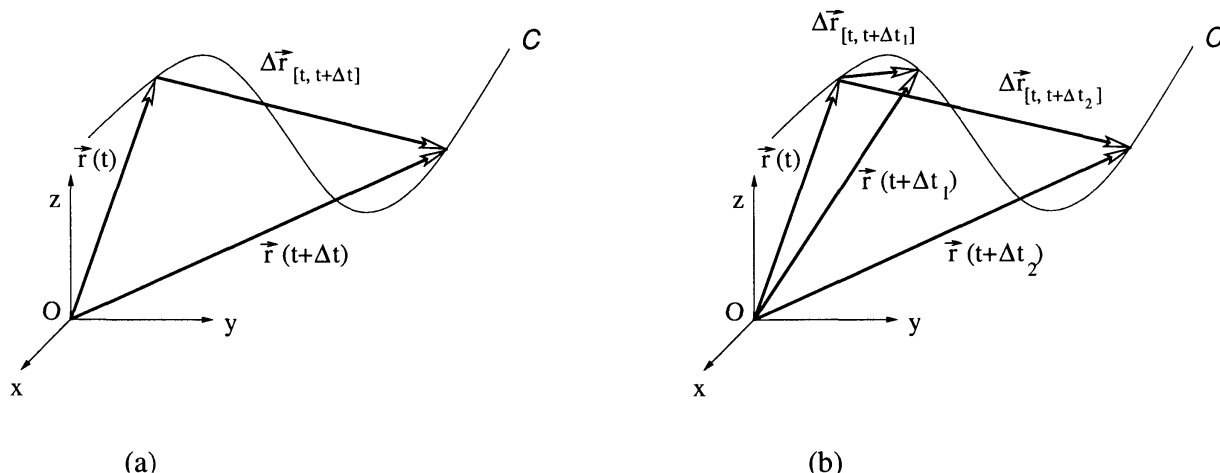
V tomto oddíle zavedeme pojmy a veličiny, které charakterizují pohyb hmotného bodu.

A) Pohyb hmotného bodu. Rychlost a zrychlení

Základní kinematickou veličinou je *polohový vektor*

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (6.1)$$

který v okamžiku t určuje ve zvolené *kartézské vztahné soustavě* $S = \langle O; x, y, z \rangle$ polohu hmotného bodu. Funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ představují závislosti souřadnic hmotného bodu v soustavě S na čase. Pokud se alespoň jedna z těchto funkcí ve zvoleném časovém intervalu mění, říkáme, že hmotný bod se vzhledem k soustavě S *pohybuje*.



Obr. 6.1. K poloze hmotného bodu v soustavě $S = \langle O; x, y, z \rangle$: (a) zavedení vektoru posunutí, (b) vektory posunutí pro dva různé časové intervaly s počátkem v okamžiku t

Křivku, po níž se hmotný bod pohybuje, nazýváme *trajektorií*. Její parametrické vyjádření má tvar

$$C : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (6.2)$$

Pokud je trajektorií hmotného bodu část přímky, mluvíme o *přímočarém* pohybu, v opačném případě mluvíme o *křivočarém pohybu*. Délku oblouku trajektorie, který hmotný bod opíše do okamžiku t , nazýváme *dráhou*.

Změnu polohy hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ popisuje *vektor posunutí* (obr. 6.1(a))

$$\Delta \vec{r}_{[t, t+\Delta t]} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (6.3)$$

Jeho prostřednictvím je definována *průměrná rychlost* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ vztahem

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{\Delta \vec{r}_{[t, t+\Delta t]}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (6.4)$$

Výpočet vektoru posunutí a vektoru průměrné rychlosti hmotného bodu budeme ilustrovat na jednoduchém příkladě.

PŘÍKLAD 1.

Poloha hmotného bodu je v počátečním okamžiku t_0 v dané vztažné soustavě určena polohovým vektorem $\vec{r}(t_0)$ a v okamžiku t_1 polohovým vektorem $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_0)$. V okamžiku t_2 se hmotný bod navrácí do výchozí polohy. Určete vektory posunutí a vektory průměrné rychlosti hmotného bodu v intervalech $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ a $[t_0, t_2]$.

(Konkrétním příkladem tohoto obecně zadaného problému může být auto vyjíždějící v okamžiku t_0 z Brna, v okamžiku t_1 parkující v Praze a v okamžiku t_2 přijíždějící zpět do Brna.)

ŘEŠENÍ:

Podle zadání platí

$$\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_0), \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_0). \quad (6.5)$$

Užitím definičních vztahů dostáváme pro hledané vektory posunutí

$$\Delta \vec{r}_{[t_0, t_1]} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) \neq \vec{0}, \quad (6.6)$$

$$\Delta \vec{r}_{[t_1, t_2]} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = -\Delta \vec{r}_{[t_0, t_1]}, \quad (6.7)$$

$$\Delta \vec{r}_{[t_0, t_2]} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_0) = \vec{0} \quad (6.8)$$

a pro vektory průměrné rychlosti

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_0, t_1]} = \frac{\Delta \vec{r}_{[t_0, t_1]}}{t_1 - t_0} = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)}{t_1 - t_0} \neq \vec{0}, \quad (6.9)$$

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]} = \frac{\Delta \vec{r}_{[t_1, t_2]}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = -\frac{\Delta \vec{r}_{[t_0, t_1]}}{t_2 - t_1}, \quad (6.10)$$

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_0, t_2]} = \frac{\Delta \vec{r}_{[t_0, t_2]}}{t_2 - t_0} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_0)}{t_2 - t_0} = \vec{0}. \quad (6.11)$$

◇

Průměrná rychlost hmotného bodu se vztahuje k intervalu, v němž ji určujeme, a proto není příliš dobrou charakteristikou pohybu. Stejně tak není dobrou charakteristikou pohybu ani vektor posunutí, protože nevíme, jakým způsobem se hmotný bod mezi okamžiky t a $t + \Delta t$ pohyboval. Například auto z předchozího příkladu může jet z Brna do Prahy po dálnici, ale také po okresních silnicích (různé trajektorie auta). Po zvolené trase přitom může jet bez zastávky, ale také s přestávkami na odpočívadlech (různé okamžiky průchodu jednotlivými body trajektorie a tomu odpovídající různé průměrné rychlosti).

Pro získání lepší představy o průběhu pohybu hmotného bodu musíme snižovat délku Δt příslušného časového intervalu s počátkem v okamžiku t . Limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ získáváme z průměrné rychlosti *okamžitou rychlost* (nebo krátce jen *rychlost*) hmotného bodu

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \quad (6.12)$$

kteřá se vztahuje k okamžiku t . Z geometrické představy je patrné (obr. 6.1(b)), že s klesajícím Δt se přímka, v níž leží vektor posunutí $\vec{r}_{[t, t+\Delta t]}$, blíží tečně k trajektorii. Vektor okamžité rychlosti hmotného bodu $\vec{v}(t)$ má proto směr tečny k trajektorii v bodě $\vec{r}(t)$.

Velikost polohového vektoru $|\vec{r}(t)| = r(t)$, vektoru posunutí $|\vec{r}_{[t, t+\Delta t]}|$, vektoru průměrné rychlosti $|\langle \vec{v} \rangle_{[t, t+\Delta t]}|$ i vektoru okamžité rychlosti $|\vec{v}(t)| = v(t)$ určujeme známým způsobem – jako odmocninu ze součtu druhých mocnin jednotlivých složek. Podle časového průběhu velikosti okamžité rychlosti pak dělíme pohyby hmotného bodu na *rovnoměrné* ($v(t) = \text{konst.}$) a *nerovnoměrné* ($v(t) \neq \text{konst.}$).

Pro praktické účely je vhodné definovat skalární veličinu, kterou nazveme *průměrnou dráhovou rychlostí* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$

$$\langle v \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{\Delta s_{[t, t+\Delta t]}}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}, \quad (6.13)$$

kde $s(t)$ označuje dráhu hmotného bodu. Protože dráha pohybujícího se hmotného bodu je neklesající funkcí času, nabývá průměrná dráhová rychlost, na rozdíl od velikosti průměrné rychlosti (vztah (6.4)), vždy nenulové hodnoty (srv. následující příklad 2.). Limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme z průměrné dráhové rychlosti *okamžitou dráhovou rychlost* hmotného bodu v čase t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle v \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (6.14)$$

Geometrická představa ukazuje (obr. 6.1(b)), že s klesající délkou Δt časového intervalu s počátkem v okamžiku t se velikost vektoru posunutí $|\Delta \vec{r}_{[t, t+\Delta t]}|$ blíží veličině $\Delta s_{[t, t+\Delta t]}$. Okamžitá dráhová rychlost je tedy rovna velikosti vektoru okamžité rychlosti, a proto jsme obě tyto veličiny označili stejným symbolem. Střední dráhovou rychlost, vyhodnocovanou ve velmi krátkých časových intervalech, ukazují rychloměry v automobilech, na kolech atd.

Chování průměrných kinematických veličin v závislosti na délce časového intervalu, v němž jsou určovány, ukazuje následující příklad.

PŘÍKLAD 2.

Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru $R = 10,00$ cm tak, že za stejné časové intervaly opíše vždy stejně dlouhé oblouky. Doba oběhu hmotného bodu po kružnici je $T = 8,00$ s. Zvolme vztahnou soustavu $S = \langle O; x, y \rangle$ tak, aby její počátek O splýval se středem kružnice, kružnice ležela v rovině Oxy a hmotný bod se v okamžiku $t = 0$ nacházel na ose x .

- Nalezněte vztah pro složky polohového vektoru hmotného bodu v okamžiku t .
- Určete složky vektoru posunutí hmotného bodu v intervalech $[0, T]$, $[0, \frac{T}{2}]$, $[0, \frac{T}{4}]$, $[0, \frac{T}{8}]$, $[0, \frac{T}{16}]$, $[0, \frac{T}{32}]$, $[0, \frac{T}{64}]$ a $[0, \frac{T}{128}]$.
- Určete velikost vektoru posunutí a dráhu opsanou hmotným bodem v zadaných časových intervalech. Výsledky komentujte.
- Určete velikost vektoru průměrné rychlosti a průměrnou dráhovou rychlost hmotného bodu v zadaných časových intervalech. Výsledky komentujte.

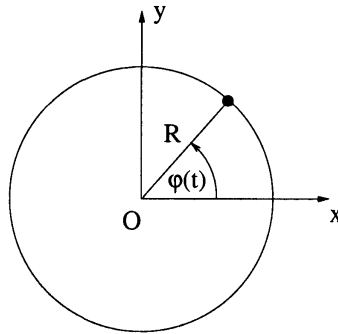
ŘEŠENÍ:

a) Souřadnice hmotného bodu v soustavě S jsou určeny vztahy (obr. 6.2)

$$x(t) = R \cos \varphi(t), \quad y(t) = R \sin \varphi(t), \quad (6.15)$$

kde $\varphi(t)$ je úhel, který v okamžiku t svírá spojnice bodu O a hmotného bodu s kladnou poloosou x , měřený v radiánech¹ proti směru pohybu hodinových ručiček. Za dobu T opiše hmotný bod úhel $\varphi(T) = 2\pi$, proto vzhledem k zadání platí $\varphi(t) = 2\pi \frac{t}{T}$. Složky polohového vektoru hmotného bodu v soustavě S v okamžiku t jsou tedy

$$\vec{r} = (x(t), y(t)) = \left(R \cos 2\pi \frac{t}{T}, R \sin 2\pi \frac{t}{T} \right). \quad (6.16)$$



Obr. 6.2. K pohybu hmotného bodu po kružnici

b) Složky vektoru posunutí hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ jsou

$$\Delta \vec{r}_{[t, t+\Delta t]} = \left(\Delta x_{[t, t+\Delta t]}, \Delta y_{[t, t+\Delta t]} \right), \quad (6.17)$$

kde

$$x_{[t, t+\Delta t]} = x(t + \Delta t) - x(t), \quad y_{[t, t+\Delta t]} = y(t + \Delta t) - y(t). \quad (6.18)$$

Číselné výsledky vypočtené užitím (6.16) a (6.17), zaokrouhlené na dvě desetinná místa, jsou uvedeny v tabulce v závěru řešení.

c) Velikost vektoru posunutí hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ určuje vztah

$$\left| \Delta \vec{r}_{[t, t+\Delta t]} \right| = \sqrt{\left(\Delta x_{[t, t+\Delta t]} \right)^2 + \left(\Delta y_{[t, t+\Delta t]} \right)^2}. \quad (6.19)$$

Za dobu T urazí hmotný bod dráhu $\Delta s_{[0, T]} = 2\pi R$, proto

$$\Delta s_{[t, t+\Delta t]} = 2\pi R \frac{\Delta t}{T}. \quad (6.20)$$

Z tabulky číselných výsledků je vidět, že s klesající délkou Δt časového intervalu se k sobě hodnoty $\left| \Delta \vec{r}_{[t, t+\Delta t]} \right|$ a $\Delta s_{[t, t+\Delta t]}$ v souladu s očekáváním blíží. Jejich shoda v posledních třech řádcích tabulky je způsobena zaokrouhlením – na dalších místech desetinného rozvoje se tyto veličiny liší.

¹Středový úhel sevřený dvěma přímkami, které procházejí středem kružnice, má velikost 1 radián, jestliže přímkou vytínají na kružnici oblouk o délce rovné poloměru kružnice.

d) Velikost průměrné rychlosti hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ je dána vztahem

$$|\langle \vec{v} \rangle_{[t, t + \Delta t]}| = \frac{|\Delta \vec{r}_{[t, t + \Delta t]}|}{\Delta t}, \quad (6.21)$$

průměrná dráhová rychlost v témže intervalu je

$$\langle v \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \frac{\Delta s_{[t, t + \Delta t]}}{\Delta t}. \quad (6.22)$$

Číselné výsledky dokumentují, že obecně platí $|\langle \vec{v} \rangle_{[t, t + \Delta t]}| \neq \langle v \rangle_{[t, t + \Delta t]}$, s klesajícím Δt se však k sobě tyto veličiny podle očekávání blíží. Jejich shoda v posledních dvou řádcích tabulky je opět způsobena zaokrouhlením. Dále se s klesajícím Δt k jisté limitní hodnotě – velikosti okamžité rychlosti v čase $t = 0$ – blíží velikosti průměrné rychlosti hmotného bodu.

Všimněme si ještě posledního sloupce tabulky. Poněvadž hmotný bod opíše podle zadání ve stejných časových intervalech vždy stejně dlouhé oblouky, pohybuje se rovnoměrně a veličina $\langle v \rangle_{[t, t + \Delta t]}$ tak nezávisí na délce ani na počátečním okamžiku intervalu, v němž ji určíme.

$[t, t + \Delta t]$	$\frac{\Delta x_{[t, t + \Delta t]}}{\text{cm}}$	$\frac{\Delta y_{[t, t + \Delta t]}}{\text{cm}}$	$\frac{ \Delta \vec{r}_{[t, t + \Delta t]} }{\text{cm}}$	$\frac{\Delta s_{[t, t + \Delta t]}}{\text{cm}}$	$\frac{ \langle \vec{v} \rangle_{[t, t + \Delta t]} }{\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}}$	$\frac{\langle v \rangle_{[t, t + \Delta t]}}{\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}}$
$[0, T]$	0,00	0,00	0,00	62,83	0,00	7,85
$[0, \frac{T}{2}]$	-20,00	0,00	20,00	31,42	5,00	7,85
$[0, \frac{T}{4}]$	-10,00	10,00	14,14	15,71	7,07	7,85
$[0, \frac{T}{8}]$	-2,93	7,07	7,65	7,85	7,65	7,85
$[0, \frac{T}{16}]$	-0,76	3,83	3,90	3,93	7,80	7,85
$[0, \frac{T}{32}]$	-0,19	1,95	1,96	1,96	7,84	7,85
$[0, \frac{T}{64}]$	-0,05	0,98	0,98	0,98	7,85	7,85
$[0, \frac{T}{128}]$	-0,01	0,49	0,49	0,49	7,85	7,85

◇

Známe-li velikost rychlosti hmotného bodu $v(t)$ v libovolném okamžiku t , můžeme užitím vztahu (6.14) vypočítat dráhu hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$. K výpočtu je třeba rozdělit interval $[t, t + \Delta t]$ na podintervaly $[t_i, t_{i+1}]$, kde $i \in \{0, 1, \dots, n-2, n-1\}$ a $t = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t + \Delta t$, v nichž budeme velikost rychlosti hmotného bodu považovat za konstantní. Pro dráhu hmotného bodu potom dostáváme přibližný vztah

$$\Delta s_{[t, t + \Delta t]} \doteq \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i) (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i) \Delta t_{i+1}, \quad (6.23)$$

který platí tím přesněji, čím jsou délky $\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ dílčích intervalů menší.

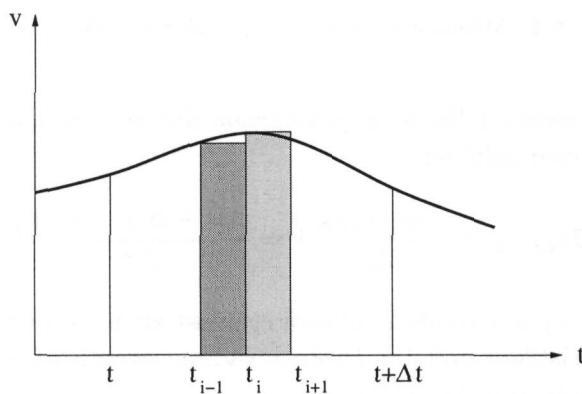
Vztah (6.23) má názornou geometrickou interpretaci. Sestrojíme-li totiž graf závislosti velikosti rychlosti hmotného bodu na čase, odpovídá sčítanec $v(t_i)(t_{i+1} - t_i) = v(t_i)\Delta t_{i+1}$ ploše světleji vyznačeného obdélníku na obr. 6.3. Dráha hmotného bodu, získaná ze vztahu (6.23) limitním přechodem $\Delta t_{i+1} = (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$ pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n-2, n-1\}$, tj.

$$\Delta s_{[t, t+\Delta t]} = \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i)\Delta t_{i+1} \quad \text{pro } n \rightarrow \infty, \quad (6.24)$$

tedy odpovídá ploše ohraničené grafem funkce $v(t)$, časovou osou a svislými přímkami vztyčenými v bodech t a $t + \Delta t$.

Výpočet dráhy je obzvláště jednoduchý v případě, že se hmotný bod pohybuje rovnoměrně rychlostí o velikosti $v(t) = v = \text{konst.}$ Pro tento případ vychází

$$s_{[t, t+\Delta t]} = v \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = v\Delta t. \quad (6.25)$$



Obr. 6.3. K výpočtu dráhy hmotného bodu

Podobně jako průměrnou rychlost zavádíme *průměrné zrychlení* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$

$$\langle \vec{a} \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{\Delta \vec{v}_{[t, t+\Delta t]}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}, \quad (6.26)$$

které charakterizuje změnu vektoru rychlosti v daném intervalu, a jako jeho limitní případ pro $\Delta t \rightarrow 0$ *okamžité zrychlení* hmotného bodu v čase t

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \quad (6.27)$$

B) Pohyb hmotného bodu po kružnici. Tečné a normálové zrychlení

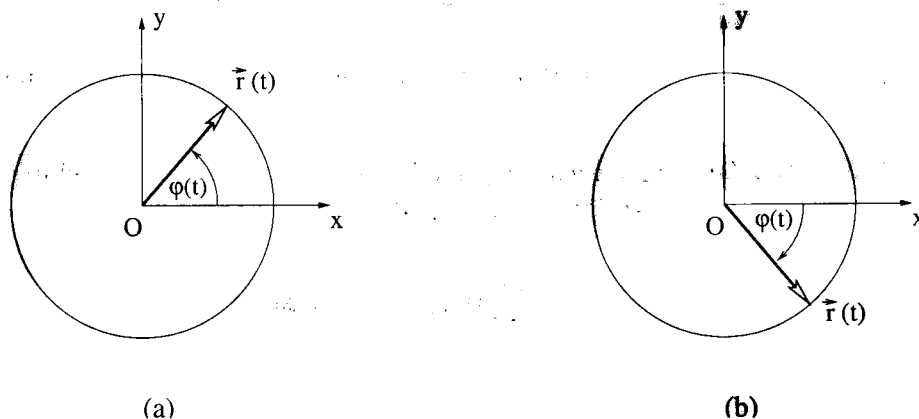
Speciálním případem křivočarého pohybu je pohyb hmotného bodu po kružnici. K jeho popisu zavedeme vztažnou soustavu $S = \langle O; x, y, z \rangle$ tak, aby kružnicová trajektorie ležela v rovině Oxy a střed měla v bodě O .

Veličinou popisující polohu hmotného bodu v okamžiku t je *úhel otočení* $\varphi(t)$, měřený v radiánech od kladné poloosy x (obr. 6.4). Úhel $\varphi(t)$ bereme jako kladný, měříme-li jej proti směru pohybu hodinových ručiček (*kladný matematický smysl*) a jako záporný, měříme-li jej ve směru

pohybu hodinových ručiček (*záporný matematický smysl*). Polohový vektor hmotného bodu má tedy v okamžiku t složky

$$\vec{r}(t) = (R \cos \varphi(t), R \sin \varphi(t), 0), \quad (6.28)$$

kde R je poloměr kružnice.



Obr. 6.4. Měření úhlu otočení: (a) $\varphi(t) > 0$, (b) $\varphi(t) < 0$

Prostřednictvím úhlu otočení definujeme *průměrnou úhlovou rychlost* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$ jako vektorovou veličinu

$$\langle \vec{\omega} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \frac{\Delta \varphi_{[t, t + \Delta t]}}{\Delta t} \vec{k} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \vec{k}, \quad (6.29)$$

kde \vec{k} je jednotkový vektor osy z . Průměrná úhlová rychlost ale není, podobně jako průměrná rychlost, příliš dobrou charakteristikou pohybu. Proto zavádíme *okamžitou úhlovou rychlost* hmotného bodu jako její limitní hodnotu pro $\Delta t \rightarrow 0$, tj.

$$\vec{\omega}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{\omega} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \vec{k}. \quad (6.30)$$

Protože pro úhel otočení (měřený v radiánech) platí

$$|\Delta \varphi_{[t, t + \Delta t]}| = \frac{\Delta s_{[t, t + \Delta t]}}{R}, \quad (6.31)$$

souvisí úhlová rychlost hmotného bodu s rychlostí vztahem

$$|\langle \vec{\omega} \rangle_{[t, t + \Delta t]}| = \frac{\langle v \rangle_{[t, t + \Delta t]}}{R}, \quad \text{resp.} \quad \omega(t) = \frac{v(t)}{R}. \quad (6.32)$$

S ohledem na tento vztah a směr a orientaci vektorů $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ a $\vec{\omega}(t)$ můžeme psát

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t). \quad (6.33)$$

Pro rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici platí $\vec{\omega}(t) = \overline{\text{konst.}}$, pro nerovnoměrný pohyb pak $\vec{\omega}(t) \neq \overline{\text{konst.}}$.

Dále definujeme *průměrné úhlové zrychlení* hmotného bodu v intervalu $[t, t + \Delta t]$

$$\langle \vec{\epsilon} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \frac{\Delta \vec{\omega}_{[t, t + \Delta t]}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}(t + \Delta t) - \vec{\omega}(t)}{\Delta t} \quad (6.34)$$

a okamžité úhlové zrychlení hmotného bodu v čase t

$$\vec{\varepsilon}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{\varepsilon} \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\omega}(t + \Delta t) - \vec{\omega}(t)}{\Delta t}. \quad (6.35)$$

Pro rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici platí $\vec{\varepsilon}(t) \equiv \vec{0}$, pro nerovnoměrný pohyb potom $\vec{\varepsilon}(t) \neq \vec{0}$.

Vektor okamžité úhlové rychlosti je kolmý na rovinu kružnice, kdežto vektor okamžité rychlosti je ke kružnici tečný. Platí tedy

$$\vec{v}(t) \neq \overrightarrow{\text{konst.}} \implies \vec{a}(t) \neq \vec{0} \quad \text{pro každé } t, \quad (6.36)$$

a proto je každý (tj. i rovnoměrný) pohyb hmotného bodu po kružnici zrychlený.

Nenulový vektor okamžitého zrychlení $\vec{a}(t)$ rozložíme do dvou geometricky význačných směrů: do směru tečny ke kružnici a do směru normály ke kružnici v daném bodě $\vec{r}(t)$. Abychom odvodili vztah pro oba průměty, uvažujme o dvou okamžicích t a $t + \Delta t$. V nich nechť má hmotný bod rychlosti $\vec{v}(t)$ a $\vec{v}(t + \Delta t)$, jejichž úhel označíme $\Delta\varphi_{[t, t+\Delta t]}$ (obr. 6.5). Zaveďme jednotkový vektor $\vec{r}(t)$ ve směru tečny ke kružnici tak, aby měl stejnou orientaci jako vektor okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$, tj.

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}, \quad (6.37)$$

a jednotkový vektor $\vec{n}(t)$ ve směru normály tak, aby byl orientován do středu kružnice. Podle obr. 6.5 platí

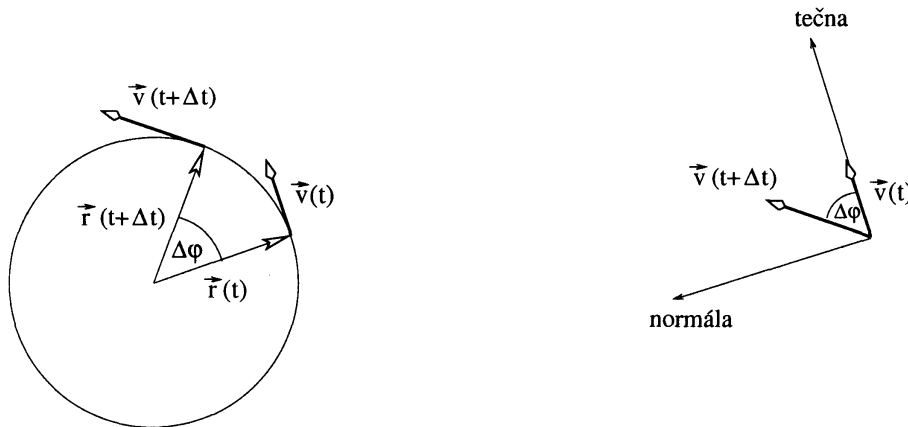
$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{r}(t), \quad (6.38)$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t) \cos \Delta\varphi_{[t, t+\Delta t]} \vec{r}(t) + v(t + \Delta t) \sin \Delta\varphi_{[t, t+\Delta t]} \vec{n}(t). \quad (6.39)$$

Pro průměty $\langle \vec{a}_\tau \rangle_{[t, t+\Delta t]}$ a $\langle \vec{a}_n \rangle_{[t, t+\Delta t]}$ průměrného zrychlení do směru tečny a do směru normály ke kružnici v bodě $\vec{r}(t)$ potom dostáváme

$$\langle \vec{a}_\tau \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{v(t + \Delta t) \cos \Delta\varphi_{[t, t+\Delta t]} - v(t)}{\Delta t} \vec{r}(t), \quad (6.40)$$

$$\langle \vec{a}_n \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{v(t + \Delta t) \sin \Delta\varphi_{[t, t+\Delta t]}}{\Delta t} \vec{n}(t). \quad (6.41)$$



Obr. 6.5. K odvození vztahů pro tečné a normálové zrychlení²

²V obrázku není pro přehlednost vyznačeno časové vymezení úhlu $\Delta\varphi_{[t, t+\Delta t]}$.

Limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ získáme z posledních dvou vztahů *okamžité tečné zrychlení* $\vec{a}_\tau(t)$ a *okamžité normálové zrychlení* $\vec{a}_n(t)$ hmotného bodu v čase t . Protože platí

$$\cos \Delta\varphi_{[t,t+\Delta t]} \approx 1, \quad \sin \Delta\varphi_{[t,t+\Delta t]} \approx \Delta\varphi_{[t,t+\Delta t]}, \quad v(t + \Delta t) \approx v(t) \quad \text{pro } \Delta t \rightarrow 0, \quad (6.42)$$

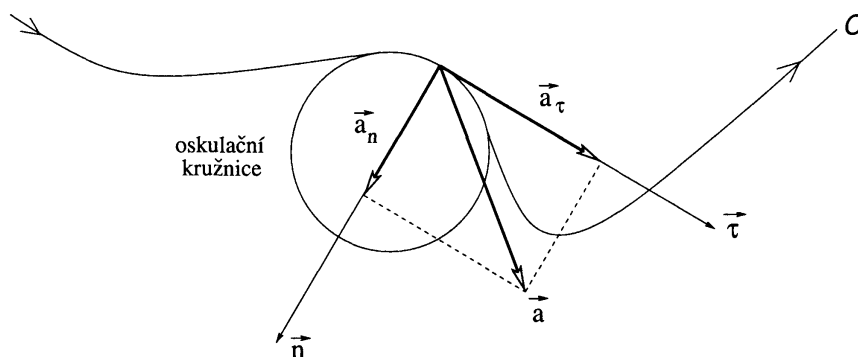
vychází pro tyto veličiny

$$\vec{a}_\tau(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \vec{\tau}(t), \quad (6.43)$$

$$\vec{a}_n(t) = v(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_{[t,t+\Delta t]}}{\Delta t} \vec{n}(t) = v(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{[t,t+\Delta t]}}{R\Delta t} \vec{n}(t) = \frac{v^2(t)}{R} \vec{n}(t). \quad (6.44)$$

Rozklad vektoru okamžitého zrychlení do směru tečny a do směru normály k trajektorii lze uskutečnit pro libovolný pohyb hmotného bodu. Označíme-li opět $\Delta\varphi_{[t,t+\Delta t]}$ úhel sevřený vektory $\vec{v}(t)$ a $\vec{v}(t + \Delta t)$, je podle způsobu odvození zřejmé, že vztah pro tečné zrychlení (6.43) má obecnou platnost.

Poněkud složitější je situace v případě normálového zrychlení. K jejímu posouzení zvolme tři různé body trajektorie $\vec{r}(t - \Delta t_1)$, $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t + \Delta t_2)$ a proložme jimi kružnici. Tato kružnice aproximuje trajektorii tím lépe, čím jsou si uvažované body bližší. Limitními přechody $\Delta t_1 \rightarrow 0$ a $\Delta t_2 \rightarrow 0$ získáme *oskulační kružnici*, kterou nahrazujeme trajektorii hmotného bodu ve velmi blízkém okolí bodu $\vec{r}(t)$. Do vztahu pro normálové zrychlení (6.44) je tedy třeba dosadit poloměr příslušné oskulační kružnice (obr. 6.6).



Obr. 6.6. Rozklad vektoru zrychlení hmotného bodu do směru tečny a do směru normály k trajektorii

Význam rozkladu vektoru okamžitého zrychlení do směru tečny a do směru normály k trajektorii je spojen s typem pohybu hmotného bodu: tečné zrychlení určuje změnu velikosti rychlosti hmotného bodu, normálové zrychlení souvisí se změnou směru vektoru rychlosti (tj. se změnou směru pohybu hmotného bodu). Klasifikaci pohybů hmotného bodu podle tečného a normálového zrychlení ukazuje následující tabulka:

TYP POHYBU	ROVNOMĚRNÝ	NEROVNOMĚRNÝ
PŘÍMOČARÝ	$\vec{a}_\tau(t) \equiv \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \equiv \vec{0}$	$\vec{a}_\tau(t) \neq \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \equiv \vec{0}$
KŘIVOČARÝ	$\vec{a}_\tau(t) \equiv \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \neq \vec{0}$	$\vec{a}_\tau(t) \neq \vec{0}$ $\vec{a}_n(t) \neq \vec{0}$

Podle velikosti tečného zrychlení dále dělíme pohyby hmotného bodu na *rovnoměrně zrychlené* ($a_\tau(t) = \text{konst.}$) a *nerovnoměrně zrychlené* ($a_\tau(t) \neq \text{konst.}$). Známe-li časovou závislost $a_\tau(t)$, můžeme užitím vztahu (6.43) vypočítat velikost rychlosti $v(t)$ hmotného bodu v okamžiku t jako plochu pod grafem funkce $a_\tau(t)$. Speciálně pro rovnoměrně zrychlený pohyb vychází

$$v(t) = v_0 \pm a_\tau t, \quad (6.45)$$

kde v_0 je rychlost hmotného bodu v okamžiku $t = 0$. Dráha, kterou hmotný bod urazí do okamžiku t , je určena plochou pod grafem funkce $v(t)$, tj.

$$s(t) = v_0 t \pm \frac{1}{2} a_\tau t^2. \quad (6.46)$$

Znaménko $+$ v posledních dvou vztazích odpovídá situaci, kdy velikost rychlosti hmotného bodu s časem roste a znaménko $-$ situaci, kdy velikost rychlosti hmotného bodu s časem klesá (takový pohyb se někdy označuje jako *zpomalený*).

Závěrem oddílu zařazujeme několik úloh k procvičení zavedených kinematických pojmů a veličin.

Úlohy:

1. Rozhodněte, zda vztahy (6.25), (6.45) a (6.46) platí pro přímočarý, resp. křivočarý pohyb hmotného bodu. Odpověď zdůvodněte.
2. Uveďte konkrétní příklady jednotlivých typů pohybu hmotného bodu (rovnoměrný, nerovnoměrný, přímočarý, křivočarý) a jejich možných kombinací.
3. Auto se začíná v okamžiku $t = 0$ rovnoměrně zrychleně rozjíždět po přímé vodorovné silnici. Za 12 s dosáhne rychlosti 100 km.h^{-1} a touto rychlostí se pohybuje po dalších 20 s. Zvolme vztahnou soustavu tak, aby se auto pohybovalo po ose x a v okamžiku $t = 0$ bylo v jejím počátku. Určete
 - a) polohový vektor auta v okamžicích 5 s, 10 s, 15 s a 20 s,
 - b) vektor posunutí auta a jeho velikost v intervalech $[0 \text{ s}, 10 \text{ s}]$ a $[15 \text{ s}, 20 \text{ s}]$,
 - c) průměrnou rychlost auta, průměrné zrychlení auta a velikosti těchto vektorů v intervalech $[0 \text{ s}, 10 \text{ s}]$ a $[15 \text{ s}, 20 \text{ s}]$,
 - d) okamžitou rychlost auta, okamžité zrychlení auta a velikosti těchto vektorů v okamžicích 0 s, 10 s, 15 s a 20 s.

Které z výsledků se změní, zvolíme-li vztahnou soustavu tak, že se auto v okamžiku $t = 0$ nachází v jejím počátku a začíná se pohybovat po přímce $y = 2x$? Auto považujte za hmotný bod.

4. Vlak jede po přímé vodorovné trati rychlostí 90 km.h^{-1} . K železničnímu přejezdu se po silnici kolmé k trati blíží auto rychlostí 60 km.h^{-1} . Určete
 - a) velikost rychlosti auta vzhledem k vlaku,
 - b) velikost rychlosti dítěte, které se prochází po chodbě vagónu rychlostí 4 km.h^{-1} , vzhledem k okolní krajině a vzhledem k přijíždějícímu autu.
5. Auto se rozjíždí v zatáčce tvaru části kružnice o poloměru R z klidu rovnoměrně zrychleným pohybem. Za dobu t_1 od počátku pohybu dosáhne rychlosti o velikosti v_1 . Jaká je velikost okamžitého zrychlení auta v časech $t = 0$, $t = t_1$ a $t = 2t_1$? Auto považujte za hmotný bod.
6. Jaký je vztah mezi velikostí tečného zrychlení a velikostí úhlového zrychlení při pohybu hmotného bodu po kružnici?
- * 7. Jaký je vztah mezi vektorem tečného, resp. normálového zrychlení a vektorem úhlového zrychlení, resp. úhlové rychlosti při pohybu hmotného bodu po kružnici?

Návod: Do definičního vztahu pro zrychlení hmotného bodu dosaďte vztah (6.33) a upravte.

8. Cyklista jede po přímé silnici rychlostí $20 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. V jistém okamžiku začne rovnoměrně brzdít tak, že zastaví na dráze 12 m. Určete velikost úhlové rychlosti a úhlového zrychlení kol v okamžiku 1,5 s od počátku brzdění. Poloměr kol je 35 cm.
- * 9. Kruhový disk se otáčí rovnoměrně tak, že za sekundu vykoná 10 otáček. V okamžiku t_0 na něj začne působit brzdící mechanismus, který jej zastaví za 12 s. Jaký úhel opíše vybraný bod disku od okamžiku t_0 do zastavení? Předpokládejte, že vektor úhlového zrychlení disku je konstantní.

6.2 Dynamika hmotného bodu

Definiční vztahy kinematických veličin mají ve všech vztažných soustavách stejný tvar. Z hlediska kinematiky jsou tedy všechny vztažné soustavy rovnocenné. Jinak je tomu v dynamice, kdy je třeba s ohledem na formulaci Newtonových zákonů rozlišovat mezi dvěma třídami vztažných soustav: preferovanými soustavami *inerciálními* a ostatními – *neinerciálními*.

A) Inerciální vztažné soustavy. Newtonovy zákony

Pro účely definice preferované vztažné soustavy se zavádí pojem *volný hmotný bod*. Rozumíme jím takový hmotný bod, který je zcela oproštěn od interakce s jinými hmotnými objekty. Volný hmotný bod lze (v rámci požadované přesnosti) realizovat tělesem natolik vzdáleným od ostatních těles, že je možné interakci s nimi zanedbat. Vztažnou soustavu spojenou se čtyřmi volnými hmotnými body, které neleží v rovině, nazveme *soustavou inerciální*.

Pohyb volných hmotných bodů v inerciální vztažné soustavě vymezuje *první Newtonův zákon*:

V inerciální vztažné soustavě je každý volný hmotný bod v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.

Pokud je jistá vztažná soustava inerciální, pak jsou inerciální také všechny další vztažné soustavy, jejichž počátky se vzhledem k ní pohybují rovnoměrně přímočaře a jejichž osy v ní zachovávají svůj směr (tj. neotáčejí se). Ostatní vztažné soustavy nazýváme *neinerciálními*.

Experimenty ukazují, že jako inerciální se s dobrou přesností chová *Galileova vztažná soustava* s počátkem ve středu hmotnosti sluneční soustavy a s osami mířícími ke stálícím.

Z hlediska aplikací je důležitý *druhý Newtonův zákon*, který určuje souvislost mezi časovou změnou hybnosti $\vec{p} = m\vec{v}$ hmotného bodu o hmotnosti m a výslednicí \vec{F} sil, jimiž na něj působí okolní hmotné objekty:

V inerciální vztažné soustavě je změna hybnosti hmotného bodu za velmi krátký časový interval $[t, t + \Delta t]$ rovna výslednici sil, které na něj v tomto intervalu působí, tj.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}.$$

V obvyklém případě, kdy $m = \text{konst.}$, má druhý Newtonův zákon jednoduchý tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (6.47)$$

Abychom mohli druhého Newtonova zákona použít k výpočtu zrychlení hmotného bodu, musíme k němu připojit *silové zákony* a *princip superpozice sil*.

Obsahem silového zákona je kvantitativní vyjádření síly, charakterizující interakci zkoumaného hmotného bodu s konkrétním objektem. Silové zákony se formulují na základě experimentálních výsledků a mají tedy, stejně jako Newtonovy zákony, charakter *principů*. Příkladem silového zákona je vztah pro gravitační sílu, jíž na hmotný bod o hmotnosti m_1 a polohovém vektoru \vec{r}_1 působí jiný hmotný bod o hmotnosti m_2 a polohovém vektoru \vec{r}_2

$$\vec{F}_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (6.48)$$

kde κ je experimentálně stanovená gravitační konstanta. Princip superpozice sil pak zavádí výslednici sil \vec{F}_i (vyjádřených odpovídajícími silovými zákony), jimiž na zkoumaný hmotný bod současně působí různé objekty, předpisem

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{\mathcal{N}-1} + \vec{F}_{\mathcal{N}}. \quad (6.49)$$

Poslední, *třetí Newtonův zákon*, se týká vzájemného působení hmotných bodů:

Každé dva hmotné body na sebe navzájem působí stejně velkými, ale opačně orientovanými silami. Tyto síly leží na přímé spojnici obou bodů a současně vznikají i zanikají.

Zastavme se krátce u problému měření hmotností a určování silových zákonů. Označme m_1, m_2 hmotnosti dvou hmotných bodů, které nejsou v interakci s žádnými dalšími objekty. Kombinací druhého a třetího Newtonova zákona pro ně dostáváme

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \quad \implies \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (6.50)$$

Vztah (6.50) umožňuje na základě experimentálně určených zrychlení zjišťovat hmotnosti hmotných bodů vzhledem k předem danému etalonu. Z měření zrychlení různých hmotných bodů o známých hmotnostech, vystavených interakci s konkrétním objektem, pak vyvozujeme tvar příslušného silového zákona.

Platnost Newtonových zákonů je omezena na inerciální vztažné soustavy. Většina soustav, které nás běžně obklopují, jako rozjíždějící se nebo brzdící dopravní prostředky, pouťové atrakce a především samotná Země, však patří k soustavám neinerciálním. Ukazuje se ale, že v rámci běžných experimentů nejsou projevy neinerciálnosti vztažné soustavy spojené se Zemí (*laboratorní vztažné soustavy*) příliš významné, a proto ji zde budeme považovat za soustavu inerciální.

B) Neinerciální vztažné soustavy. Fiktivní síly

Jednoduchým příkladem neinerciální vztažné soustavy je vlak, který se rozjíždí po přímé vodorovné trati s konstantním zrychlením \vec{A} . Předpokládejme, že na podlaze jednoho z vagonů leží bedna o hmotnosti M , která se může pohybovat bez tření. Popišme pohyb bedny z hlediska pozorovatele stojícího na nástupišti (inerciální vztažná soustava $S = \langle O; x, y, z \rangle$) a z hlediska pozorovatele jedoucího ve vlaku (neinerciální vztažná soustava $S' = \langle O'; x', y', z' \rangle$).

Podle pozorovatele stojícího na nástupišti působí na bednu Země silou $\vec{F}_G = M\vec{g}$ a podlaha vagonu tlakovou silou \vec{N} (obr. 6.7). Druhý Newtonův zákon pro bednu má tedy tvar

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}. \quad (6.51)$$

Protože se bedna ve svislém směru nepohybuje (tzv. *vazební podmínka*), platí³

$$a_y = 0 \implies Mg = N. \quad (6.52)$$

Pozorovatel stojící na nástupišti tak získává užitím Newtonova zákona (6.51) pro zrychlení bedny výsledek

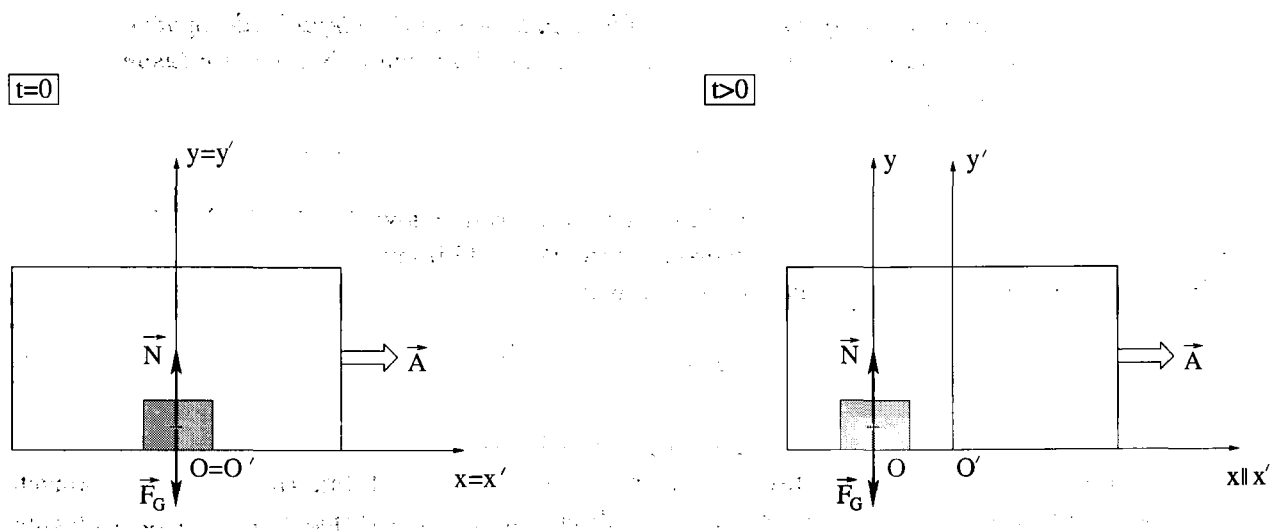
$$\vec{a} = \vec{0}, \quad (6.53)$$

který je ve shodě s jeho pozorováním.

Podle pozorovatele jedoucího ve vlaku působí na bednu opět síly $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a \vec{N} a formulace druhého Newtonova zákona (6.51) vede ke stejnému teoretickému závěru jako pro pozorovatele na nástupišti: zrychlení bedny vzhledem k vagónu je nulové. Tento závěr však neodpovídá pozorovanému zrychlení bedny vzhledem k vagónu

$$\vec{a}' = -\vec{A} \neq \vec{0}. \quad (6.54)$$

Rozpor mezi teoretickým údajem ($\vec{a}' = \vec{0}$) a pozorováním ($\vec{a}' = -\vec{A}$) vzniká tím, že druhý Newtonův zákon (6.51) v neinerciální vztažné soustavě spojené s vagónem neplatí.



Obr. 6.7. K popisu pohybu bedny vzhledem k nástupišti a vzhledem k vagónu

Zabývejme se problematikou vztažných soustav obecněji. Nechť $S' = \langle O'; x', y', z' \rangle$ je neinerciální vztažná soustava, jejíž počátek se v inerciální vztažné soustavě $S = \langle O; x, y, z \rangle$ pohybuje s nenulovým zrychlením \vec{A} (mluvíme o *posuvném* neboli *translačním pohybu* soustavy S' vzhledem k soustavě S) a jejíž osy nemění v soustavě S směr (soustava S' se vzhledem k soustavě S neotáčí). Mezi polohovým vektorem $\vec{r}'(t)$ hmotného bodu v soustavě S' a polohovým vektorem $\vec{r}(t)$ hmotného bodu v soustavě S platí podle obr. 6.8 vztah

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t), \quad (6.55)$$

kde $\vec{R}(t)$ je polohový vektor bodu O' v soustavě S . Odtud dostáváme

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t), \quad (6.56)$$

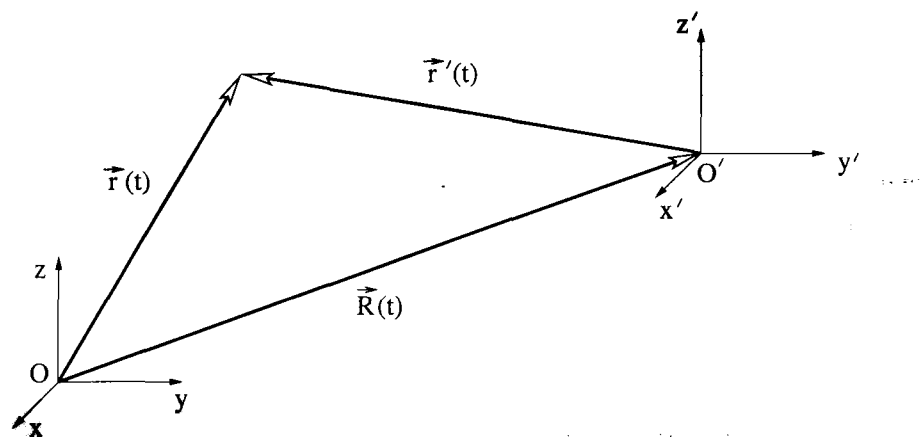
$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{A}(t), \quad (6.57)$$

³Zdůrazněme, že síly \vec{F}_G a \vec{N} nejsou ve smyslu třetího Newtonova zákona akcí a reakcí, protože působí na stejné těleso (zde na bednu). Rovnost velikostí těchto sil je důsledkem vazební podmínky $a_y = 0$.

kde $\vec{V}(t)$ je rychlost a $\vec{A}(t)$ zrychlení bodu O' v soustavě S . Násobením posledního vztahu hmotností m hmotného bodu dostaneme s využitím druhého Newtonova zákona (6.47) a principu superpozice sil (6.49) vztah (pro přehlednost již nevyznačujeme časové závislosti jednotlivých veličin)

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{F}^*. \quad (6.58)$$

Výraz $\vec{F}^* = -m\vec{A}$, který se zde objevuje jako důsledek vzájemného pohybu soustav S a S' , nazýváme *fiktivní silou*, protože má fyzikální rozměr síly, ale na rozdíl od *reálných sil* \vec{F}_i nemá původ v interakci hmotného bodu s okolními objekty (ve smyslu třetího Newtonova zákona na ni tedy neexistuje reakce). Fiktivní sílu je nutno chápat pouze formálně, jako dodatečný člen, který umožňuje rozšířit „platnost“ druhého Newtonova zákona také na neinerciální vztažné soustavy. Vztah (6.58) budeme nazývat *druhým Newtonovým zákonem v neinerciální vztažné soustavě*.



Obr. 6.8. Polohový vektor hmotného bodu v soustavě S a v soustavě S'

Vztah (6.58) platí také v případě, že soustava S' koná vzhledem k inerciální soustavě S posuvný i otáčivý pohyb a hmotný bod je trvale v klidu v jejím počátku. Situace, kdy se soustava S' vzhledem k S posouvá i otáčí a hmotný bod má vzhledem k soustavě S' obecnou polohu i rychlost je již složitější, a proto se o ní zmíníme pouze informativně v závěrečném paragrafu tohoto oddílu.

Následující příklad ukazuje přístup k řešení téhož problému z hlediska dvou různých vztažných soustav: soustavy inerciální a soustavy neinerciální.

PŘÍKLAD

Na podlaze výtahu, který se pohybuje s konstantním zrychlením \vec{A} , leží pružinové váhy. Jaký údaj ukazují váhy, stoupne-li si na ně pasažér o hmotnosti M ? Proveďte diskuzi výsledku v závislosti na orientaci a velikosti vektoru \vec{A} . Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího na schodišti (inerciální vztažná soustava S) i z hlediska pasažéra jedoucího ve výtahu (neinerciální vztažná soustava S').

ŘEŠENÍ:

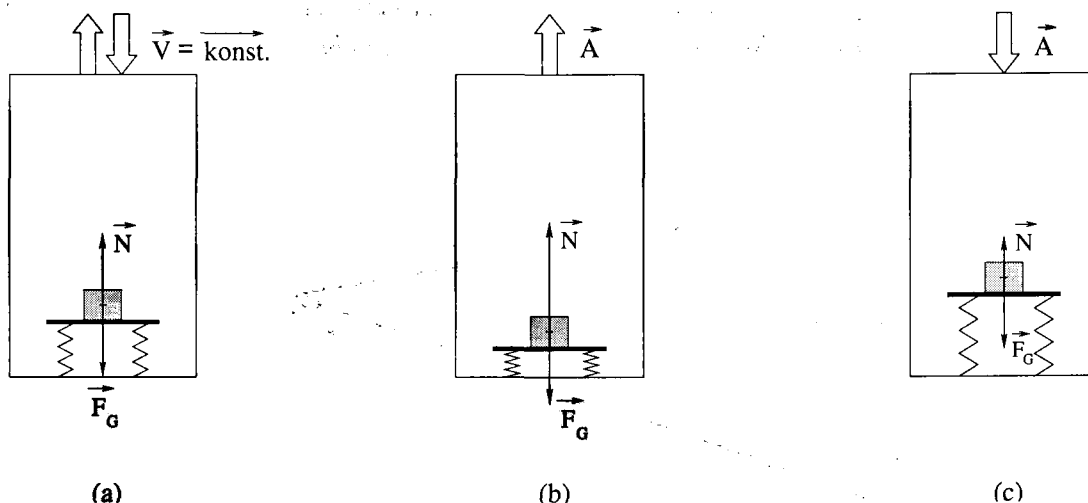
• *Řešení ve vztažné soustavě S* : Na pasažéra působí Země silou $\vec{F}_G = M\vec{g}$ a váhy tlakovou silou \vec{N} . Protože se pasažér pohybuje vzhledem ke schodišti se stejným zrychlením jako výtah, má druhý Newtonův zákon tvar

$$M\vec{A} = M\vec{g} + \vec{N}, \quad \text{resp.} \quad \pm MA = -Mg + N, \quad (6.59)$$

příčímž znaménko + před výrazem MA odpovídá situaci znázorněné na obr. 6.9(b) a znaménko – situaci znázorněné na obr. 6.9(c). Podle třetího Newtonova zákona působí pasažér na váhy stejně velkou, ale opačně orientovanou silou než váhy na pasažéra. Váhy tedy ukazují údaj

$$\bar{M} = \frac{N}{g} = M \left(1 \pm \frac{A}{g} \right). \quad (6.60)$$

Diskuze výsledku: Pro situaci znázorněnou na obr. 6.9(a) je $\bar{M} = M$, pro situaci znázorněnou na obr. 6.9(b) je $\bar{M} > M$ a pro situaci znázorněnou na obr. 6.9(c) je $\bar{M} < M$. Zvláštním případem poslední situace je volný pád výtahu, pro nějž je $\vec{A} = \vec{g}$ a tudíž $\bar{M} = 0$ (pasažér je v *beztížném stavu*).



Obr. 6.9. Vázení ve výtahu: (a) výtah se pohybuje rovnoměrně, (b) výtah se rozjíždí vzhůru nebo brzdí při pohybu dolů, (c) výtah se rozjíždí dolů nebo brzdí při pohybu vzhůru

- *Řešení ve vztažné soustavě S' :* Pasažér jedoucí ve výtahu musí kromě reálných sil $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a \vec{N} zahrnout do druhého Newtonova zákona také fiktivní sílu $\vec{F}^* = -M\vec{A}$. Pasažér je vzhledem k výtahu v klidu ($\vec{a}' = \vec{0}$), proto má druhý Newtonův zákon tvar

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{N} - m\vec{A}, \quad \text{resp.} \quad 0 = -Mg + N \mp MA. \quad (6.61)$$

Další postup i výsledky jsou stejné jako při řešení úlohy v soustavě S . ◇

C) Pohyb sférického kyvadla

Doposud jsme se zabývali případy, kdy se hmotné body pohybovaly vzhledem ke vztažné soustavě spojené se Zemí přímočaře. Nyní přistoupíme k ukázce aplikace druhého Newtonova zákona na křivočarý pohyb.

Jednoduchým systémem, který koná křivočarý pohyb, je tělísko zavěšené na lehkém vlákně neproměnné délky – tzv. *sférické kyvadlo*. Protože obecný pohyb sférického kyvadla není možné popsat explicitně, budeme se zabývat jen dvěma speciálními situacemi: pohybem kónického kyvadla a pohybem matematického kyvadla.

KÓNICKÉ KYVADLO

Kónickým kyvadlem rozumíme sférické kyvadlo, které se pohybuje po kružnici ležící ve vodorovné rovině (model řetízového kolotoče).

Na kyvadlo působí Země silou $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a vlákno tahovou silou \vec{T} (odpor vzduchu pro jednoduhost zanedbáváme). Považujeme-li soustavu „Země+kyvadlo“ za izolovanou, platí vzhledem k tomu, že tahová síla má stále směr napnutého vlákna a nekoná tudíž práci, pro kyvadlo zákon zachování mechanické energie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konst.}, \quad (6.62)$$

kde $E_p = mgh$ je tíhová potenciální energie vzhledem ke vhodně zvolené nulové hladině. Pro kónické kyvadlo se tíhová potenciální energie nemění, a proto se podle zákona zachování mechanické energie nemění ani velikost jeho rychlosti. Výsledné zrychlení kyvadla má tedy pouze normálovou složku, tj.

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (6.63)$$

kde R je poloměr kružnicové trajektorie kyvadla (obr. 6.10(a)). Zde se však pro výsledné zrychlení častěji používá termín *dostředivé zrychlení* a pro výslednou sílu $\vec{F}_d = m\vec{a}$ *dostředivá síla*.

Druhý Newtonův zákon pro kónické kyvadlo má v soustavě spojené se Zemí tvar

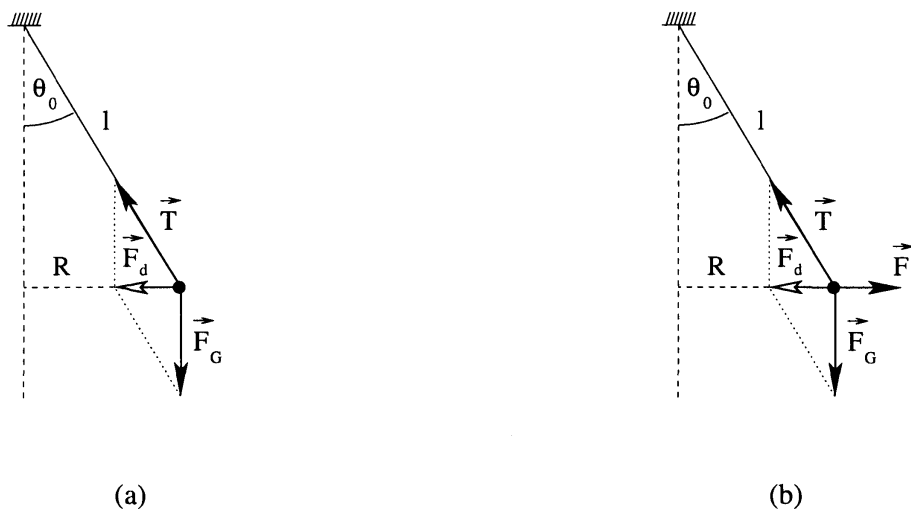
$$m \frac{v^2}{R} \vec{n} = m\vec{g} + \vec{T}. \quad (6.64)$$

Podle obr. 6.10(a) proto platí

$$\tan \theta_0 = \frac{F_d}{F_G} = \frac{v^2}{Rg} = \frac{v^2}{lg \sin \theta_0} \implies v = \sqrt{lg \sin \theta_0 \tan \theta_0}, \quad (6.65)$$

$$\cos \theta_0 = \frac{F_G}{T} \implies T = \frac{mg}{\cos \theta_0}. \quad (6.66)$$

Aby se sférické kyvadlo pohybovalo jako kónické, musíme mu v poloze popsané úhlem θ_0 udělit zcela konkrétní rychlost: její vektor musí být kolmý k rovině určené svislou přímkou a vychýleným vláknem, velikost je předepsána vztahem (6.65). Tahová síla vlákna má v průběhu pohybu kyvadla konstantní velikost danou vztahem (6.66) a má stále směr napnutého vlákna.



Obr. 6.10. Síly působící na kónické kyvadlo: (a) v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, (b) v neinerciální vztažné soustavě spojené s kyvadlem

K uvedeným závěrům bylo možné dospět také z hlediska neinerciální vztažné soustavy spojené s kyvadlem. Počátek takové soustavy se ve vztažné soustavě spojené se Zemí pohybuje se zrychlením $\vec{A} = \vec{a}_n$, proto je do druhého Newtonova zákona třeba zahrnout fiktivní sílu $\vec{F}^* = -m\vec{a}_n$

(obr. 6.10(b)). Tuto sílu nazýváme vzhledem k jejímu směru a orientaci *odstředivou (fiktivní) silou*. Poněvadž je kyvadlo ve vztažné soustavě s ním spojené v klidu ($\vec{a}' = \vec{0}$), má druhý Newtonův zákon tvar

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} - m\frac{v^2}{R}\vec{n}. \quad (6.67)$$

MATEMATICKÉ KYVADLO

Matematickým kyvadlem nazýváme sférické kyvadlo, které se pohybuje ve stále stejné svislé rovině (model dětské houpačky).

Matematické kyvadlo mění v průběhu pohybu svoji výšku nad předem danou vodorovnou rovinou, a proto se podle zákona zachování mechanické energie mění také velikost jeho rychlosti. Kyvadlo se tedy pohybuje po části kružnicové trajektorie tak, že jeho zrychlení má obecně nenulovou tečnou i normálovou složku. Výsledné zrychlení \vec{a} kyvadla a tím i výsledná síla $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{T}$ leží vždy v polorovině určené napnutým vláknem, tečnou ke kružnici v dané poloze kyvadla a bodem závěsu (obr. 6.11). Průměty výsledné síly \vec{F} do směru tečny a do směru normály ke kružnici mají velikost

$$F_\tau = m|a_\tau| = mg|\sin\theta|, \quad (6.68)$$

$$F_n = ma_n = T - mg\cos\theta. \quad (6.69)$$

Z druhé rovnice dostáváme vztah pro velikost tahové síly vlákna

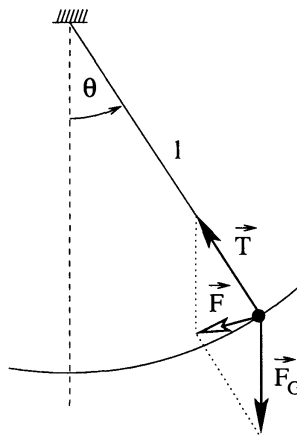
$$T = ma_n + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta. \quad (6.70)$$

K určení velikosti tahové síly v závislosti na poloze kyvadla θ použijeme zákona zachování mechanické energie. Označíme-li θ_0 maximální výchylku kyvadla (bod obratu), platí

$$mgl(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) \implies m\frac{v^2}{l} = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (6.71)$$

a tedy

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0). \quad (6.72)$$



Obr. 6.11. Síly působící na matematické kyvadlo

Při formulaci druhého Newtonova zákona v neinerciální vztažné soustavě spojené s matematickým kyvadlem je třeba uvědomit si, že fiktivní síla $\vec{F}^* = -m\vec{a} = -\vec{F}$ má obecně nenulový průmět do směru tečny i do směru normály k trajektorii kyvadla.

D) Otáčející se vztažné soustavy

V závěrečném paragrafu tohoto oddílu si všimneme neinerciálních vztažných soustav, které se vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí otáčejí. Problematiku uvedeme konkrétním příkladem.

PŘÍKLAD

Dva hokejoví hráči stojí na vodorovné točně o poloměru R , která se vzhledem k Zemi otáčí konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Hráč A je ve středu točny, hráč B stojí na obvodu.

- V okamžiku $t = 0$ vystřelí hráč A puk rychlostí, která má vzhledem k Zemi velikost v_0 . Popište trajektorii puku ve vztažné soustavě spojené se Zemí a ve vztažné soustavě spojené s točnou. V obou případech vhodně zvolte soustavu souřadnic. Tření mezi pukem a točnou i odpor vzduchu zanedbejte.
- Jak musí hráč A vystřelit puk, aby jej mohl hráč B stojící na obvodu točny zachytit?

ŘEŠENÍ:

Zvolme vztažnou soustavu $S = \langle O; x, y, z \rangle$ spojenou se Zemí tak, že její počátek O splývá se středem točny, osa z míří svisle vzhůru a osa y je souhlasně rovnoběžná s vektorem počáteční rychlosti \vec{v}_0 puku. Vztažnou soustavu $S' = \langle O'; x', y', z' \rangle$ spojenou s točnou zavedme tak, aby $O' \equiv O$, $z' \equiv z$ a v čase $t = 0$ platilo $x' = x$, $y' = y$ (obr. 6.12).

- V soustavě S působí na puk Země silou $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a točna tlakovou silou \vec{N} . Druhý Newtonův zákon pro puk má tvar

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (6.73)$$

Protože se puk ve svislém směru nepohybuje (vazební podmínka), platí

$$mg = N \quad (6.74)$$

a pro zrychlení puku v soustavě S dostáváme

$$\vec{a} = \vec{0}. \quad (6.75)$$

Puk tedy v soustavě S koná rovnoměrný přímočarý pohyb a v okamžiku t má souřadnice

$$x_p(t) = 0, \quad (6.76)$$

$$y_p(t) = v_0 t, \quad (6.77)$$

$$z_p(t) = 0. \quad (6.78)$$

Mezi okamžitými souřadnicemi puku v soustavě S a odpovídajícími souřadnicemi v soustavě S' platí transformační vztahy (obr. 6.12)

$$x'(t) = x(t) \cos \omega t + y(t) \sin \omega t, \quad (6.79)$$

$$y'(t) = -x(t) \sin \omega t + y(t) \cos \omega t, \quad (6.80)$$

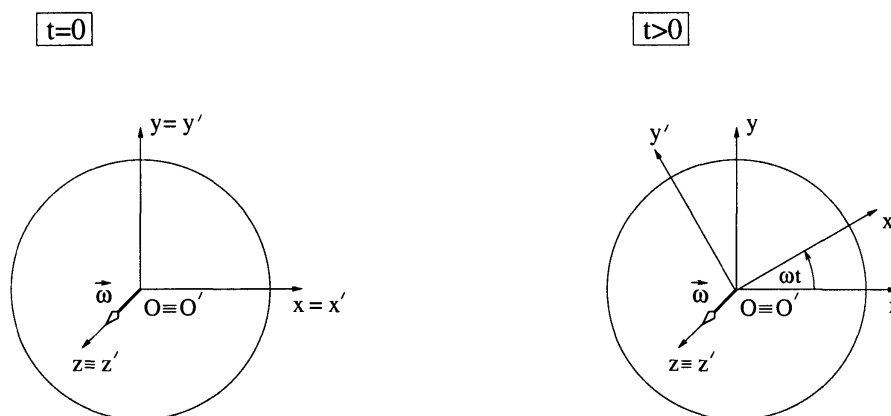
$$z'(t) = z(t), \quad (6.81)$$

proto má puk v soustavě S' souřadnice

$$x'_p(t) = v_0 t \sin \omega t, \quad (6.82)$$

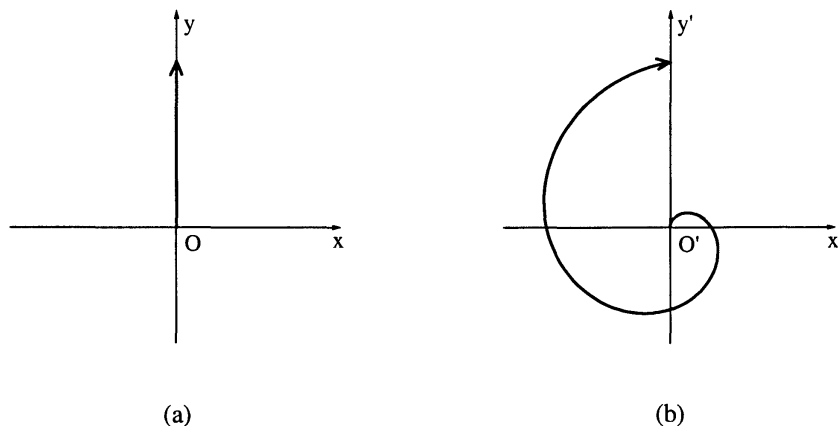
$$y'_p(t) = v_0 t \cos \omega t, \quad (6.83)$$

$$z'_p(t) = 0. \quad (6.84)$$



Obr. 6.12. Zavedení vztažných soustav pro popis pohybu puku na točně

Trajektorii puku v obou vztažných soustavách znázorňuje obr. 6.13.



Obr. 6.13. Trajektorie puku: (a) ve vztažné soustavě S , (b) ve vztažné soustavě S'

b) Označme α úhel, který v okamžiku vystřelení puku svírá spojnice hráčů A a B s osou y . Zjistíme, jaké hodnoty musí úhel α nabývat, aby hráč B mohl puk zachytit.

• **Řešení ve vztažné soustavě S :** Okamžité souřadnice hráče B v soustavě S jsou (obr. 6.14)

$$x_B(t) = R \sin(\alpha - \omega t), \quad (6.85)$$

$$y_B(t) = R \cos(\alpha - \omega t), \quad (6.86)$$

$$z_B(t) = 0. \quad (6.87)$$

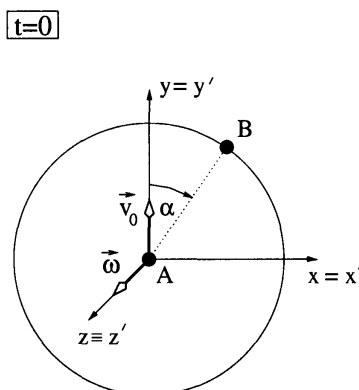
Hráč B se v okamžiku zachycení puku nachází na ose y . Pro souřadnice puku a hráče B v soustavě S v tomto okamžiku platí

$$y_p(t) = v_0 t = R, \quad y_B(t) = R \cos(\alpha - \omega t) = R. \quad (6.88)$$

Z posledních dvou rovnic vychází

$$\alpha = \frac{\omega R}{v_0} + 2k\pi, \quad \text{kde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.89)$$

Číslo k lze zvolit tak, aby $\alpha \in [0, 2\pi)$.



Obr. 6.14. Hokej na točně

• **Řešení ve vztažné soustavě S' :** Porovnáním souřadnic hráče B v soustavě S'

$$x'_B(t) = R \sin \alpha, \quad (6.90)$$

$$y'_B(t) = R \cos \alpha, \quad (6.91)$$

$$z'_B(t) = 0 \quad (6.92)$$

se souřadnicemi puku (6.82) – (6.84) dostaneme soustavu rovnic

$$v_0 t \sin \omega t = R \sin \alpha, \quad v_0 t \cos \omega t = R \cos \alpha, \quad (6.93)$$

kteřá opět vede k výsledku (6.89). ◇

Zakřivení trajektorie puku na točně (obr. 6.13(b)) připisují oba hráči působení jistých (zatím neznámých) fiktivních sil, které jsou dány neinerciálností vztažné soustavy spojené s točnou. Abychom zjistili, jak výslednice \vec{F}^* těchto sil závisí na pohybu S' vzhledem k S (tj. na $\vec{\omega}$), vyjádříme na základě známé trajektorie puku (řešení a) jeho zrychlení \vec{a}' vzhledem k soustavě S' .

Pro složky průměrné rychlosti puku v soustavě S' v intervalu $[t, t + \Delta t]$ platí užitím (6.82) a (6.83)

$$\langle v'_x \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{x'_p(t + \Delta t) - x'_p(t)}{\Delta t} = \frac{v_0(t + \Delta t) \sin \omega(t + \Delta t) - v_0 t \sin \omega t}{\Delta t}, \quad (6.94)$$

$$\langle v'_y \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{y'_p(t + \Delta t) - y'_p(t)}{\Delta t} = \frac{v_0(t + \Delta t) \cos \omega(t + \Delta t) - v_0 t \cos \omega t}{\Delta t}. \quad (6.95)$$

Aplikací součtových vzorců pro $\sin \omega(t + \Delta t)$ a $\cos \omega(t + \Delta t)$, uvážením

$$\sin \omega \Delta t \approx \omega \Delta t, \quad \cos \omega \Delta t \approx 1 \quad \text{pro} \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad (6.96)$$

a zanedbáním členů obsahujících $(\Delta t)^2$ získáme limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ ze složek průměrné rychlosti složky okamžité rychlosti puku v soustavě S'

$$v'_x(t) = v_0 \sin \omega t + v_0 \omega t \cos \omega t, \quad (6.97)$$

$$v'_y(t) = v_0 \cos \omega t - v_0 \omega t \sin \omega t. \quad (6.98)$$

Jejich prostřednictvím analogicky odvodíme vztahy pro složky okamžitého zrychlení puku v soustavě S' . Vychází

$$a'_x(t) = 2v_0 \omega \cos \omega t - v_0 \omega^2 t \sin \omega t = 2v_0 \omega \cos \omega t - \omega^2 x'(t), \quad (6.99)$$

$$a'_y(t) = -2v_0 \omega \sin \omega t - v_0 \omega^2 t \cos \omega t = -2v_0 \omega \sin \omega t - \omega^2 y'(t). \quad (6.100)$$

Snadno se přesvědčíme, že vektor zrychlení puku $\vec{a}' = (a'_x, a'_y)$ v soustavě S' můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (6.101)$$

Pro výslednou fiktivní sílu působící v soustavě S' na puk tedy platí

$$\vec{F}^* = m\vec{a}' = -m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] - 2m (\vec{\omega} \times \vec{v}'), \quad (6.102)$$

kde m je hmotnost puku. Výraz

$$\vec{F}_{\text{od}}^* = -m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] \quad (6.103)$$

přítom nazýváme *odstředivou (fiktivní) silou* a výraz

$$\vec{F}_{\text{C}}^* = -2m (\vec{\omega} \times \vec{v}') \quad (6.104)$$

nazýváme *Coriolisovou (fiktivní) silou*. Uvedené vztahy pro odstředivou a Coriolisovu sílu mají obecnou platnost.

Pokud se navíc soustava S' vzhledem k inerciální vztažné soustavě S otáčí s nenulovým úhlovým zrychlením, tj. $\vec{\omega}(t) \neq \text{konst.}$, musíme do druhého Newtonova zákona zahrnout ještě *Eulerovu (fiktivní) sílu*, pro niž lze odvodit vztah

$$\vec{F}_{\text{E}}^* = -m (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'). \quad (6.105)$$

Druhý Newtonův zákon v libovolné neinerciální vztažné soustavě má potom obecný tvar

$$m\vec{a}' = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i + \vec{F}_t^* + \vec{F}_{\text{od}}^* + \vec{F}_{\text{C}}^* + \vec{F}_{\text{E}}^*, \quad (6.106)$$

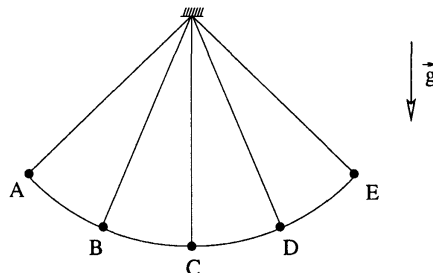
kde člen $\vec{F}_t^* = -m\vec{A}$ nazveme pro úplnost *translační (fiktivní) silou*.

K procvičení aplikací druhého Newtonova zákona a jeho formulací v různých vztažných soustavách slouží následující soubor úloh.

Úlohy:

1. Vlak se rozjíždí po přímé vodorovné trati. Na podlaze jednoho z vagónů leží bedna o hmotnosti M . Jakých hodnot může nabývat zrychlení vlaku, aby bedna zůstala vzhledem k vagónu v klidu? Koeficient statického tření mezi bednou a podlahou vagónu je f_0 . Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího poblíž trati (inerciální vztahná soustava) i z hlediska pozorovatele jedoucího ve vlaku (neinerciální vztahná soustava).
2. Předpokládejte, že zrychlení vlaku z předchozí úlohy stanovenou podmínku nesplňuje. Jaké je zrychlení bedny vzhledem k Zemi a vzhledem k vagónu? Koeficient dynamického tření mezi bednou a podlahou vagónu je f .
3. Na podlaze vagónu jedoucího po přímé vodorovné trati s konstantním zrychlením \vec{A} stojí nádoba s vodou a je vzhledem k vagónu v klidu. Popište plochy spojující ve vodě místa o stejném tlaku. Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího poblíž trati i z hlediska pozorovatele jedoucího ve vlaku.
4. Jak se změní výsledek předchozí úlohy, jestliže se vlak rozjíždí do svahu s úhlem sklonu α a jeho zrychlení je \vec{A} ?
5. Popište rovnovážnou polohu kuličky zavěšené na niti ve vagóně, který
 - a) jede po přímé vodorovné trati s konstantním zrychlením \vec{A} ,
 - b) projíždí zatáčkou o poloměru R rychlostí o konstantní velikosti v .Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího poblíž trati i z hlediska pozorovatele jedoucího ve vlaku.
6. Jaká je perioda malých kmitů matematického kyvadla v situacích a) a b) z předchozí úlohy? (Perioda malých kmitů matematického kyvadla o délce l , jehož bod závěsu je ve vztahné soustavě spojené se Zemí v klidu, je dána vztahem $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.)
7. Popište rozložení tlaku v kapalině umístěné ve výtahu, který se pohybuje s konstantním zrychlením \vec{A} . Proveďte diskuzi výsledku v závislosti na orientaci a velikosti vektoru \vec{A} . Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího na schodišti (inerciální vztahná soustava) i z hlediska pozorovatele jedoucího ve výtahu (neinerciální vztahná soustava).
8. Výtah se pohybuje s konstantním zrychlením \vec{A} . Z výšky h nad podlahou volně pustíme malé tělíčko. Za jak dlouho tělíčko dopadne na podlahu, je-li odpor vzduchu zanedbatelný? Proveďte diskuzi výsledku. Úlohu řešte z hlediska pozorovatele stojícího na schodišti i z hlediska pozorovatele jedoucího ve výtahu.
9. Rozhodněte a zdůvodněte, jakých hodnot může nabývat úhel θ_0 pro kónické kyvadlo.
10. Do následujícího obrázku schematicky zakreslete výslednou sílu působící na matematické kyvadlo při průchodu krajní polohou (body A , E), při průchodu rovnovážnou polohou (bod C) a při průchodu obecnou polohou (body B a D).

Návod: Před řešením úlohy si připomeňte vztahy (6.68) a (6.69).



11. Jakou minimální rychlost musíme udělit matematickému kyvadlu délky l v rovnovážné poloze, aby dospělo do nejvyššího bodu kružnice ležící ve svislé rovině? Předpokládejte, že
- kyvadlo je tvořeno kuličkou zavěšenou na niti zanedbatelné hmotnosti,
 - kyvadlo je tvořeno kuličkou upevněnou na tyči zanedbatelné hmotnosti.

Vysvětlete případnou rozdílnost výsledků. Úlohu řešte ve vztažné soustavě spojené se Zemí i ve vztažné soustavě spojené s kyvadlem.

- *12. Kyvadlo je tvořeno malou kuličkou zavěšenou na niti délky $l = 1,0$ m. Kuličce udělíme v rovnovážné poloze rychlost o velikosti $v = 5,5$ m.s⁻¹ kolmou na směr napnuté nitě. Určete místo, v němž se kulička oddělí od kružnicové trajektorie. Do jaké výšky nad vodorovnou rovinou, která prochází rovnovážnou polohou kyvadla, kulička vystoupí? Počítejte s hodnotou tíhového zrychlení $g = 9,8$ m.s⁻². Odpor vzduchu zanedbejte.

13. Porovnejte subjektivní pocity pasažéra při

- rychlém a pomalém průjezdu vozičku horské dráhy ostrou vodorovnou zatáčkou,
- rychlém a pomalém průjezdu vozičku nejvyšším bodem „spirály smrti“ (smyčky tvaru kružnice ležící ve svislé rovině).

Které síly tvoří v jednotlivých případech sílu dostředivou? Kdy je nutno pasažéra pevně připoutat k sedadlu?

14. Kolotoč „Lochneska“ je tvořen kruhovým diskem o poloměru R , v jehož středu je upevněn basketbalový koš a na obvodu jsou rozmístěny sedačky pro hráče. Hráč dokáže hodit míč rychlostí o velikosti v_0 vzhledem k Zemi.
- Jak musí hráč mířit, aby zasáhl koš, je-li kolotoč v klidu?
 - Jak musí hráč mířit, aby zasáhl koš, jestliže se kolotoč otáčí konstantní úhlovou rychlostí o velikosti ω ? Jakou podmínku musí splňovat zadané veličiny, aby mohl hráč koš zasáhnout?

Předpokládejte, že rovina kolotoče je vodorovná a odpor vzduchu proti pohybu míče lze zanedbat.

- *15. Odvoďte vztahy (6.99) a (6.100) geometricky.

Návod: Postupujte podobně jako v paragrafu 6.1 B) při odvození vztahů pro tečné a normálové zrychlení. Uvědomte si, že rychlost puku vzhledem k točce je dána rozdílem rychlosti puku \vec{v}_0 a rychlosti daného bodu točny vzhledem k Zemi.

16. Vysvětlete rozdíl mezi gravitačním a tíhovým zrychlením.

- *17. Vypočtete úhel, který v místě o zeměpisné šířce α svírá vektor gravitačního a tíhového zrychlení. Ve kterém místě nabývá tento úhel maximální hodnoty? Zemi považujte za homogenní kouli o poloměru R . (Zeměpisnou šířkou rozumíme úhel, který svírá spojnice středu Země a daného místa s rovinou rovníku.)

18. Řeka na severní polokouli teče

- od jihu k severu,
- od východu na západ.

Který z břehů je více vymílán? Změní se odpovědi, teče-li řeka na jižní polokouli? Lze souhlasit s tvrzením, že vymílání břehů způsobuje Coriolisova síla?

- *19. Z vysoké věže volně pustíme malý předmět. Kvalitativně popište místo dopadu předmětu na Zemi vzhledem k patě věže.

- *20. Sférické kyvadlo je zavěšené nad zemským pólem. Kvalitativně popište jeho pohyb v následujících případech:

- kyvadlo vychýlíme o úhel θ_0 a uvolníme,
- kyvadlu udělíme v rovnovážné poloze rychlost o velikosti v_0 kolmou na směr napnutého vlákna.

Poznámka: Lze ukázat, že rovina malých kmitů matematického kyvadla se ve vztažné soustavě spojené se Zemí otáčí konstantní úhlovou rychlostí o velikosti $\omega_Z \sin \beta$, kde ω_Z je velikost úhlové rychlosti Země a β je úhel, který svírá svislá přímka procházející daným místem na Zemi s rovinou rovníku. Kyvadlo pohybující se po takovou dobu, že se měřitelně projeví neinerciálnost vztažné soustavy spojené se Zemí, nazýváme *Foucaultovým kyvadlem*⁴.

⁴Kyvadlo je pojmenováno po francouzském fyzikovi Jeanu Bernardu Léonu Foucaultovi (1819 – 1868), který pomocí něj v roce 1851 změřil úhlovou rychlost zemské rotace. Použil kyvadla tvořeného koulí o hmotnosti 30 kg zavěšené na ocelovém drátě délky 67 m v budově pařížského Pantheonu.

II. ČÁST

MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

7. Kinematika tuhého tělesa

Doposud jsme se zabývali studiem pohybu hmotného bodu, a to jak z obecného hlediska (kapitoly 1., 2. a 3.), tak v některých konkrétních situacích (kapitoly 4. a 5.). Nahrazení reálného tělesa modelem hmotného bodu je však často příliš hrubým zjednodušením skutečnosti, neboť vede ke ztrátě informace o orientaci tělesa vzhledem ke zvolené vztažné soustavě a o vzájemném pohybu jeho částí. Proto se v mechanice uplatňují i jiné modely, jejichž volba se řídí požadavky dané úlohy. Jde o *soustavu hmotných bodů* a o *kontinuum*.

Soustava hmotných bodů (těleso s diskrétním rozložením hmotnosti) je tvořena konečným počtem objektů, z nichž každý považujeme za hmotný bod. Rozložení hmotnosti v soustavě popisuje v každém okamžiku t soubor veličin $\{m_i(t), \vec{r}_i(t)\}$, kde $\vec{r}_i(t)$ jsou polohové vektory jednotlivých hmotných bodů a $m_i(t)$ jejich hmotnosti (obvykle platí $m_i(t) = konst.$).

Kontinuum (těleso se spojitým rozložením hmotnosti) je tvořeno látkou spojitě vyplňující část prostoru o objemu $V(t)$. V každém okamžiku t charakterizuje rozložení hmotnosti v kontinuu *hustota* $\rho(\vec{r}, t)$, definovaná jako funkce $V(t) \rightarrow \mathbf{R}$ spojitá na $V(t) \subset \mathbf{R}^3$ skoro všude a určující hmotnost libovolné objemové části $\Delta V(t)$ kontinua předpisem

$$m(\Delta V(t)) = \int_{\Delta V(t)} \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (7.1)$$

Důležitým speciálním případem obou modelů je *tuhé těleso*. Rozumíme jím těleso, pro které existuje vztažná soustava (s ortonormální pravotočivou bází), v níž je rozložení jeho hmotnosti časově neproměnné. Zavedení abstraktní představy tuhého tělesa je motivováno zkušeností, že v řadě běžných či prakticky důležitých situací nejsou deformace pohybujících se těles příliš významné.

7.1 Poloha tuhého tělesa

Z geometrické představy je patrné, že k určení polohy tuhého tělesa ve zvolené vztažné soustavě $S = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ stačí zadat polohu tří jeho libovolných bodů P, Q, R , které neleží v přímce (obr. 7.1(a))¹. Protože je vzhledem k předpokladu tuhosti vzdálenost každých dvou bodů tělesa časově neproměnná, splňují souřadnice bodů P, Q, R podmínky

$$(x_1^P - x_1^Q)^2 + (x_2^P - x_2^Q)^2 + (x_3^P - x_3^Q)^2 = d^{PQ} = konst., \quad (7.2)$$

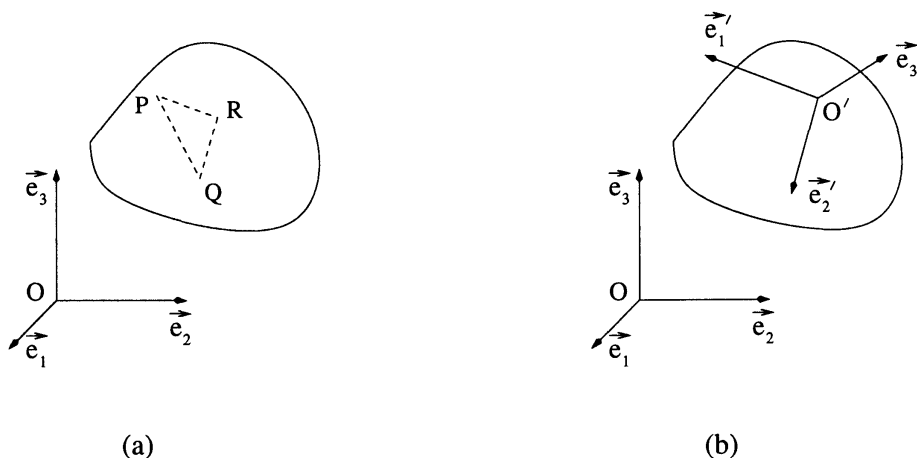
$$(x_1^Q - x_1^R)^2 + (x_2^Q - x_2^R)^2 + (x_3^Q - x_3^R)^2 = d^{QR} = konst., \quad (7.3)$$

$$(x_1^P - x_1^R)^2 + (x_2^P - x_2^R)^2 + (x_3^P - x_3^R)^2 = d^{PR} = konst. \quad (7.4)$$

Pokud není pohyb tuhého tělesa omezen žádnými vnějšími vazebními podmínkami, je vzhledem k (7.2) – (7.4) z devíti souřadnic bodů P, Q, R pouze šest nezávislých. V takovém případě budeme mluvit o *nevázaném tuhém tělese* (nebo také o *tuhém tělese nepodrobeném vazbám*)².

¹Vztažná soustava $S = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ zpravidla bývá laboratorní vztažnou soustavou a považuje se za soustavu inerciální. V literatuře se někdy označuje jako *soustava pevná v prostoru*.

²V literatuře se v této souvislosti někdy používá termínu *volné tuhé těleso*. Zde je však přívlastek „volný“ rezervován pro objekty (hmotné body a tělesa), které jsou zcela oproštěny od interakce s jinými objekty.



Obr. 7.1. Určení polohy tuhého tělesa ve zvolené vztažné soustavě: (a) prostřednictvím bodů P, Q, R , (b) zavedením vztažné soustavy spojené s tělesem

K závěru, že tuhé těleso nepodrobené vazbám má šest stupňů volnosti, lze dospět také algebraicky. Předpoklad tuhosti totiž zaručuje existenci takové vztažné soustavy $S' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ spojené s tělesem, v níž je každý z jeho bodů trvale v klidu (obr. 7.1(b))³. Časově neproměnnou polohu bodu X tuhého tělesa v soustavě S' reprezentuje řádková matice

$$\mathbf{x}' = (x'_i), \quad \text{kde } i \in \{1, 2, 3\}, \quad (7.5)$$

polohu téhož bodu v soustavě S v okamžiku t reprezentuje matice

$$\mathbf{x}(t) = (x_i(t)). \quad (7.6)$$

Mezi těmito maticemi platí vztah (oddíl 2.2)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t), \quad \text{resp. } x_i(t) = a_{ji}(t)x'_j + b_i(t), \quad \text{kde } i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (7.7)$$

Ortogonální matice $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ je maticí přechodu od báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ k bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ v okamžiku t , řádkovou matici $\mathbf{B}(t) = (b_i(t))$ tvoří složky vektoru $\vec{b}(t) = \overrightarrow{OO'}$, vyjádřené v soustavě S . Polohu tuhého tělesa tedy v libovolném okamžiku t určuje devět prvků matice $\mathbf{A}(t)$ a tři prvky matice $\mathbf{B}(t)$. Mezi prvky matice $\mathbf{A}(t)$ však platí relace ortogonality (2.18), a proto je poloha tělesa zadána pouze šesti nezávislými údaji: třemi prvky matice $\mathbf{B}(t)$ a třemi dalšími vhodně zvolenými parametry, které jsou funkcemi prvků matice $\mathbf{A}(t)$ (konkrétní výběr těchto parametrů se řídí požadavky dané úlohy).

7.2 Pohyb tuhého tělesa – geometrický popis

V tomto oddíle popíšeme pohyb tuhého tělesa prostřednictvím názorných geometrických představ. *Pohybem tuhého tělesa* budeme nazývat děj, při němž se vzhledem ke zvolené vztažné soustavě S mění poloha tělesa. *Přemístěním tuhého tělesa* v intervalu $[t_1, t_2]$ pak budeme rozumět převedení tělesa z počáteční polohy v okamžiku t_1 do koncové polohy v okamžiku t_2 , a to bez ohledu na konkrétní průběh pohybu, který k uvažované změně vedl. Je zřejmé, že každé přemístění tuhého tělesa lze realizovat nekonečně mnoha různými pohyby.

Nejjednodušším typem pohybu tuhého tělesa⁴ je *pohyb posuvný (translační)*, při němž jsou v každém okamžiku rychlosti všech bodů tělesa stejné. Trajektorie jednotlivých bodů představují

³Vztažná soustava $S' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ (její volba zřejmě není jednoznačná) se v literatuře někdy označuje jako *soustava pevná v tělese*.

⁴V dalším textu již nebudeme explicitně zdůrazňovat, že pohyb tuhého tělesa sledujeme ve vztažné soustavě S .

shodné, avšak vzájemně posunuté křivky. Přemístění tuhého tělesa, které lze uskutečnit posuvným pohybem, nazveme *posunutím (translací)*.

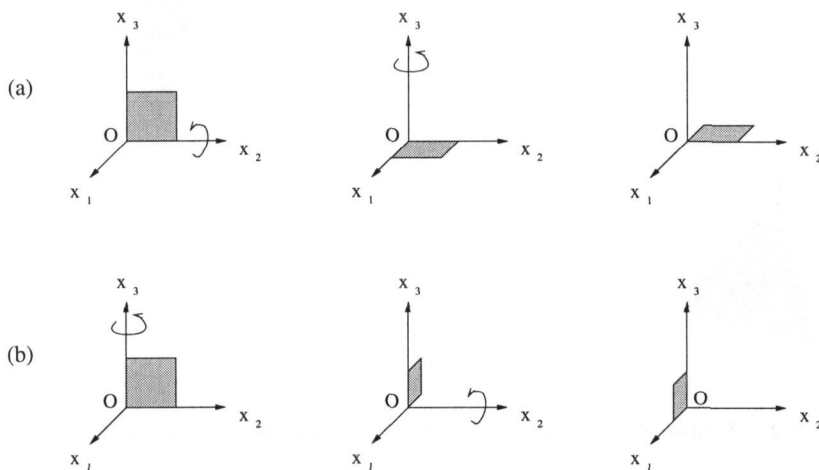
Posunutí je jednoznačně určeno počáteční polohou libovolného bodu tělesa a vektorem \vec{b} , o nějž se tento bod posunul. Složíme-li v libovolném pořadí posunutí určená vektory \vec{b} a $\vec{\bar{b}}$, je výsledným přemístěním opět posunutí, charakterizované vektorem $\vec{b} + \vec{\bar{b}}$.

Druhým speciálním typem pohybu tuhého tělesa je *otáčivý (rotační) pohyb* nebo krátce jen *otáčení tuhého tělesa*, při němž zůstává alespoň jeden jeho bod v klidu. Trajektorie ostatních bodů leží na kulových plochách se společným středem v kterémkoli z nepohyblivých bodů. Přitom mohou nastat dva případy⁵:

- *Otáčení tělesa kolem pevné osy*⁶, při němž zůstává nepohyblivá (pevná) právě jedna přímka (přesněji všechny body tělesa ležící v dané přímce). K podmínkám (7.2) – (7.4) tak přistupují údaje o souřadnicích libovolného bodu osy a dále dva údaje určující směr osy⁷. Těleso, které se otáčí kolem pevné osy, má proto jeden stupeň volnosti.
- *Otáčení tělesa kolem pevného bodu*, při němž zůstává nepohyblivý (pevný) právě jeden bod. K podmínkám (7.2) – (7.4) přistupují údaje o souřadnicích pevného bodu, a proto má nyní tuhé těleso tři stupně volnosti.

Přemístění tuhého tělesa, které lze uskutečnit otáčivým pohybem, nazveme *otočením (rotací) kolem pevné osy*, resp. *kolem pevného bodu*. Skládání otočení ovšem není, na rozdíl od skládání posunutí, obecně komutativní.

Tuto skutečnost lze ilustrovat jednoduchým příkladem (např. [3]). Uvažujme o desce ležící v rovině Ox_2x_3 a otočme ji nejprve kolem osy x_2 o úhel $\frac{\pi}{2}$ a potom o stejný úhel kolem osy x_3 (obr. 7.2 (a)). Záměnou pořadí obou otočení (obr. 7.2 (b)) přejde deska do jiné výsledné polohy než v předchozím případě⁸.



Obr. 7.2. Skládání otočení kolem os x_2 a x_3

Důležitou obecnou vlastnost otočení tuhého tělesa vyjadřuje *d'Alembertova–Eulerova věta*:

Ke každé změně polohy tuhého tělesa s pevným bodem existuje taková osa (procházející tímto bodem), že dané přemístění lze uskutečnit otočením tělesa kolem ní.

⁵Triviální případ, kdy těleso zůstává v klidu, neuvažujeme.

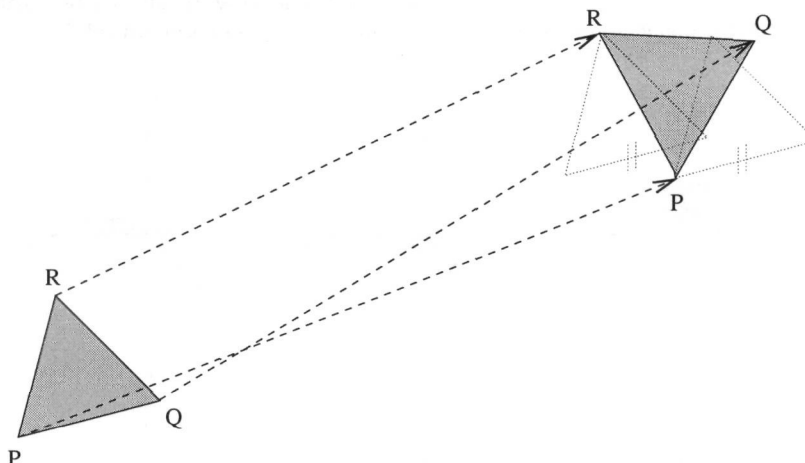
⁶V literatuře se tato osa často označuje jako *osa pevná v tělese i v prostoru*.

⁷Složky jednotkového vektoru $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)_S$ osy splňují vztah $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$, směr osy tedy určují pouze dva vhodně zvolené parametry.

⁸Ke stejnému závěru dospějeme také záměnou pořadí otočení kolem dvou různých os (například x'_2, x'_3) soustavy S' spojené s deskou.

Geometrický důkaz d'Alembertovy–Eulerovy věty je založen na názorné představě (např. [3], [26]). Nechť P je pevný bod. Uvažme libovolné dva body Q, R takové, že P, Q, R neleží v přímce, a dále kulovou plochu se středem v bodě P a libovolným poloměrem. Průsečíky přímk PQ a PR s kulovou plochou označme po řadě \bar{Q} a \bar{R} . Osy možných otočení, která převádějí bod \bar{Q} z počáteční polohy do koncové polohy, leží v rovině souměrnosti $\sigma_{\bar{Q}}$ úsečky určené těmito polohami a procházejí bodem P . Podobně definujeme rovinu $\sigma_{\bar{R}}$ pro bod \bar{R} . Hledaná osa otočení je průsečnicí rovin $\sigma_{\bar{Q}}$ a $\sigma_{\bar{R}}$. Uvedený postup není možné použít v případě, kdy roviny $\sigma_{\bar{Q}}$ a $\sigma_{\bar{R}}$ splývají. Osou otočení je potom průsečnice roviny, v níž leží bod P a počáteční polohy bodů \bar{Q}, \bar{R} , s rovinou určenou bodem P a koncovými polohami bodů \bar{Q}, \bar{R} .

Libovolné přemístění tuhého tělesa, reprezentovaného body P, Q a R , vzniká složením vhodného posunutí a vhodného otočení. Tato dílčí přemístění obecně nejsou určena jednoznačně. Pro zajištění jednoznačnosti je nutno v tělese předem zvolit *referenční bod*. Posunutím přejde referenční bod ze své původní polohy do polohy koncové, při následném otočení kolem něj přejdou do předepsaných koncových poloh také ostatní body tělesa. Vektor určující provedené posunutí obecně závisí na volbě referenčního bodu (přerušované vyznačené vektory na obr. 7.3), směr osy otočení, jejíž existenci zaručuje d'Alembertova–Eulerova věta, a úhel otočení jsou však již určeny jednoznačně. (Osy otočení procházející body P, Q a R jsou průsečnicemi posunutých rovin PQR (tečkované obrysy trojúhelníků na obr. 7.3) s rovinou určenou koncovými polohami bodů P, Q a R (plně vyznačený trojúhelník vpravo). Posunuté roviny PQR svírají s rovinou koncových poloh bodů P, Q a R stejný úhel.)



Obr. 7.3. K obecnému přemístění tuhého tělesa reprezentovaného body P, Q a R

Pořadí posunutí a otočení potřebného k převedení tělesa do výsledné polohy lze zaměnit. Záměna neovlivní (při pevné volbě referenčního bodu) vektor určující posunutí, vede však k rovnoběžnému posunutí osy otočení do počáteční polohy referenčního bodu. Osa otočení má tedy vždy tutéž polohu v soustavě S' , ale různou polohu v soustavě S .

7.3 Pohyb tuhého tělesa – algebraický popis

Algebraický popis pohybu tuhého tělesa vychází ze vztahu

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t), \quad (7.8)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ a \mathbf{x}' jsou matice tvořené souřadnicemi bodu X tělesa v soustavě S spojené s pozorovatelem a v soustavě S' spojené s tělesem, matice $\mathbf{A}(t)$ nese informaci o natočení báze soustavy S' vzhledem

k bázi soustavy S a matice $B(t)$ určuje polohu počátku soustavy S' v soustavě S (srv. str. 64). Pohyb tuhého tělesa je tedy popsán uspořádanou dvojicí matic

$$\mathbf{P}(t) = [A(t), B(t)], \quad (7.9)$$

kteřá v každém okamžiku t určuje polohu tuhého tělesa v soustavě S . Posuvný pohyb, resp. otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem počátku soustavy S' pak popisují uspořádané dvojice matic

$$\mathbf{T}(t) = [A, B(t)], \quad \text{resp.} \quad \mathbf{R}(t) = [A(t), B], \quad (7.10)$$

kde $A = \text{konst.}$ a $B = \text{konst.}$

Nechť $\mathbf{P}(t_1) = [A(t_1), B(t_1)]$ a $\mathbf{P}(t_2) = [A(t_2), B(t_2)]$ jsou polohy tělesa v okamžicích t_1 a t_2 . Spojením vztahů

$$x(t_1) = x'A(t_1) + B(t_1), \quad x(t_2) = x'A(t_2) + B(t_2) \quad (7.11)$$

dostáváme souvislost mezi souřadnicemi bodu X tělesa v okamžicích t_1 a t_2 v soustavě S

$$x(t_2) = x(t_1) A^T(t_1) A(t_2) + B(t_2) - B(t_1) A^T(t_1) A(t_2) = x(t_1) A_{[t_1, t_2]} + B_{[t_1, t_2]}, \quad (7.12)$$

kde jsme označili

$$A_{[t_1, t_2]} = A^T(t_1) A(t_2), \quad (7.13)$$

$$B_{[t_1, t_2]} = B(t_2) - B(t_1) A^T(t_1) A(t_2). \quad (7.14)$$

Uspořádaná dvojice číselných matic

$$\mathcal{P}_{[t_1, t_2]} = [A_{[t_1, t_2]}, B_{[t_1, t_2]}] \quad (7.15)$$

charakterizuje přemístění tělesa v intervalu $[t_1, t_2]$. Toto přemístění je posunutím, právě když $A(t_1) = A(t_2)$, resp. otočením kolem počátku soustavy S' , právě když $B(t_1) = B(t_2)$, tj.

$$\mathcal{T}_{[t_1, t_2]} = [E, B(t_2) - B(t_1)], \quad \text{resp.} \quad \mathcal{R}_{[t_1, t_2]} = [A^T(t_1) A(t_2), B(t_1) - B(t_1) A^T(t_1) A(t_2)], \quad (7.16)$$

kde E je jednotková matice třetího řádu.

Zápis (7.12) umožňuje interpretovat přemístění tuhého tělesa z polohy $\mathbf{P}(t_1)$ do polohy $\mathbf{P}(t_2)$ jako afinní zobrazení trojrozměrného prostoru do sebe, které přiřazuje polohám bodů v okamžiku t_1 polohy bodů v okamžiku t_2 . Matice tohoto zobrazení jsou v soustavě S vyjádřeny vztahy (7.13) a (7.14). Všimněme si množiny všech přemístění tuhého tělesa podrobněji.

Uvažme dvě přemístění, která mají obecný zápis $\mathcal{P} = [A, B]$ a $\bar{\mathcal{P}} = [\bar{A}, \bar{B}]$, tj. (srv. vztah (7.12))

$$x_{\mathcal{P}} = xA + B, \quad x_{\bar{\mathcal{P}}} = x\bar{A} + \bar{B}, \quad (7.17)$$

kde x je matice původních souřadnic bodu X v soustavě S a $x_{\mathcal{P}}$ je matice souřadnic téhož bodu v soustavě S po provedení přemístění \mathcal{P} . Analogický význam má matice $x_{\bar{\mathcal{P}}}$. Přemístění chápaná jako zobrazení lze obvyklým způsobem skládat. Užítím (7.17) tak vychází

$$x_{\bar{\mathcal{P}} \circ \mathcal{P}} = xA\bar{A} + \bar{B} + B\bar{A}, \quad x_{\mathcal{P} \circ \bar{\mathcal{P}}} = x\bar{A}A + B + \bar{B}A, \quad (7.18)$$

resp.

$$\bar{\mathcal{P}} \circ \mathcal{P} = [A\bar{A}, \bar{B} + B\bar{A}], \quad \mathcal{P} \circ \bar{\mathcal{P}} = [\bar{A}A, B + \bar{B}A]. \quad (7.19)$$

Množina všech přemístění tuhého tělesa opatřená operací skládání tvoří grupu: asociativita skládání přemístění se ověřuje přímým rozepsáním, neutrálním prvkem grupy je prvek

$$\mathcal{I} = [E, 0], \quad (7.20)$$

kde 0 je nulová řádková matice, a inverzním prvkem k $\mathcal{P} = [A, B]$ je prvek

$$\mathcal{P}^{-1} = [A^T, -BA^T]. \quad (7.21)$$

Tato grupa není podle výsledků (7.19) komutativní.

Získané obecné závěry budeme nyní aplikovat na speciální případy skládání přemístění, které byly popsány v předchozím oddíle:

- Složení dvou posunutí $\mathcal{T} = [E, B]$ a $\bar{\mathcal{T}} = [E, \bar{B}]$ (srv. vztah (7.16))

$$\bar{\mathcal{T}} \circ \mathcal{T} = [E, \bar{B} + B] = [E, B + \bar{B}] = \mathcal{T} \circ \bar{\mathcal{T}} \quad (7.22)$$

je komutativní a výsledným přemístěním je opět posunutí.

- Složení dvou otočení $\mathcal{R} = [A, B_0 - B_0A]$ a $\bar{\mathcal{R}} = [\bar{A}, B_0 - B_0\bar{A}]$ s pevným bodem, jehož souřadnice v soustavě S určuje matice B_0 (srv. vztah (7.16))

$$\bar{\mathcal{R}} \circ \mathcal{R} = [A\bar{A}, B_0 - B_0A\bar{A}] \neq [\bar{A}A, B_0 - B_0\bar{A}A] = \mathcal{R} \circ \bar{\mathcal{R}} \quad (7.23)$$

není komutativní, výsledným přemístěním je však v obou případech opět otočení kolem uvažovaného pevného bodu.

- Složení posunutí $\mathcal{T} = [E, B]$ a otočení $\mathcal{R} = [\bar{A}, \bar{B}]$

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{T} = [\bar{A}, \bar{B} + B\bar{A}] \neq [\bar{A}, B + \bar{B}] = \mathcal{T} \circ \mathcal{R} \quad (7.24)$$

obecně není komutativní.

- Nechť $\mathcal{T} = [E, B_2 - B_1]$ je posunutí o vektor, jehož složky v soustavě S reprezentuje matice $B = B_2 - B_1$, a $\mathcal{R}_1 = [A, B_1 - B_1A]$, $\mathcal{R}_2 = [A, B_2 - B_2A]$ jsou otočení s pevnými body určenými v soustavě S maticemi B_1, B_2 . Platí

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{R}_1 = [A, B_2 - B_1A] = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T}. \quad (7.25)$$

Složení otočení kolem bodu O' a následného posunutí dává v souladu s geometrickou představou stejný výsledek jako složení posunutí a následného otočení kolem bodu O' . Tuto vlastnost ovšem nelze nazývat komutativitou, protože \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2 jsou dva různé prvky grupy přemístění.

Přemístění tuhého tělesa je někdy výhodné popisovat následujícím formálně odlišným způsobem. Uvažujme o různých polohách $\mathbf{P}_i = [A_i, B_i]$, kde i jsou celá nezáporná čísla, tělesa ve zvolené vztážené soustavě $S = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. Soustavu S' spojenou s tělesem, které je v poloze \mathbf{P}_i , označme S'_i , její počátek O'_i a bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle_i$. Nechť $A'_{i,j}$ je matice přechodu od báze $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle_i$ k bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle_j$, $B'_{i,j}$ je řádková matice složek vektoru $\overrightarrow{O'_i O'_j}$, vyjádřených v soustavě S'_i a X je libovolný bod pevný v soustavě S . Mezi maticí x'_i souřadnic bodu X v soustavě S'_i a maticí x'_j souřadnic bodu X v soustavě S'_j platí vztah

$$x'_i = x'_j A'_{i,j} + B'_{i,j}, \quad (7.26)$$

který umožňuje charakterizovat přemístění tělesa z polohy \mathbf{P}_i do polohy \mathbf{P}_j uspořádanou dvojicí matic

$$\mathcal{P}_{i,j} = [A'_{i,j}, B'_{i,j}]. \quad (7.27)$$

Posunutí tělesa, resp. otočení tělesa kolem bodu O'_i je potom

$$\mathcal{T}_{i,j} = [E, B'_{i,j}], \text{ resp. } \mathcal{R}_{i,j} = [A'_{i,j}, 0]. \quad (7.28)$$

Přemístění tuhého tělesa popsané vztahem (7.27) můžeme opět interpretovat jako afinní zobrazení trojrozměrného prostoru do sebe. Jeho matice $A'_{i,j}, B'_{i,j}$ jsou vyjádřeny v soustavě S'_i . Pro složení dvou přemístění $\mathcal{P}_{i,j} = [A'_{i,j}, B'_{i,j}]$ a $\mathcal{P}_{j,k} = [A'_{j,k}, B'_{j,k}]$ nyní platí

$$\mathcal{P}_{j,k} \circ \mathcal{P}_{i,j} = [A'_{j,k} A'_{i,j}, B'_{i,j} + B'_{j,k} A'_{i,j}]. \quad (7.29)$$

7.4 Otočení tuhého tělesa

Algebraický popis posunutí tuhého tělesa je triviální a nevyžaduje zvláštní pozornost. Složitějším problémem, kterého si všimneme v tomto oddíle, je otočení tuhého tělesa. Použijeme popisu specifikovaného v úvodu oddílu 7.3.

Nejprve provedeme algebraický důkaz d'Alembertovy–Eulerovy věty. Zabýváme se proto otázkou existence bodů, které po otočení tělesa nezměnily v soustavě S svoji polohu. Bez újmy na obecnosti přitom můžeme předpokládat, že soustavy S a S' mají společný počátek v některém z pevných bodů a před otočením tělesa splývají. Otočení je pak vyjádřeno vztahem

$$\mathcal{R} = [A, 0], \quad \text{tj.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}'A. \quad (7.30)$$

Vztah (7.30) umožňuje interpretovat matici A jako matici lineárního zobrazení trojrozměrného vektorového prostoru do sebe (vyjádřenou v bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$), které přiřazuje vektorům $\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ obrazy $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Naším úkolem je tedy řešit problém vlastních vektorů a vlastních hodnot ortogonálního lineárního zobrazení $f: E_3 \rightarrow E_3$ trojrozměrného euklidovského vektorového prostoru do sebe. Využijeme následujících výsledků týkajících se řešení obecného případu ortogonálního lineárního zobrazení $f: E_n \rightarrow E_n$ (např. [20]):

- (1) *Vlastními hodnotami jsou právě reálné kořeny charakteristického polynomu $\det(A - \lambda E)$ (charakteristické kořeny).*
- (2) *Pro všechny charakteristické kořeny, a tedy i pro vlastní hodnoty, platí $|\lambda| = 1$.*
- (3) *Všechny vlastní vektory příslušné k -násobné vlastní hodnotě tvoří vektorový podprostor dimenze k v E_n .*
- (4) *Dva libovolně zvolené vlastní vektory příslušné dvěma různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

Pro případ $n = 3$ tak dostáváme (s uvážením skutečnosti, že A reprezentuje lineární zobrazení f v ortonormální pravotočivé bázi, tj. $\det A = 1$) tyto možnosti:

- a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, každý vektor $\vec{u} \in E_3$ je vlastním vektorem zobrazení f . (Zobrazení f je identita.)
- b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ přísluší jednorozměrný vektorový podprostor v E_3 , dvojnásobné vlastní hodnotě $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ jeho (dvojrozměrný) ortogonální doplněk.
- c) $\lambda_1 = 1$, zbývající kořeny charakteristického polynomu jsou komplexně sdružené, vlastní vektory příslušné jediné vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ tvoří jednorozměrný podprostor v E_3 .

Fyzikální interpretace jednotlivých možností je následující:

- a) těleso je po provedení otočení ve své původní poloze,
- b) přemístění tělesa je možné uskutečnit otočením kolem osy určené vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ o úhel π (resp. $-\pi$),
- c) přemístění tělesa je možné uskutečnit otočením kolem osy určené vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ o úhel různý od $\pm\pi$.

Každou změnu polohy tuhého tělesa s pevným bodem lze tedy uskutečnit otočením tělesa kolem přímky, která je určena pevným bodem a libovolným z vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 1$. Tím je platnost d'Alembertovy–Eulerovy věty algebraicky dokázána.

Zavedme ortonormální pravotočivou bázi $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \rangle$ tak, aby vektor \vec{f}_3 byl vlastním vektorem zobrazení (7.30) příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 1$. Zobrazení má v této bázi matici

$$\bar{A} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & 0 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.31)$$

kde \mathbf{Q} je matice přechodu od báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ k bázi $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \rangle$. Protože matice \bar{A} je opět ortogonální a $\det \bar{A} = 1$, musí mít tvar

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Hodnota úhlu φ přitom závisí výhradně na daném lineárním zobrazení a nikoli na volbě vektorů \vec{f}_1, \vec{f}_2 . Skutečně, zvolíme-li vektory \vec{f}'_1, \vec{f}'_2 , které jsou oproti \vec{f}_1, \vec{f}_2 otočené o úhel δ , platí pro matici zobrazení vyjádřenou v bázi $\langle \vec{f}'_1, \vec{f}'_2, \vec{f}_3 \rangle$

$$\bar{A}' = \mathbf{T}\bar{A}\mathbf{T}^T, \quad (7.33)$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

je matice přechodu od báze $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \rangle$ k bázi $\langle \vec{f}'_1, \vec{f}'_2, \vec{f}_3 \rangle$. Násobením matic v (7.33) se snadno ověří, že $\bar{A} = \bar{A}'$.

Vyjasněme nyní souvislost mezi prvky matice \mathbf{A} (vztah (7.30)) a parametry popisujícími otočení kolem pevné osy, které převádí těleso z předepsané počáteční polohy do předepsané koncové polohy. Těmito parametry jsou složky jednotkového vektoru $\vec{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)_S = \vec{f}_3$, který určuje směr a orientaci osy⁹, a úhel otočení φ . Podle (7.31) platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{Q}, \quad (7.35)$$

kde matici $\mathbf{Q} = (f_{ij})$ tvoří složky vektorů $\vec{f}_i = (f_{i1}, f_{i2}, f_{i3})_S$ v bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. Přímým výpočtem dostáváme s uvážením ortogonality matice \mathbf{Q} výsledek (dodatek I.)¹⁰

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \nu_1^2(1-\cos \varphi) + \cos \varphi & \nu_1\nu_2(1-\cos \varphi) + \nu_3 \sin \varphi & \nu_1\nu_3(1-\cos \varphi) - \nu_2 \sin \varphi \\ \nu_1\nu_2(1-\cos \varphi) - \nu_3 \sin \varphi & \nu_2^2(1-\cos \varphi) + \cos \varphi & \nu_2\nu_3(1-\cos \varphi) + \nu_1 \sin \varphi \\ \nu_1\nu_3(1-\cos \varphi) + \nu_2 \sin \varphi & \nu_2\nu_3(1-\cos \varphi) - \nu_1 \sin \varphi & \nu_3^2(1-\cos \varphi) + \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (7.36)$$

Známe-li naopak prvky matice \mathbf{A} , můžeme určit jednotkový vektor $\vec{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)_S$ příslušné osy otočení i odpovídající úhel φ . Přitom stačí uvažovat pouze o hodnotách $\varphi \in [0, \pi]$, protože otočení tělesa kolem osy \vec{v} o úhel $\varphi' \in (\pi, 2\pi]$ je totožné s otočením kolem osy $\vec{v}' = -\vec{v}$ o úhel $\varphi = 2\pi - \varphi'$. Užitím (7.36) tak vychází

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 \cos \varphi \implies \varphi = \arccos \left[\frac{(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - 1}{2} \right], \quad (7.37)$$

$$a_{23} - a_{32} = 2\nu_1 \sin \varphi \implies \nu_1 = \frac{a_{23} - a_{32}}{2 \sin \varphi}, \quad (7.38)$$

$$a_{31} - a_{13} = 2\nu_2 \sin \varphi \implies \nu_2 = \frac{a_{31} - a_{13}}{2 \sin \varphi}, \quad (7.39)$$

$$a_{12} - a_{21} = 2\nu_3 \sin \varphi \implies \nu_3 = \frac{a_{12} - a_{21}}{2 \sin \varphi}. \quad (7.40)$$

⁹Protože předpokládáme, že soustavy S a S' původně splývají, jsou složky vektoru \vec{v} v obou těchto soustavách stejné.

¹⁰K témuž výsledku lze dospět také jiným způsobem, který využívá vektorového počtu (např. [19]).

Poslední trojice vztahů platí za předpokladu $\sin \varphi \neq 0$, tj. pro $\varphi \neq 0$ a $\varphi \neq \pi$. Příklad $\varphi = 0$ je ale triviální, neboť $A = E$ a vektor $\vec{\nu}$ lze vybrat libovolně (k žádnému přemístění tělesa nedošlo). Pro $\varphi = \pi$ je potom

$$A = \begin{pmatrix} 2\nu_1^2 - 1 & 2\nu_1\nu_2 & 2\nu_1\nu_3 \\ 2\nu_1\nu_2 & 2\nu_2^2 - 1 & 2\nu_2\nu_3 \\ 2\nu_1\nu_3 & 2\nu_2\nu_3 & 2\nu_3^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

a odtud

$$a_{11} = 2\nu_1^2 - 1 \implies \nu_1^2 = \frac{a_{11} + 1}{2}, \quad (7.42)$$

$$a_{22} = 2\nu_2^2 - 1 \implies \nu_2^2 = \frac{a_{22} + 1}{2}, \quad (7.43)$$

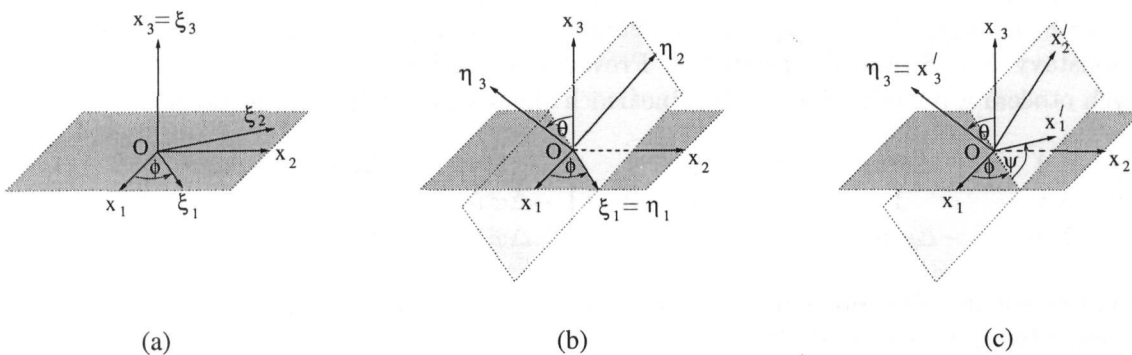
$$a_{33} = 2\nu_3^2 - 1 \implies \nu_3^2 = \frac{a_{33} + 1}{2}. \quad (7.44)$$

Znaménko vybrané složky, například ν_1 , můžeme po odmocnění zvolit libovolně. Znaménka zbývajících dvou složek ν_2 a ν_3 jsou již předepsána podmínkami $2\nu_1\nu_2 = a_{12}$ a $2\nu_1\nu_3 = a_{13}$.

Převedení tělesa z počáteční polohy, kdy soustavy S a S'_0 (ve smyslu označení zavedeného v závěru oddílu 7.3) splývají, do předepsané koncové polohy lze uskutečnit například následujícím způsobem:

1. Těleso otočíme kolem osy x_3 soustavy $S = \langle O; x_1, x_2, x_3 \rangle$ o jistý úhel $\phi \in [0, 2\pi)$. Soustava S'_0 tak přejde v soustavu $S'_1 = \langle O; \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle$ (obr. 7.4(a)).
2. Těleso otočíme kolem osy ξ_1 soustavy $S'_1 = \langle O; \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle$ o jistý úhel $\theta \in [0, \pi]$. Soustava S'_1 tak přejde v soustavu $S'_2 = \langle O; \eta_1, \eta_2, \eta_3 \rangle$ (obr. 7.4(b)).
3. Těleso otočíme kolem osy η_3 soustavy $S'_2 = \langle O; \eta_1, \eta_2, \eta_3 \rangle$ o jistý úhel $\psi \in [0, 2\pi)$. Soustava S'_2 tak přejde v soustavu $S'_3 = \langle O; x'_1, x'_2, x'_3 \rangle$ (obr. 7.4(c)).

Libovolná poloha tuhého tělesa v soustavě S je tedy jednoznačně určena *Eulerovými úhly* ϕ (*úhel precese*), θ (*úhel nutace*) a ψ (*úhel vlastní rotace*). Průsečnice rovin Ox_1x_2 a $O'x'_1x'_2$ se nazývá *uzlovou přímkou*. Eulerovy úhly jsou vhodné zejména pro popis pohybu těžkého setrvačnicku (oddíl 9.3)¹¹.



Obr. 7.4. K zavedení Eulerových úhlů

Pro algebraický popis uvedeného sledu otočení je výhodné použít způsobu zavedeného v závěru oddílu 7.3. Jednotlivá otočení jsou pak určena maticemi

¹¹O jiných možnostech popisu polohy tuhého tělesa s pevným bodem se lze informovat např. v [8] nebo [26].

$$A'_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A'_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$

$$A'_{2,3} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

Matice výsledného otočení je tedy

$$A = A'_{2,3}A'_{1,2}A'_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

7.5 Okamžitá osa otáčení

Každé otočení tuhého tělesa lze podle d'Alembertovy–Eulerovy věty nahradit otočením kolem pevné osy, jejíž směr i příslušný úhel otočení jsme našli v předchozím oddíle. Otáčení kolem takové osy však neodpovídá skutečnému pohybu, jímž těleso přechází z počáteční polohy do polohy koncové. Abychom vystihli skutečný pohyb tělesa kolem pevného bodu přesněji, rozdělíme interval $[0, t]$, v němž došlo k přemístění, na dílčí intervaly $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, \dots , $[t_{n-1}, t]$ a v každém z nich nahradíme pohyb tělesa otáčením kolem jediné pevné osy. Pro různé dílčí intervaly obecně dostáváme různě položené osy, které se protínají v pevném bodě. Soubor těchto os představuje v soustavě S i v soustavě S' hrany jehlanu. Pohyb tělesa lze tedy přibližně charakterizovat valením jehlanu pevně spojeného s tělesem po jehlanu pevném v soustavě S . Skutečný pohyb tělesa přitom bude vystižen tím lépe, čím jemněji rozdělíme interval $[0, t]$. V limitním případě, kdy délky všech dílčích intervalů konvergují k nule, přecházejí oba jehlanu v kužely se společným vrcholem v pevném bodě. Otáčení tuhého tělesa je proto dáno valením kužele pevného v soustavě S' (*polodiový kužel*) po kuželi pevném v soustavě S (*herpolodiový kužel*). Společná povrchka obou kuželů tvoří v každém okamžiku osu otáčení pevnou v obou soustavách, okolo níž se těleso otočí o velmi malý (infinitesimální) úhel. Tuto osu nazýváme *okamžitou osou otáčení*.

Uvažme nyní otočení tělesa kolem dvou os, které jsou určeny bodem $O \equiv O'$ a jednotkovými vektory $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)_S$, $\vec{\bar{\nu}} = (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3)_{S'}$, o velmi malé úhly $\Delta\varphi \rightarrow 0$, $\Delta\bar{\varphi} \rightarrow 0$. Předpokládejme opět, že soustavy S a S' zpočátku splývají. Provedením Taylorova rozvoje prvků matic (7.36) jednotlivých otočení a ponecháním nejvýše lineárních členů v $\Delta\varphi$, resp. $\Delta\bar{\varphi}$ dostáváme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\varphi \nu_3 & -\Delta\varphi \nu_2 \\ -\Delta\varphi \nu_3 & 1 & \Delta\varphi \nu_1 \\ \Delta\varphi \nu_2 & -\Delta\varphi \nu_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_3 & -\Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_2 \\ -\Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_3 & 1 & \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_1 \\ \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_2 & -\Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.48)$$

Postupným provedením obou otočení vychází bez ohledu na jejich pořadí matice výsledného otočení ve tvaru (srv. přístup v závěru oddílu 7.3)

$$\bar{A}A = A\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\varphi \nu_3 + \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_3 & -\Delta\varphi \nu_2 - \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_2 \\ -\Delta\varphi \nu_3 - \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_3 & 1 & \Delta\varphi \nu_1 + \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_1 \\ \Delta\varphi \nu_2 + \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_2 & -\Delta\varphi \nu_1 - \Delta\bar{\varphi} \bar{\nu}_1 & 1 \end{pmatrix} = A + \bar{A}, \quad (7.49)$$

kde jsme opět ponechali členy nejvýše lineární v $\Delta\varphi$ a $\Delta\bar{\varphi}$. Skládání velmi malých otočení kolem různoběžných os je tedy komutativní (srv. str. 65).

Předchozí postup zasluhuje určité zpřesnění. Předpokládejme (opět ve smyslu popisu v závěru oddílu 7.3), že soustavy S a S'_0 zpočátku splývají. Otočme nejprve těleso kolem osy určené vektorem $\vec{\nu}$. Matice tohoto otočení má tvar

$$A'_{0,1} = A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\varphi \nu_3 & -\Delta\varphi \nu_2 \\ -\Delta\varphi \nu_3 & 1 & \Delta\varphi \nu_1 \\ \Delta\varphi \nu_2 & -\Delta\varphi \nu_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.50)$$

Otočením přejde soustava S'_0 v soustavu S'_1 , v níž označme složky vektoru $\vec{\nu}$ jako

$$\vec{\nu} = (\nu_1^1, \nu_2^1, \nu_3^1)_{S'_1}. \quad (7.51)$$

Označme dále $\bar{\nu}$ řádkovou matici složek vektoru $\vec{\nu}$ v soustavě $S = S'_0$ a $\bar{\nu}^1$ řádkovou matici složek téhož vektoru v soustavě S'_1 . Podle výsledků oddílu 2.2 platí

$$\bar{\nu}^1 = \bar{\nu} A^T, \quad (7.52)$$

tj.

$$\bar{\nu}_1^1 = \bar{\nu}_1 + \Delta\varphi \bar{\nu}_2 \nu_3 - \Delta\varphi \bar{\nu}_3 \nu_2, \quad (7.53)$$

$$\bar{\nu}_2^1 = -\Delta\varphi \bar{\nu}_1 \nu_3 + \bar{\nu}_2 + \Delta\varphi \bar{\nu}_3 \nu_1, \quad (7.54)$$

$$\bar{\nu}_3^1 = \Delta\varphi \bar{\nu}_1 \nu_2 - \Delta\varphi \bar{\nu}_2 \nu_1 + \bar{\nu}_3. \quad (7.55)$$

Matice otočení tělesa kolem osy určené vektorem $\vec{\nu}$ o úhel $\Delta\varphi$ má tedy (v soustavě S'_1) tvar

$$A'_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\varphi \bar{\nu}_3^1 & -\Delta\varphi \bar{\nu}_2^1 \\ -\Delta\varphi \bar{\nu}_3^1 & 1 & \Delta\varphi \bar{\nu}_1^1 \\ \Delta\varphi \bar{\nu}_2^1 & -\Delta\varphi \bar{\nu}_1^1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\varphi \bar{\nu}_3 & -\Delta\varphi \bar{\nu}_2 \\ -\Delta\varphi \bar{\nu}_3 & 1 & \Delta\varphi \bar{\nu}_1 \\ \Delta\varphi \bar{\nu}_2 & -\Delta\varphi \bar{\nu}_1 & 1 \end{pmatrix} = \bar{A}, \quad (7.56)$$

neboť ponecháváme členy nejvýše lineární v $\Delta\varphi$ a $\Delta\bar{\varphi}$. Matice výsledného otočení je potom

$$A'_{1,2} A'_{0,1} = \bar{A} A = A + \bar{A}. \quad (7.57)$$

K témuž tvaru matice výsledného otočení dospějeme také záměnou pořadí obou dílčích otočení.

Pro změnu polohy bodu X tuhého tělesa vzhledem k soustavě S po provedení jediného otočení dostáváme užitím (7.30) a (7.48) vztah

$$\Delta r = x - x' = x' (A - E) = x' (R_1 \Delta\varphi \nu_1 + R_2 \Delta\varphi \nu_2 + R_3 \Delta\varphi \nu_3), \quad (7.58)$$

kde

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.59)$$

Vidíme, že otočení tělesa kolem osy určené bodem $O \equiv O'$ a vektorem $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)_S$ o velmi malý úhel $\Delta\varphi$ je možné uskutečnit otočením kolem osy x_1 o úhel $\Delta\varphi \nu_1$, kolem osy x_2 o úhel $\Delta\varphi \nu_2$ a kolem osy x_3 o úhel $\Delta\varphi \nu_3$, a to v libovolném pořadí. Matice R_i se nazývá *generátorem infinitezimálního otočení kolem osy x_i* (např. [25]).

Rychlost bodu X tuhého tělesa vzhledem k soustavě S je potom

$$v = x' (R_1 \omega_1 + R_2 \omega_2 + R_3 \omega_3), \quad (7.60)$$

kde

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)_S = \dot{\varphi} \vec{\nu} \quad (7.61)$$

je vektor okamžité úhlové rychlosti tělesa vzhledem k soustavě S . Otáčení tuhého tělesa kolem okamžité osy otáčení úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ lze tedy považovat za současně probíhající otáčení (ve smyslu nezávislosti na pořadí) kolem jednotlivých souřadnicových os x_i úhlovými rychlostmi

$$\vec{\omega}_i = \dot{\varphi} \nu_i \vec{e}_i. \quad (7.62)$$

Výsledek (7.60) je užitečné porovnat s derivací (7.30) podle času

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'\dot{\mathbf{A}}. \quad (7.63)$$

Pro matici \mathbf{A} tak dostáváme vztah

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_1 \omega_1 + \mathbf{R}_2 \omega_2 + \mathbf{R}_3 \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.64)$$

který je ve shodě s obecným zápisem (2.28) pro $\mathbf{A}(0) = \mathbf{E}$. Důsledkem (7.63) a (7.64) je pak známý vzorec

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (7.65)$$

k němuž jsme v oddíle 2.1 dospěli prostřednictvím názorné geometrické představy.

Výsledky této kapitoly, prezentované v geometrické i algebraické podobě, vedou k následujícímu důležitému závěru:

Obecný pohyb tuhého tělesa je dán složením současně probíhajícího pohybu zvoleného referenčního bodu¹² a otáčení tělesa kolem něj. Vektor úhlové rychlosti tělesa je na volbě referenčního bodu nezávislý.

¹²V této souvislosti se také někdy mluví o *posuvném (translačním)* pohybu referenčního bodu.

8. Dynamika tuhého tělesa

Závěry vyvozené v předchozí kapitole platily zcela obecně, bez ohledu na zvolený model tuhého tělesa. Nyní přistoupíme k formulaci pojmů a zákonů dynamiky, v níž je naopak způsob rozložení hmotnosti v tělese podstatný. Pro přehlednost matematických zápisů veličin a vztahů mezi nimi zde povedeme hlavní linii výkladu pro *tuhé těleso s diskrétním rozložením hmotnosti* (nebo také *tuhou soustavu hmotných bodů*). Výsledky, k nimž dospějeme, budou záměnou

$$\sum m_i X_i \longleftrightarrow \int \rho X dV, \quad (8.1)$$

kde X zastupuje vektorovou, resp. skalární funkci kinematických veličin, platné také pro *tuhé těleso se spojitým rozložením hmotnosti* (neboli *tuhé kontinuum*).

8.1 Pohybové rovnice tuhého tělesa

V základním kurzu mechaniky (např. [9], [11], [17]) se z Newtonových zákonů odvozuje *první a druhá impulzová věta* pro soustavu n hmotných bodů, sledovanou ve zvolené (zpravidla inerciální) vztažné soustavě $S = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. Tyto věty mají tvar

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{a} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (8.2)$$

kde

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (8.3)$$

je *celková hybnost* soustavy,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (8.4)$$

je *celkový moment hybnosti* soustavy,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (8.5)$$

kde \vec{F}_i je výslednice *vnějších (externích) sil* působících na i -tý hmotný bod¹, a

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i). \quad (8.6)$$

Veličina \vec{F} , resp. \vec{M} je tedy výslednicí vnějších sil, resp. výsledným momentem vnějších sil působících na soustavu.

K popisu pohybu soustavy hmotných bodů jako celku je užitečné definovat pojem *střed hmotnosti* soustavy jako geometrický bod o polohovém vektoru

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (8.7)$$

¹Připomeňme, že pokud je soustava S neinerciální, musíme k vnějším reálným silám připočítat také příslušné fiktivní síly.

kde

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (8.8)$$

je celková hmotnost soustavy. První impulzovou větu lze potom přepsat do prakticky výhodnějšího tvaru

$$\frac{d\vec{p}_0}{dt} = \vec{F}, \quad (8.9)$$

který formálně odpovídá druhému Newtonovu zákonu pro hmotný bod o hmotnosti m a polohovém vektoru \vec{r}_0 . Zavedme dále vztahnou soustavu S_0 , která má počátek ve středu hmotnosti soustavy hmotných bodů a která se vzhledem k soustavě S neotáčí (tzv. *soustava středu hmotnosti*). V soustavě S_0 má – bez ohledu na její případnou neinerciálnost – druhá impulzová věta tvar (odvození je provedeno v oddíle 10.1 B))

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0, \quad (8.10)$$

kde \vec{L}_0 je celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů v soustavě S_0 a \vec{M}_0 je výsledný moment vnějších sil \vec{F}_i vzhledem ke středu hmotnosti.

Vztahy (8.2) – (8.10) platí pro jakoukoli (ne tedy nutně tuhou) soustavu hmotných bodů. Nyní k nim připojíme předpoklad tuhosti a pro jednoduchost vyjadřování budeme dále mluvit o (*tuhém tělese*).

V případě obecného pohybu tuhého tělesa, podrobeného danému silovému působení $\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}$, je výhodné zvolit za referenční bod střed hmotnosti. Závislost jeho polohového vektoru na čase (tj. jeho trajektorii) určíme řešením rovnice (8.9). K nalezení úhlové rychlosti otáčivého pohybu tělesa kolem středu hmotnosti pak použijeme rovnice (8.10), do níž dosadíme vztah

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0) = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0). \quad (8.11)$$

Dostaneme

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_0))] = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i. \quad (8.12)$$

Abychom určili okamžitou orientaci tuhého tělesa v soustavě S , vyjádříme souvislost mezi složkami úhlové rychlosti tělesa $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)_S$ a Eulerovými úhly ϕ , θ a ψ . Otáčení tuhého tělesa kolem okamžité osy otáčení můžeme považovat za současně probíhající otáčení kolem osy x_3 úhlovou rychlostí $\dot{\phi}$, kolem uzlové přímky úhlovou rychlostí $\dot{\theta}$ a kolem osy x'_3 úhlovou rychlostí $\dot{\psi}$. Zavedeme-li jednotkový vektor \vec{u} uzlové přímky tak, aby byla báze $(\vec{e}_3, \vec{e}'_3, \vec{u})$ pravotočivá, můžeme psát²

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}'_3 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{e}_3. \quad (8.13)$$

Protože složky vektoru \vec{e}'_3 odpovídají prvkům třetího řádku matice (7.47), tj.

$$\vec{e}'_3 = \sin \theta \sin \phi \vec{e}_1 - \sin \theta \cos \phi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3, \quad (8.14)$$

a podle obr. 7.4 platí

$$\vec{u} = \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2, \quad (8.15)$$

dostáváme

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \vec{e}_1 + (-\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi) \vec{e}_2 + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \vec{e}_3 \quad (8.16)$$

²V oddíle 7.5 byl řešen případ postupných otočení tuhého tělesa kolem dvou různoběžných os, které byly v soustavě S pevné. Získaný závěr o nezávislosti pořadí jednotlivých otočení však platí i tehdy, když osy otáčení mění v soustavě S svoji polohu (například právě uvažovaná situace). Lze se o tom přesvědčit přímým výpočtem matic výsledného otočení, v nichž ponecháme nejvýše lineární členy obsahující příslušné úhly otočení.

a odtud

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \quad (8.17)$$

$$\omega_2 = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi, \quad (8.18)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \quad (8.19)$$

Vztahy (8.17) – (8.19) jsou známy jako *Eulerovy kinematické rovnice*. Impulzové věty (8.9) a (8.10), resp. (8.12) tedy představují spolu s Eulerovými kinematickými rovnicemi obecný tvar pohybových rovnic tuhého tělesa (s diskrétním rozložením hmotnosti).

Pokud na těleso (ne nutně tuhé) pohlížíme jako na kontinuum, musíme kromě výsledných vnějších sil \vec{F}_i , které působí v n konkrétních bodech tělesa, uvážit také výslednou *hustotu vnějších objemových sil* \vec{f} působících v daném bodě tělesa a výslednou *hustotu plošných sil* $\vec{\sigma}$ působících v daném bodě povrchu tělesa. Tyto veličiny určují výslednou vnější objemovou sílu působící na objemovou část ΔV tělesa, resp. výslednou vnější povrchovou sílu působící na povrchovou část ΔS tělesa vztahy

$$\vec{F}(\Delta V) = \int_{\Delta V} \vec{f} dV, \quad \text{resp.} \quad \vec{F}(\Delta S) = \int_{\Delta S} \vec{\sigma} dS. \quad (8.20)$$

Impulzové věty potom mají tvar

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{a} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (8.21)$$

kde

$$\vec{p}(t) = \int_{V(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) dV, \quad \vec{L}(t) = \int_{V(t)} \rho[\vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}, t)] dV \quad (8.22)$$

a

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV + \int_S \vec{\sigma} dS + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M} = \int_V (\vec{r} \times \vec{f}) dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{\sigma}) dS + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (8.23)$$

Ve vztazích (8.22) jsme přitom explicitně zdůraznili skutečnost, že hustota $\rho(\vec{r}, t)$ i rychlost $\vec{v}(\vec{r}, t)$ závisí nejen na poloze daného bodu tělesa v soustavě S , ale stejně jako integrační oblast také na čase.

Po obecně formulovaných závěrech si všimneme dvou důležitých speciálních typů pohybu tuhého tělesa: otáčení kolem pevné osy a otáčení kolem pevného bodu.

8.2 Otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy

Při studiu otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy je vhodné zvolit za referenční bod a současně za společný počátek soustav S a S' libovolný z bodů osy. Souřadnice takového referenčního bodu jsou trvale rovny nule. K popisu pohybu tělesa (vzhledem k soustavě S) tedy stačí vyjádřit z druhé impulzové věty závislost vektoru úhlové rychlosti tělesa na čase, tj. najít funkci $\vec{\omega}(t)$.

Polohu tělesa nyní určuje jediný parametr, kterým je úhel otočení $\varphi(t)$ kolem pevné osy, orientované jednotkovým vektorem \vec{v} . Tento úhel souvisí s úhlovou rychlostí vztahem

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \vec{v}. \quad (8.24)$$

Nalezneme-li odtud na základě znalosti $\vec{\omega}(t)$ závislost $\varphi(t)$, vyjádříme pomocí matice (7.36) již snadno vztahy mezi souřadnicemi bodů tělesa v soustavě S' a v soustavě S , tj. informaci o poloze tělesa v soustavě S .

Ke stanovení úhlové rychlosti potřebujeme vyjádřit celkový moment hybnosti tělesa. Dosazením za rychlost vybraného bodu

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (8.25)$$

zapsáním polohového vektoru \vec{r}_i tohoto bodu jako součtu průmětů do směru osy otáčení a do roviny kolmé k ose otáčení (obr. 8.1)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i\parallel} + \vec{r}_{i\perp} \quad (8.26)$$

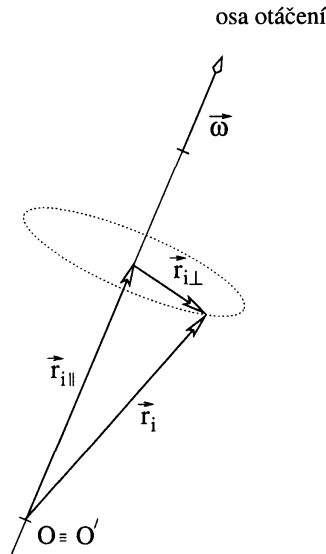
a uplatněním identity $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\vec{B})\vec{C}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^n m_i [(\vec{r}_{i\parallel} + \vec{r}_{i\perp}) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp})] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} - \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_{i\parallel} \vec{\omega}) \vec{r}_{i\perp} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

kde

$$\vec{L}_{\parallel} = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega}, \quad \vec{L}_{\perp} = - \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_{i\parallel} \vec{\omega}) \vec{r}_{i\perp} \quad (8.28)$$

jsou průměty celkového momentu hybnosti tělesa do směru osy otáčení a do roviny kolmé k ose otáčení.



Obr. 8.1. K otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy

Podle druhé impulzové věty potom platí

$$\frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} = \vec{M}_{\parallel}, \quad \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} = \vec{M}_{\perp}, \quad (8.29)$$

kde \vec{M}_{\parallel} a \vec{M}_{\perp} jsou průměty výsledného momentu vnějších sil do směru osy otáčení a do roviny kolmé k ose otáčení. První z rovnic (8.29) slouží k nalezení úhlové rychlosti tělesa, druhá rovnice pak umožňuje stanovit momenty sil, jimiž otáčející se těleso působí na osu (k tomuto problému se vrátíme v oddíle 8.4). *Pohybová rovnice otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy* má tedy tvar

$$\frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{\parallel}, \quad (8.30)$$

kde veličinu

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2, \quad (8.31)$$

charakterizující rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k dané ose, nazýváme *momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení*.

Přestože je formulace dosavadních závěrů jednodušší a přehlednější pro model soustavy hmotných bodů, některé konkrétní výpočty (například výpočet momentu setrvačnosti) je výhodnější provádět pro model kontinua. Pro běžná tělesa, která zde máme na mysli především, totiž model kontinua poskytuje větší matematické pohodlí, neboť sečítání veličin přes velké množství hmotných bodů nahrazuje snáze proveditelnou integraci. Moment setrvačnosti těles tedy zpravidla počítáme podle vztahu

$$J = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV. \quad (8.32)$$

Z pohybové rovnice (8.30) je ve shodě s očekáváním patrné, že na změně velikosti úhlové rychlosti tuhého tělesa se mohou podílet pouze průměty vnějších sil do směru tečen ke kružnicovým trajektoriím jednotlivých bodů. Výsledný moment \vec{M}_{\parallel} těchto průmětů je nezávislý na konkrétním umístění referenčního bodu na ose otáčení, a proto se nazývá *momentem vnějších sil vzhledem k ose otáčení*.

Prostřednictvím momentu setrvačnosti se vyjadřuje také kinetická energie tělesa jako

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\omega r_{i\perp})^2 = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (8.33)$$

Pohybovou rovnici (8.30) lze odvodit také na základě skutečnosti, že časová změna kinetické energie tělesa je rovna výkonu vnějších sil, tj.

$$\frac{dE_k}{dt} = J\vec{\omega} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{\omega} \cdot \vec{M} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{\parallel}. \quad (8.34)$$

Odtud dostáváme

$$\vec{\omega} \left(J \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \vec{M}_{\parallel} \right) = 0 \quad \implies \quad J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{\parallel}, \quad (8.35)$$

neboť vektory vystupující v levém vztahu jsou vzájemně rovnoběžné (mají směr osy otáčení) a vztah platí pro libovolné $\vec{\omega}$.

8.3 Otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu. Tenzor setrvačnosti

K popisu otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu je přirozené zvolit pevný bod za bod referenční a současně za společný počátek soustav S a S' . Pohyb tuhého tělesa je pak určen jedinou vektorovou funkcí $\vec{\omega}(t)$. K jejímu nalezení slouží druhá impulzová věta.

Těleso s právě jedním pevným bodem má tři stupně volnosti. Za parametry popisující jeho polohu můžeme zvolit například Eulerovy úhly ϕ , θ a ψ , které získáme na základě znalosti složek vektoru $\vec{\omega}(t)$ řešením Eulerových kinematických rovnic.

V předchozím oddíle charakterizoval rozložení hmotnosti tuhého tělesa vzhledem k pevné ose časově neproměnný moment setrvačnosti. Nyní jsme ve složitější situaci, neboť pevným bodem může procházet nekonečně mnoho os otáčení (srv. oddíl 7.5). Rozložení hmotnosti tuhého tělesa vzhledem k pevnému bodu proto bude nutné popsat obecnějším způsobem: jistým souborem veličin, z nichž bude možné vyjádřit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolné ose obsahující pevný bod.

K nalezení takového souboru veličin opět použijeme vztahu pro celkový moment hybnosti tělesa. Pro přehlednost následujících zápisů přitom zjednodušíme dosavadní způsob označení tak, že již nebudeme explicitně vypisovat sumační indexy i veličin m_i a X_i . Provedeme tedy záměnu

$$\sum_{i=1}^n m_i X_i \quad \longrightarrow \quad \sum mX. \quad (8.36)$$

Indexy i, j, k budeme v dalším výhradně používat k rozlišení složek vektorů, složek tenzorů a prvků matic. Pro celkový moment hybnosti potom vychází (srv. postup v (8.27))

$$\vec{L} = \sum \vec{r} \times \vec{p} = \sum \vec{r} \times m\vec{v} = \sum m [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] = \sum m [(\vec{r}\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}]. \quad (8.37)$$

Rozepsáním tohoto vztahu do složek dostáváme

$$L_i = \sum m [(x_k x_k) \omega_i - (x_j \omega_j) x_i] = \sum m [x_k x_k \delta_{ij} \omega_j - x_i x_j \omega_j] = J_{ij} \omega_j, \quad (8.38)$$

kde jsme označili

$$J_{ij} = \sum m (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j), \quad (8.39)$$

tj.

$$J_{11} = \sum m (x_2^2 + x_3^2), \quad J_{12} = -\sum m x_1 x_2 = J_{21}, \quad (8.40)$$

$$J_{22} = \sum m (x_1^2 + x_3^2), \quad J_{23} = -\sum m x_2 x_3 = J_{32}, \quad (8.41)$$

$$J_{33} = \sum m (x_1^2 + x_2^2), \quad J_{13} = -\sum m x_1 x_3 = J_{31}. \quad (8.42)$$

Protože se poloha tuhého tělesa v soustavě S obecně mění, je soubor veličin $(J_{ij})_S$ závislý na čase. Vyjádříme-li však složky všech vektorů vystupujících v (8.37) v soustavě S' , jsou již veličiny

$$J'_{ij} = \sum m (x'_k x'_k \delta_{ij} - x'_i x'_j) \quad (8.43)$$

neproměnné a soubor $(J'_{ij})_{S'}$ tak poskytuje hledanou informaci o rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k pevnému bodu. Tato informace je přitom vázána na soustavu S' .

Všimněme si souvislosti mezi veličinami J_{ij} a J'_{ij} , vyjádřenými v soustavách S a S' se společným počátkem v pevném bodě tělesa. Transformací souřadnic $x_i = a_{ji} x'_j$ dostáváme s uvážením ortogonalit matice A

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \sum m (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) = \sum m (a_{lk} a_{pk} x'_l x'_p \delta_{ij} - a_{mi} a_{nj} x'_m x'_n) = \\ &= \sum m (\delta_{lp} x'_l x'_p \delta_{ij} - a_{mi} a_{nj} x'_m x'_n) = \sum m (x'_l x'_l \delta_{ij} - a_{mi} a_{nj} x'_m x'_n) = \\ &= \sum m (x'_l x'_l a_{mi} a_{mj} - a_{mi} a_{nj} x'_m x'_n) = \sum m (x'_l x'_l a_{mi} a_{nj} \delta_{mn} - a_{mi} a_{nj} x'_m x'_n) = \\ &= a_{mi} a_{nj} \sum m (x'_l x'_l \delta_{mn} - x'_m x'_n) = a_{mi} a_{nj} J'_{mn}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Je vidět, že soubor veličin $(J_{ij})_S$, resp. $(J'_{ij})_{S'}$ je symetrickým tenzorem druhého řádu. Nazýváme jej *tenzorem momentu setrvačnosti tuhého tělesa v dané vztažné soustavě* nebo krátce jen *tenzorem setrvačnosti*. Uspořádáním souborů $(J_{ij})_S$, $(J'_{ij})_{S'}$ do matic

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad J' = \begin{pmatrix} J'_{11} & J'_{12} & J'_{13} \\ J'_{21} & J'_{22} & J'_{23} \\ J'_{31} & J'_{32} & J'_{33} \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

dostáváme výsledek (8.44) ve tvaru

$$J = A^T J' A, \quad \text{resp.} \quad J' = A J A^T. \quad (8.46)$$

Složky J'_{ii} tenzoru setrvačnosti mají s přihlédnutím k (8.31) význam momentů setrvačnosti tělesa vzhledem k souřadnicovým osám x'_i . Zbývá ukázat, že soubor $(J'_{ij})_{S'}$ umožňuje vyjádřit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolné jiné ose, která prochází pevným bodem. Nechť tuto osu určuje jednotkový vektor $\vec{\nu} = (\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3)_{S'}$. Zavedme pomocnou vztažnou soustavu \bar{S}' spojenou

s tělesem tak, že její počátek splývá s počátkem soustavy S' a vektor \vec{v} je v pořadí třetí z jejich bázových vektorů. Pro hledaný moment setrvačnosti potom podle (8.46) platí

$$J = \bar{J}'_{33} = \bar{a}_{3k}\bar{a}_{3l}J'_{kl} = J'_{kl}\nu'_k\nu'_l, \quad (8.47)$$

kde \bar{A} je matice přechodu od báze soustavy S' k bázi soustavy \bar{S}' .

Pokud má osa otáčení v soustavě S' zcela obecnou polohu, spojíme s tělesem novou vztaznou soustavu S'' s počátkem v některém z bodů osy. Hledaný moment setrvačnosti vzhledem k dané ose určíme přímým výpočtem souboru $(J''_{ij})_{S''}$ a aplikací vztahu (8.47). Ke zjištění složek J''_{ij} lze však také použít *Steinerovy věty*

$$J''_{ij} = a_{0m_i}a_{0n_j}J'_{0mn} + m(b_{0k}b_{0k}\delta_{ij} - b_{0i}b_{0j}), \quad (8.48)$$

kde J'_{0ij} jsou složky tenzoru setrvačnosti v libovolné vztazné soustavě S'_0 spojené s tělesem, jejíž počátek je totožný s jeho středem hmotnosti, A_0 je matice přechodu od báze soustavy S'' k bázi soustavy S'_0 a B_0 je matice určená souřadnicemi počátku soustavy S'_0 v soustavě S'' . Důkaz Steinerovy věty spočívá v přímém dosazení transformačních vztahů $x''_i = a_{0j_i}x'_{0j} + b_{0i}$ do definičního vztahu pro výpočet složek J''_{ij} a v úpravě.

Znalost složek J'_{0ij} tenzoru setrvačnosti v jisté vztazné soustavě S'_0 spojené s tělesem, jejíž počátek splývá s jeho středem hmotnosti, tedy dovoluje užitím Steinerovy věty vyjádřit složky tenzoru setrvačnosti v kterékoli jiné vztazné soustavě a tím i moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolné ose.

Prostřednictvím složek tenzoru setrvačnosti se vyjadřuje také kinetická energie tělesa s pevným bodem. Uplatněním identity $(\vec{A} \times \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A}\vec{C})(\vec{B}\vec{D}) - (\vec{A}\vec{D})(\vec{B}\vec{C})$ tak dostáváme obecnější podobu vztahu (8.33)

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2} \sum m [\omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2] = \\ &= \frac{1}{2} \sum m (\omega_i \omega_i x_k x_k - \omega_i x_i \omega_j x_j) = \frac{1}{2} \sum m (\omega_i \omega_j \delta_{ij} x_k x_k - \omega_i \omega_j x_i x_j) = \\ &= \frac{1}{2} J_{ij} \omega_i \omega_j, \end{aligned} \quad (8.49)$$

resp.

$$E_k = \frac{1}{2} J'_{ij} \omega'_i \omega'_j, \quad (8.50)$$

kde ω_i , resp. ω'_i jsou složky vektoru $\vec{\omega}$ v soustavě S , resp. S' .

8.4 Vlastnosti tenzoru setrvačnosti. Volné osy

Vraťme se ke vztahu (8.37) a vyjádřeme složky všech vektorů, které v něm vystupují, v soustavě S' . Dostáváme

$$L'_i = J'_{ij} \omega'_j. \quad (8.51)$$

Veličiny J'_{ij} zde, na rozdíl od složek L'_i a ω'_i , nezávisí na čase. Zápis (8.51) tak umožňuje interpretovat matici J' jako matici lineárního zobrazení trojrozměrného vektorového prostoru do sebe, které přiřazuje vektorům $\vec{\omega} = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)_{S'}$ obrazy $\vec{L} = (L'_1, L'_2, L'_3)_{S'}$. Matice tohoto zobrazení je vyjádřena v bázi soustavy S' .

Je zřejmé, že v obecném případě platí

$$\vec{L} \neq \text{konst.} \vec{\omega}, \quad (8.52)$$

tj. vektor celkového momentu hybnosti tuhého tělesa nemá směr okamžité osy otáčení. Položme si otázku, zda existují takové vektory $\vec{\omega}$ (a jimi určené osy otáčení), pro něž je naopak

$$\vec{L} = \text{konst.} \vec{\omega}. \quad (8.53)$$

Zabýváme se tedy problémem vlastních vektorů $\vec{\omega}$ a jim příslušných vlastních hodnot λ ($\equiv \text{konst.}$) symetrického lineárního zobrazení $f: E_3 \rightarrow E_3$ trojrozměrného euklidovského vektorového prostoru do sebe. Využijeme následujících výsledků týkajících se řešení obecného případu symetrického lineárního zobrazení $f: E_n \rightarrow E_n$ (např. [20]):

- (1) Všechny kořeny charakteristického polynomu $\det (J' - \lambda E)$ (charakteristické kořeny) jsou reálné a jsou tedy vlastními hodnotami zobrazení f .
- (2) Všechny vlastní vektory příslušné k -násobné vlastní hodnotě tvoří vektorový podprostor dimenze k v E_n .
- (3) Dva libovolně zvolené vlastní vektory příslušné dvěma různým vlastním hodnotám jsou ortogonální.
- (4) Z vlastních vektorů lze v E_n zkonstruovat ortonormální bázi, v níž je zobrazení f reprezentováno diagonální maticí.

Předchozí závěry mají tuto fyzikální interpretaci: existuje ortonormální (pravotočivá) báze spojená s tělesem, v níž má tenzor setrvačnosti diagonální tvar

$$J' = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix}. \quad (8.54)$$

Veličiny J'_{11} , J'_{22} a J'_{33} mají význam vlastních hodnot zobrazení (8.51) a nazývají se *hlavními momenty setrvačnosti*. Osy určené pevným bodem tělesa a vektory uvažované báze nazýváme *hlavními osami setrvačnosti*.

Volbou vektorů báze soustavy spojené s tělesem ve směru hlavních os setrvačnosti se zjednodušují dřívější obecné vztahy (8.47), (8.50) a (8.51) do tvarů

$$J = J'_{11}\nu'_1 + J'_{22}\nu'_2 + J'_{33}\nu'_3, \quad (8.55)$$

$$E_k = \frac{1}{2} [J'_{11}(\omega'_1)^2 + J'_{22}(\omega'_2)^2 + J'_{33}(\omega'_3)^2], \quad (8.56)$$

$$L'_1 = J'_{11}\omega'_1, \quad L'_2 = J'_{22}\omega'_2, \quad L'_3 = J'_{33}\omega'_3. \quad (8.57)$$

Určování hlavních os setrvačnosti spočívá v často i pracném hledání vlastních hodnot lineárního zobrazení (8.51) a jim odpovídajících vlastních vektorů. V případech, kdy se rozložení hmotnosti tělesa vyznačuje určitým druhem symetrie, však můžeme hlavní osy setrvačnosti stanovit i bez výpočtu – u homogenních těles³ přímým zohledněním geometrických vlastností tělesa vzhledem k pevnému bodu.

V literatuře se někdy zavádí pojem *elipsoid setrvačnosti* (pro těleso s pevným bodem v počátku soustavy S'). Rozumíme jím množinu bodů, jejichž souřadnice $X = [x'_1, x'_2, x'_3]_{S'}$, v soustavě S' vyhovují rovnici

$$J'_{ij}x'_i x'_j = 1. \quad (8.58)$$

(Vzhledem k pozitivní definitnosti matice J' , plynoucí z definice tenzoru setrvačnosti, je zřejmé, že kvadratika (8.58) je skutečně elipsoidem, např. [24].) Porovnáním této rovnice se vztahem (8.47), jehož obě strany vydělíme veličinou J , dostáváme

$$x'_1 = \frac{\nu'_1}{\sqrt{J}}, \quad x'_2 = \frac{\nu'_2}{\sqrt{J}}, \quad x'_3 = \frac{\nu'_3}{\sqrt{J}}. \quad (8.59)$$

Vybraný bod $X = [x'_1, x'_2, x'_3]_{S'}$, elipsoidu setrvačnosti tedy leží ve vzdálenosti

$$d = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad (8.60)$$

od počátku soustavy S' , kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose $O'X$.

Volíme-li speciálně vektory báze soustavy S' ve směru hlavních os, má elipsoid setrvačnosti *kanonický tvar*

$$J'_{11}(x'_1)^2 + J'_{22}(x'_2)^2 + J'_{33}(x'_3)^2 = 1. \quad (8.61)$$

Elipsoid setrvačnosti pro pevný bod, který je středem hmotnosti tělesa, se nazývá *centrálním elipsoidem setrvačnosti*.

³Symetrie rozložení hmotnosti je u homogenních těles přímo dána geometrickou symetrií.

Zbývá objasnit význam obecně nenulových složek J'_{ij} tenzoru setrvačnosti pro $i \neq j$ (např. [26]). Zabývejme se proto znovu otáčením tuhého tělesa kolem pevné osy. Bez újmy na obecnosti přitom zvolme soustavu S a S' tak, aby měly společný počátek a osa otáčení splývala s osami $x_3 \equiv x'_3$. Označme odděleně \vec{F}^I výslednici vnějších sil, kterou na těleso působí osa otáčení, a \vec{F}^{II} výslednici ostatních vnějších sil. Podobně označme \vec{M}^I výsledný moment vnějších sil (vzhledem k počátku soustavy S), jimiž na těleso působí osa otáčení, a \vec{M}^{II} výsledný moment ostatních vnějších sil. Složkový zápis první impulzové věty ve tvaru (8.9) a obecně formulované druhé impulzové věty vede ke vztahům

$$F_i^I = \frac{dp_{0i}}{dt} - F_i^{II} = m \frac{dv_{0i}}{dt} - F_i^{II}, \quad (8.62)$$

$$M_i^I = \frac{dL_i}{dt} - M_i^{II} = \frac{d}{dt} (J_{ij}\omega_j) - M_i^{II}. \quad (8.63)$$

Dosazením $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)_S = (0, 0, \omega)_S$, $\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_0$ a $J'_{33} = J = \text{konst.}$ dostáváme po úpravách

$$F_1^I = -m x_{01} \omega^2 - m x_{02} \dot{\omega} - F_1^{II}, \quad (8.64)$$

$$F_2^I = -m x_{02} \omega^2 + m x_{01} \dot{\omega} - F_2^{II}, \quad (8.65)$$

$$F_3^I = -F_3^{II}, \quad (8.66)$$

$$M_1^I = \dot{J}_{13} \omega + J_{13} \dot{\omega} - M_1^{II}, \quad (8.67)$$

$$M_2^I = \dot{J}_{23} \omega + J_{23} \dot{\omega} - M_2^{II}, \quad (8.68)$$

$$M_3^I = J \dot{\omega} - M_3^{II}. \quad (8.69)$$

Současně ale platí

$$\begin{aligned} \dot{J}_{ij} &= -\frac{d}{dt} \sum m x_i x_j = -\sum m \dot{x}_i x_j - \sum m x_i \dot{x}_j = \\ &= -\sum m (\epsilon_{ikl} \omega_k x_l) x_j - \sum m x_i (\epsilon_{jkl} \omega_k x_l) = \epsilon_{ikl} J_{jl} \omega_k + \epsilon_{jkl} J_{il} \omega_k, \end{aligned} \quad (8.70)$$

tedy

$$M_1^I = -J_{23} \omega^2 + J_{13} \dot{\omega} - M_1^{II}, \quad (8.71)$$

$$M_2^I = J_{13} \omega^2 + J_{23} \dot{\omega} - M_2^{II}, \quad (8.72)$$

$$M_3^I = J \dot{\omega} - M_3^{II} \quad (8.73)$$

(viz též Eulerovy dynamické rovnice (8.88)).

Poněkud obtížnější je odvození vztahu (8.70) pro model tuhého kontinua, neboť

$$J_{ij} = -\int_V \rho x_i x_j dV \quad (8.74)$$

a integrační oblast V je v soustavě S funkcí času. Předpoklad tuhosti však dovoluje postupovat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \dot{J}_{ij} &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho x_i x_j dV = -\frac{d}{dt} \int_{V'} \rho a_{ki} a_{lj} x'_k x'_l |\det \mathbf{A}^T| dV' = -\frac{d}{dt} \int_{V'} \rho a_{ki} a_{lj} x'_k x'_l dV' = \\ &= -\int_{V'} \frac{d}{dt} (\rho a_{ki} a_{lj} x'_k x'_l) dV' = -\int_{V'} \rho \frac{d}{dt} (a_{ki} a_{lj} x'_k x'_l) dV' = -\int_V \rho \frac{d}{dt} (x_i x_j) dV = \\ &= -\int_V \rho \dot{x}_i x_j dV - \int_V \rho x_i \dot{x}_j dV = -\int_V \rho (\epsilon_{ikl} \omega_k x_l) x_j dV - \int_V \rho x_i (\epsilon_{jkl} \omega_k x_l) dV = \\ &= \epsilon_{ikl} J_{jl} \omega_k + \epsilon_{jkl} J_{il} \omega_k. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Vztahy (8.64) – (8.66) a (8.71) – (8.73) umožňují spolu s rovnicí (8.30) přepsanou do tvaru

$$M_3^{\text{II}} = J\dot{\omega} \quad (8.76)$$

stanovit síly a momenty sil, jimiž na těleso působí osa otáčení a tím podle třetího Newtonova zákona také síly a momenty sil, jimiž působí těleso na osu. Kombinací (8.73) a (8.76) tak například ve shodě s očekáváním ihned dostáváme

$$M_3^{\text{I}} = 0. \quad (8.77)$$

Složky momentů sil M_1^{I} , M_2^{I} a stejně tak složky sil F_1^{I} , F_2^{I} , F_3^{I} jsou však obecně nenulové. Vektory \vec{M}^{I} a \vec{F}^{I} přitom mění svůj směr, což vede k opotřebování ložisek osy. Proto bývá snahou konstruovat otáčivé části přístrojů tak, aby byly uvedené síly i momenty sil co možná nejmenší.

Všimněme se nyní otáčení tuhého tělesa, na něž kromě pevné osy nepůsobí žádné jiné okolní objekty, tj.

$$\vec{F}^{\text{II}} = \vec{0}, \quad \vec{M}^{\text{II}} = \vec{0}. \quad (8.78)$$

Požadujeme-li, aby výsledná síla \vec{F}^{I} byla rovněž nulová, je soustava rovnic (8.64) – (8.65) pro neznámé x_{01} , x_{02} homogenní. Vzhledem k tomu, že obecně platí

$$\det \begin{pmatrix} -m\omega^2 & -m\dot{\omega} \\ m\dot{\omega} & -m\omega^2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (8.79)$$

má tato soustava pouze triviální řešení

$$x_{01} = x_{02} = 0, \quad (8.80)$$

tj. osa otáčení prochází středem hmotnosti tělesa. Podobně, požadujeme-li $\vec{M}^{\text{I}} = \vec{0}$, dostáváme z (8.71) – (8.72) podmínku

$$J_{13} = J_{23} = 0. \quad (8.81)$$

Prostřednictvím (8.46) a uvážením, že matice A reprezentující otočení tělesa kolem pevné osy má tvar

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.82)$$

zjistíme, že

$$J_{13} = J_{23} = 0 \iff J'_{13} = J'_{23} = 0. \quad (8.83)$$

Zde je již patrný fyzikální význam složek J_{ij} , resp. J'_{ij} tenzoru setrvačnosti pro $i \neq j$: tyto složky určují momenty sil, jimiž působí osa otáčení na těleso, resp. těleso na osu otáčení. Nazývají se *deviačními momenty*.

Osy otáčení, pro něž za předpokladu, že na těleso nepůsobí žádné další objekty, platí

$$\vec{F}^{\text{I}} = \vec{0}, \quad \vec{M}^{\text{I}} = \vec{0} \iff x_{01} = x_{02} = 0, \quad J_{13} = J_{23} = 0 = J'_{13} = J'_{23}, \quad (8.84)$$

zachovávají v soustavě S svoji polohu, aniž by musely být fixovány vazbami. Takové osy se nazývají *volnými osami*. Pro otáčení tělesa kolem volné osy $x_3 \equiv x'_3$ vychází užitím (8.51) a (8.83)

$$L'_1 = 0, \quad L'_2 = 0, \quad L'_3 = J\omega \implies \vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (8.85)$$

Volnými osami jsou tedy právě hlavní osy setrvačnosti, které procházejí středem hmotnosti tělesa.

8.5 Eulerovy dynamické rovnice

Popis otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevného bodu vychází z obecně formulované druhé impulzové věty. Dosadíme-li do ní $L_i = J_{ij}\omega_j$, dostaneme

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{d(J_{ij}\omega_j)}{dt} = J_{ij}\dot{\omega}_j + \dot{J}_{ij}\omega_j = M_i. \quad (8.86)$$

Tento tvar rovnic pro nalezení úhlové rychlosti tělesa však není příliš vhodný. Složky tenzoru setrvačnosti J_{ij} totiž závisí na okamžité poloze tělesa v soustavě S a tuto polohu určujeme právě prostřednictvím hledané veličiny $\vec{\omega}(t)$. Vyjádřeme proto druhou impulzovou větu v soustavě S' spojené s tělesem, v níž jsou složky tenzoru setrvačnosti neproměnné. Aplikací (2.5) vychází

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}, \quad \text{resp.} \quad \dot{L}'_i + \epsilon_{ijk}\omega'_j L'_k = M'_i. \quad (8.87)$$

Dosazením $L'_i = J'_{ij}\omega'_j$ pak obdržíme *Eulerovy dynamické rovnice*

$$J'_{ij}\dot{\omega}'_j + \epsilon_{ijk}\omega'_j J'_{km}\omega'_m = M'_i \quad (8.88)$$

pro složky vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega} = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)_{S'}$ v soustavě S' . Převedeme-li pomocí matice (7.47) do soustavy S' také Eulerovy kinematické rovnice (8.17) – (8.19), dostaneme

$$\omega'_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \quad (8.89)$$

$$\omega'_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \quad (8.90)$$

$$\omega'_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \quad (8.91)$$

Vztahy (8.88) a (8.89) – (8.91) představují obecné pohybové rovnice tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevného bodu. Ke zjištění charakteru pohybu tuhého tělesa však často vystačíme pouze s Eulerovými dynamickými rovnicemi (oddíl 9.2). Pokud volíme vektory báze soustavy S' ve směru hlavních os setrvačnosti, mají tyto rovnice jednoduchý tvar

$$J'_{11}\dot{\omega}'_1 + (J'_{33} - J'_{22})\omega'_2\omega'_3 = M'_1, \quad (8.92)$$

$$J'_{22}\dot{\omega}'_2 + (J'_{11} - J'_{33})\omega'_1\omega'_3 = M'_2, \quad (8.93)$$

$$J'_{33}\dot{\omega}'_3 + (J'_{22} - J'_{11})\omega'_1\omega'_2 = M'_3. \quad (8.94)$$

9. Pohyb setrvačnicků

V této kapitole budeme aplikovat dosavadní obecné závěry na pohyb *setrvačnicků*. Setrvačnickem zde přitom budeme rozumět tuhé těleso, které má v laboratorní vztažné soustavě, považované za soustavu inerciální, fixován právě jeden bod¹.

První kroky při řešení pohybu setrvačnicků vycházejí z učebnic [8], [9], [17], [18] a [26]. Zde je však (především v případě těžkého symetrického setrvačnicku, oddíl 9.3), zvolen odlišný způsob zpracování, který přístupy použité v literatuře sjednocuje.

9.1 Základní informace o setrvačnicích

Pohyb setrvačnicku budeme popisovat v laboratorní vztažné soustavě $S = \langle O; x_1, x_2, x_3 \rangle$, jejíž počátek ztotožníme s jeho pevným bodem. Vztažnou soustavu $S' = \langle O'; x'_1, x'_2, x'_3 \rangle$ spojenou se setrvačnickem zavedeme tak, aby platilo $O' \equiv O$ a její osy byly hlavními osami setrvačnosti. Otáčení setrvačnicku kolem pevného bodu potom popisují Eulerovy dynamické rovnice ve tvaru

$$J'_{11} \dot{\omega}'_1 + (J'_{33} - J'_{22}) \omega'_2 \omega'_3 = M'_1, \quad (9.1)$$

$$J'_{22} \dot{\omega}'_2 + (J'_{11} - J'_{33}) \omega'_1 \omega'_3 = M'_2, \quad (9.2)$$

$$J'_{33} \dot{\omega}'_3 + (J'_{22} - J'_{11}) \omega'_1 \omega'_2 = M'_3. \quad (9.3)$$

Složky úhlové rychlosti setrvačnicku jsou přitom jako funkce časově proměnných Eulerových úhlů, určujících okamžitou polohu setrvačnicku v soustavě S , vyjádřeny prostřednictvím Eulerových kinematických rovnic

$$\omega'_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \quad (9.4)$$

$$\omega'_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \quad (9.5)$$

$$\omega'_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \quad (9.6)$$

Soustavu rovnic (9.1) – (9.6) pro neznámé funkce $\phi(t)$, $\theta(t)$ a $\psi(t)$ lze explicitně vyřešit pouze v některých speciálních situacích. V ostatních případech je nutné přistoupit k řešení numerickému a výsledky prezentovat buď v podobě grafů nebo ve formě modelování pohybu setrvačnicku na počítači (např. [10], [22]).

Podle rozložení hmotnosti rozdělujeme setrvačnický na *asymetrické* (hlavní momenty setrvačnosti jsou navzájem různé), *symetrické* (právě dva z hlavních momentů setrvačnosti jsou stejné) a *kulové* (hlavní momenty setrvačnosti jsou shodné)².

Setrvačnický, které se používají v praxi, případně jsou známé jako dětské hračky, mají zpravidla tvar rotačně symetrických těles, jejichž pevný bod leží na ose symetrie a moment setrvačnosti vzhledem k této ose je větší než moment setrvačnosti vzhledem k osám k ní kolmým. V běžné mluvě se proto „setrvačnickem“ rozumí právě takové těleso. Ve zde zavedené terminologii však jde o speciální případ symetrického setrvačnicku.

¹Definice setrvačnicku není v literatuře zcela jednotná. Učebnice [3] například zavádí setrvačnick jako „tuhé těleso, které má pevný bod, nebo jehož otáčivý pohyb lze vyšetřit, aniž bychom určovali pohyb jeho referenčního bodu“. Takto zavedenému setrvačnicku pak vyhovuje i volně puštěné tuhé těleso, za jehož referenční bod volíme střed hmotnosti. K vymezení základních pravidel pro řešení pohybu tuhého tělesa s takovým význačným bodem, že jeho pohyb v dané vztažné soustavě můžeme stanovit i bez znalosti úhlové rychlosti tělesa, však plně postačuje zde uvedená jednodušší definice.

²Název *kulový setrvačnick* vyjadřuje skutečnost, že elipsoidem setrvačnosti tělesa (str. 82) je kulová plocha. Kulovým setrvačnickem je tedy nejen homogenní koule, ale také například homogenní krychle s pevným bodem v jejím středu hmotnosti.

Podle charakteru vnějšího silového působení pak zavádíme zvláštní název jen pro *bezmomentový setrvačnick* (výsledný moment vnějších sil vzhledem k pevnému bodu je nulový)³ a *těžký setrvačnick* (kromě vazby v pevném bodě, který není středem hmotnosti, působí na setrvačnick pouze homogenní tíhové pole Země). Zde se budeme zabývat právě těmito setrvačnick, protože zahrnují obvyklé případy pohybu tuhého tělesa s pevným bodem.

Protože vazební síla působící v pevném bodě nekoná práci, platí pro pohyb setrvačnicku zákon zachování mechanické energie (s uvážením (8.49) a (8.50))

$$E = \frac{1}{2} \left[J'_{11} (\omega'_1)^2 + J'_{22} (\omega'_2)^2 + J'_{33} (\omega'_3)^2 \right] - m\vec{g}\vec{r}_0 = konst., \quad (9.7)$$

kde \vec{r}_0 je polohový vektor středu hmotnosti setrvačnicku v soustavě S , m je jeho hmotnost a hladinou nulové tíhové potenciální energie je vodorovná rovina procházející pevným bodem. Zákon zachování mechanické energie je prvním integrálem pohybu setrvačnicku. Pokud jej chceme použít k rozřešení pohybu setrvačnicku, musíme k němu připojit ještě další dvě nezávislé rovnice: vybereme je buď z trojice Eulerových dynamických rovnic (9.1) – (9.3), případně nalezneme další integrály pohybu setrvačnicku. Matematický rozbor ukazuje, že řešení pohybových rovnic setrvačnicku lze analyticky zapsat pouze pro následující speciální případy (např. [12], [16], [26]):

- bezmomentový setrvačnick (*Eulerův–Poinsotův případ*⁴),
- těžký symetrický setrvačnick, pro nějž při vhodném označení os platí $J'_{11} = J'_{22} \neq J'_{33}$ a střed hmotnosti leží na ose x_3 (*Lagrangeův–Poissonův případ*⁵),
- těžký symetrický setrvačnick, pro nějž při vhodném označení os platí $J'_{11} = J'_{22} = 2J'_{33}$ a střed hmotnosti leží v rovině $x'_3 = 0$ (*setrvačnick S. Kovalevské*⁶).

V dalším provedeme rozbor pouze prvních dvou případů, neboť se setrvačnickem S. Kovalevské se běžně nesetkáváme (řešení jeho pohybu je možné najít např. v [26]).

9.2 Bezmomentový setrvačnick

Typickým příkladem bezmomentového setrvačnicku je tuhé těleso upevněné ve středu hmotnosti (například v Cardanově závěsu), na něj kromě vazby působí pouze homogenní tíhové pole Země. Protože platí

$$\vec{M} = \vec{0}, \quad (9.8)$$

vychází z druhé impulzové věty formulované ve vztažné soustavě S

$$\vec{L} = \overrightarrow{konst.} \quad (9.9)$$

Zákon zachování mechanické energie

$$E = \frac{1}{2} \left[J'_{11} (\omega'_1)^2 + J'_{22} (\omega'_2)^2 + J'_{33} (\omega'_3)^2 \right] = konst. \quad (9.10)$$

proto můžeme doplnit dalším integrálem pohybu: kvadrátem velikosti (celkového) momentu hybnosti setrvačnicku

$$L^2 = L_1'^2 + L_2'^2 + L_3'^2 = (J'_{11} \omega'_1)^2 + (J'_{22} \omega'_2)^2 + (J'_{33} \omega'_3)^2 = konst. \quad (9.11)$$

Vztažnou soustavu S přitom bývá zvykem volit tak, aby vektor $\vec{L} = \overrightarrow{konst.}$ ležel v ose x_3 .

³V literatuře se tento setrvačnick označuje také jako *volný* nebo *bezsilový*.

⁴Leonhard Euler (1707 – 1783), švýcarský matematik, fyzik a astronom; Louis Poinsot (1777 – 1859), francouzský fyzik a matematik.

⁵Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), francouzský matematik; Siméon Denis Poisson (1781 – 1840), francouzský matematik a fyzik.

⁶Sofja Vasiljevna Kovalevská (1850 – 1891), ruská matematicka.

Volbou $\vec{L} \parallel \vec{e}_3$ se významně zjednoduší vztahy pro výpočet Eulerových úhlů jako funkcí veličiny L . Užitím vztahu $L = L'A$ (oddíl 2.2) a vyjádření matice A (7.47) nalezneme složky vektoru \vec{L} v soustavě S'

$$L'_1 = L \sin \psi \sin \theta, \quad (9.12)$$

$$L'_2 = L \cos \psi \sin \theta, \quad (9.13)$$

$$L'_3 = L \cos \theta. \quad (9.14)$$

Dosadíme-li vztahy (8.57)

$$L'_1 = J'_{11}\omega'_1, \quad L'_2 = J'_{22}\omega'_2, \quad L'_3 = J'_{33}\omega'_3$$

a za ω'_1, ω'_2 a ω'_3 Eulerovy kinematické rovnice (9.4) – (9.6), dostaneme

$$J'_{11}\omega'_1 = J'_{11}(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta) = L \sin \psi \sin \theta, \quad (9.15)$$

$$J'_{22}\omega'_2 = J'_{22}(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta) = L \cos \psi \sin \theta, \quad (9.16)$$

$$J'_{33}\omega'_3 = J'_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = L \cos \theta. \quad (9.17)$$

Uvedené obecné závěry budeme nyní aplikovat na jednotlivé typy setrvačnicku: kulový setrvačnick, symetrický setrvačnick a asymetrický setrvačnick.

A) Kulový setrvačnick

Pro kulový setrvačnick dostáváme dosazením $J'_{11} = J'_{22} = J'_{33}$ do integrálů pohybu (9.10) a (9.11)

$$E = \frac{1}{2} J'_{11} \omega^2, \quad (9.18)$$

$$L^2 = (J'_{11} \omega)^2. \quad (9.19)$$

Tyto integrály jsou spojeny vztahem $L^2 = 2J'_{11}E$ a nejsou tedy nezávislé. Můžeme z nich proto vyjádřit pouze kvadrát velikosti úhlové rychlosti setrvačnicku jako

$$\omega^2 = \frac{2E}{J'_{11}} = \left(\frac{L}{J'_{11}} \right)^2 = konst. \quad (9.20)$$

Druhou část tohoto výsledku lze získat rovněž ze vztahu

$$\vec{L} = J'_{11} \vec{\omega} = \overrightarrow{konst.}, \quad (9.21)$$

který plyne z (8.57) a (9.9) a v němž se neměnnost vektoru \vec{L} vztahuje k soustavě S . Odtud je vidět, že v soustavě S jsou neměnné také složky vektoru úhlové rychlosti. Zatím však nevíme, jak se složky vektoru úhlové rychlosti mění v soustavě S' spojené se setrvačnickem.

K nalezení ω'_1, ω'_2 a ω'_3 použijeme například Eulerových dynamických rovnic (9.1) – (9.3), které se redukují do tvaru

$$\dot{\omega}'_1 = 0 \implies \omega'_1 = konst., \quad (9.22)$$

$$\dot{\omega}'_2 = 0 \implies \omega'_2 = konst., \quad (9.23)$$

$$\dot{\omega}'_3 = 0 \implies \omega'_3 = konst. \quad (9.24)$$

Vektor úhlové rychlosti setrvačnicku $\vec{\omega} = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)_{S'}$, a tím i vektor momentu hybnosti $\vec{L} = J'_{11} \vec{\omega}$ je tedy konstantní nejen v soustavě S , ale také v soustavě S' . Vyslovené závěry jsou ve shodě s očekáváním, protože pro kulový setrvačnick je libovolná osa otáčení hlavní osou setrvačnosti.

Z geometrické představy je zřejmé, že pohyb kulového setrvačnicku spočívá v otáčení os soustavy S' kolem vektoru \vec{L} , resp. kolem osy x_3 konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$.

Geometrickou představu o pohybu setrvačnicku potvrdíme výpočtem Eulerových úhlů (např. [26]). Jejich počáteční hodnoty v čase $t = 0$ a jim odpovídající rychlosti označme $\phi_0, \theta_0, \psi_0, \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0$ a $\dot{\psi}_0$. Z (9.17) vychází pro $L \neq 0$

$$\cos \theta = \frac{J'_{11} \omega'_3}{L} = \frac{\omega'_3}{\omega} = \text{konst.} = \cos \theta_0. \quad (9.25)$$

(Případ $L = 0$ neuvažujeme, neboť odpovídá trvalému klidu setrvačnicku.) Z (9.15) a (9.16) dostáváme za předpokladu $\sin \theta_0 \neq 0$

$$\tan \psi = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \text{konst.} = \tan \psi_0. \quad (9.26)$$

Z (9.15), resp. z (9.16) nakonec vychází

$$\dot{\phi} = \frac{L}{J'_{11}} = \omega = \text{konst.} = \dot{\phi}_0 \implies \phi = \dot{\phi}_0 t + \phi_0. \quad (9.27)$$

Konstantní složky ω'_1, ω'_2 a ω'_3 úhlové rychlosti setrvačnicku můžeme v případě potřeby vyjádřit prostřednictvím Eulerových kinematických rovnic (9.4) – (9.6), do nichž dosadíme hodnoty $\phi_0, \theta_0, \psi_0, \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0$ a $\dot{\psi}_0$.

Zbývá vyřešit situaci, kdy $\sin \theta_0 = 0$, tj. $\theta_0 = 0$ nebo $\theta_0 = \pi$. V takových případech není definována uzlová přímka. Polohu soustavy S' vzhledem k soustavě S potom popisuje parametr $(\phi \pm \psi)$, kde jeden z úhlů ϕ, ψ lze zvolit libovolně. Položíme-li pro zajištění jednoznačnosti například $\phi = 0$, dostaneme užitím (9.17)

$$\dot{\psi} = \pm \frac{L}{J'_{11}} = \pm \omega = \text{konst.} = \dot{\psi}_0 \implies \psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0, \quad (9.28)$$

kde znaménko $+$ odpovídá situaci $\theta_0 = 0$ a znaménko $-$ situaci $\theta_0 = \pi$.

B) Symetrický setrvačnick

Pro symetrický setrvačnick zvolme osy vztažné soustavy S' tak, aby platilo

$$J'_{11} = J'_{22} \neq J'_{33}. \quad (9.29)$$

Integrály pohybu (9.10) a (9.11) mají nyní tvar

$$E = \frac{1}{2} J'_{11} [(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2] + \frac{1}{2} J'_{33} (\omega'_3)^2, \quad (9.30)$$

$$L^2 = J'^2_{11} [(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2] + (J'_{33} \omega'_3)^2 \quad (9.31)$$

a jsou nezávislé, neboť $L^2 = 2J'_{11}E + (J'_{33} - J'_{11}) J'_{33} (\omega'_3)^2$. Rozřešením rovnic (9.30) a (9.31) vzhledem k neznámým $(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2$ a $(\omega'_3)^2$ vychází

$$(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2 = \frac{2J'_{33}E - L^2}{J'_{11}(J'_{33} - J'_{11})} = \text{konst.}, \quad (9.32)$$

$$(\omega'_3)^2 = \frac{L^2 - 2J'_{11}E}{J'_{33}(J'_{33} - J'_{11})} = \text{konst.} \quad (9.33)$$

Odtud je zřejmé, že vektor úhlové rychlosti setrvačnicku má opět konstantní velikost, předposlední vztah však připouští proměnnost prvních dvou složek ω'_1 a ω'_2 . Vektor $\vec{\omega}$ se tedy v obou soustavách S, S' obecně může měnit. Uvedený závěr lze snadno získat také z Eulerových dynamických rovnic (9.1) – (9.3) a vztahu (9.33).

K nalezení závislosti složek ω'_1 a ω'_2 na čase použijeme prvních dvou Eulerových dynamických rovnic (9.1) a (9.2)

$$J'_{11} \dot{\omega}'_1 + (J'_{33} - J'_{11}) \omega'_2 \omega'_3 = 0, \quad (9.34)$$

$$J'_{11} \dot{\omega}'_2 + (J'_{11} - J'_{33}) \omega'_1 \omega'_3 = 0, \quad (9.35)$$

v nichž podle (9.33), resp. (9.3) platí $\omega'_3 = \text{konst.}$ Zavedme proto označení

$$\Omega' = \frac{J'_{33} - J'_{11}}{J'_{11}} \omega'_3 = \text{konst.} \quad (9.36)$$

Vynásobením rovnice (9.35) imaginární jednotkou i a přičtením k (9.34) získáme jedinou diferenciální rovnici prvního řádu

$$\dot{\xi} - i\Omega'\xi = 0 \quad (9.37)$$

pro neznámou $\xi = \omega'_1 + i\omega'_2$. Její obecné řešení má tvar

$$\xi = C \exp(i\Omega't), \quad (9.38)$$

kde $C = A + iB$ je integrační konstanta z oboru komplexních čísel. Užitím Eulerovy identity dostaneme po úpravě

$$\omega'_1 = A \cos(\Omega't) - B \sin(\Omega't) = D \cos(\Omega't + \delta), \quad (9.39)$$

$$\omega'_2 = A \sin(\Omega't) + B \cos(\Omega't) = D \sin(\Omega't + \delta) \quad (9.40)$$

a tedy (užitím (8.57))

$$L'_1 = J'_{11} D \cos(\Omega't + \delta), \quad (9.41)$$

$$L'_2 = J'_{11} D \sin(\Omega't + \delta), \quad (9.42)$$

$$L'_3 = J'_{33} \omega'_3, \quad (9.43)$$

kde reálné konstanty A a B , resp. D a δ jsou určeny počátečními podmínkami setrvačnicku. Vhodnou volbou těchto podmínek (hodnoty ω'_1 , ω'_2 a ω'_3 v okamžiku $t = 0$) nebo parametrů setrvačnicku (J'_{11} , J'_{33}) plynou z dosavadních výsledků následující speciální případy:

- Pro $\omega'_3 = 0$ je $\Omega' = 0$, $\omega'_1 = A = konst.$ a $\omega'_2 = B = konst.$ Ze vztahů (8.57) plyne při $\omega'_3 = 0$ vztah $\vec{L} = J'_{11} \vec{\omega}$, tj. $\vec{\omega} \parallel x_3$. Hlavní osa x'_3 je proto kolmá k x_3 a osa x_3 je tedy jednou z hlavních os setrvačnosti symetrického setrvačnicku, vyplňující rovinnou kolmou k x'_3 . Setrvačnick se otáčí kolem hlavní osy, splývající s x_3 , jejíž konkrétní poloha v soustavě S' je určena konstantami A , B (tj. počátečními podmínkami setrvačnicku). Úhlová rychlost setrvačnicku je v soustavě S i v S' konstantní.
- Pro $\omega'_1(0) = \omega'_2(0) = 0$ je $A = B = 0$, složky ω'_1 a ω'_2 jsou tedy trvale nulové. Analogicky jako v předchozím případě dostaneme $\vec{L} = J'_{33} \vec{\omega}$. Odtud $x_3 \equiv x'_3$. Setrvačnick se otáčí kolem hlavní osy x'_3 , která splývá s osou x_3 , úhlovou rychlostí konstantní v soustavě S i v S' .
- Pro $J'_{11} = J'_{33}$ (kulový setrvačnick) platí $\Omega' = 0$, $\omega'_1 = A = konst.$, $\omega'_2 = B = konst.$, $\omega'_3 = konst.$ a $\vec{L} = J'_{11} \vec{\omega}$. Libovolná osa otáčení je hlavní osou a setrvačnick se kolem ní otáčí úhlovou rychlostí konstantní v soustavě S i v S' (shoda s paragrafem 9.2 A)).

Ve všech ostatních případech je vektor $\vec{\omega}$ proměnný, přičemž však velikost jeho průmětů do souřadnicové osy x'_3 a do roviny k této ose kolmé je stálá. Vektor $\vec{\omega}$ se vzhledem k pozorovateli ve vztahné soustavě S' otáčí kolem osy x'_3 úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}' = \Omega' \vec{e}'_3$, jak plyne ze vztahů (9.39) a (9.40). Polodiový kužel je v tomto případě rotačním kuželem s osou x'_3 a pro jeho vrcholový úhel α podle obr. 9.1 platí

$$\tan \alpha = \frac{D}{\omega'_3} = \frac{\sqrt{(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2}}{\omega'_3}. \quad (9.44)$$

Říkáme, že okamžitá osa otáčení setrvačnicku koná v soustavě S' *precesi* úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}'$.

Pro symetrický setrvačnick dále platí

$$L'_1 = J'_{11} \omega'_1, \quad L'_2 = J'_{11} \omega'_2. \quad (9.45)$$

Tyto vztahy jsou matematickým zápisem skutečnosti, že průměty vektorů \vec{L} a $\vec{\omega}$ do roviny $x'_3 = 0$ jsou souhlasně rovnoběžné, tj. rovina tvořená vektory \vec{L} a $\vec{\omega}$ umístěnými do bodu $O' \equiv O$ obsahuje osu x'_3 . Okamžitá osa otáčení setrvačnicku se v soustavě S pohybuje po plášti herpolodiového kužele, který je rotační a jehož osa je určena konstantním vektorem \vec{L} (resp. osou x_3). Poněvadž je okamžitá

osa otáčení přímkou pevnou v obou soustavách S, S' , valí se po sobě polodiový a herpolodiový kužel bez klouzání. Po plášti rotačního kužele se v soustavě S pohybuje také osa x'_3 . Osu tohoto kužele určuje vektor \vec{L} (resp. osa x_3) a pro jeho vrcholový úhel θ podle obr. 9.1 platí

$$\tan \theta = \frac{J'_{11} D}{J'_{33} \omega'_3} = \frac{J'_{11} \sqrt{(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2}}{J'_{33} \omega'_3}. \quad (9.46)$$

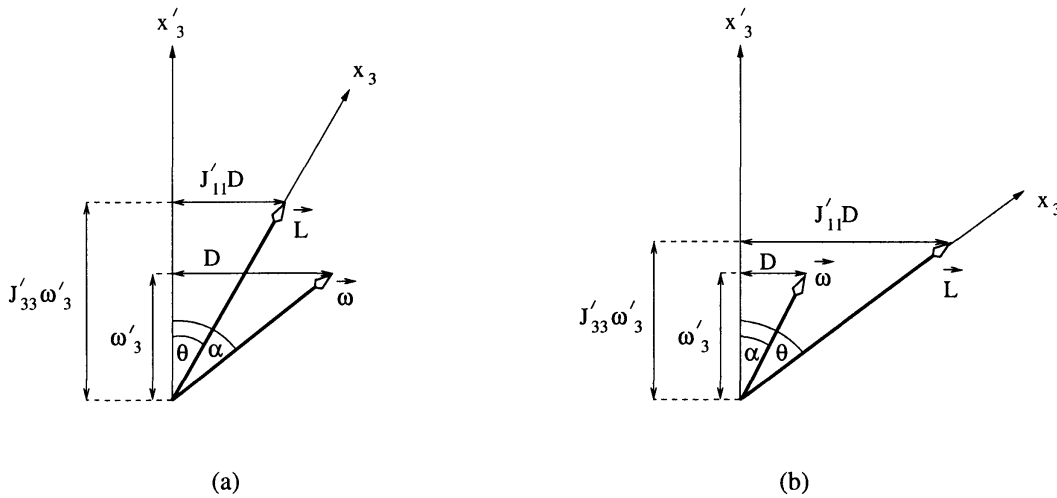
Vzájemná poloha vektorů $\vec{L}, \vec{\omega}$ a osy x'_3 závisí na parametrech setrvačníku. Porovnáním (9.44) a (9.46) dostáváme

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \theta} = \frac{J'_{33}}{J'_{11}} \quad (9.47)$$

a odtud, orientujeme-li osu x'_3 tak, aby platilo $\omega'_3 > 0$,

$$\alpha > \theta \quad \text{pro} \quad J'_{11} < J'_{33}, \quad (9.48)$$

$$\alpha < \theta \quad \text{pro} \quad J'_{11} > J'_{33}. \quad (9.49)$$



Obr. 9.1. Vzájemná poloha vektorů $\vec{L}, \vec{\omega}$ a osy x'_3 pro $\omega'_3 > 0$: (a) $J'_{11} < J'_{33}$, (b) $J'_{11} > J'_{33}$

Vypočteme velikost úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ precese okamžité osy otáčení setrvačníku a tím také osy x'_3 kolem osy x_3 . Otáčení setrvačníku úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ můžeme považovat za složení dvou současně probíhajících pohybů (srv. oddíl 7.5): otáčení setrvačníku kolem osy x'_3 úhlovou rychlostí $\vec{\omega}_{(x'_3)}$ a otáčení této osy kolem osy x_3 hledanou precesní rychlostí $\vec{\Omega}$, tj. (obr. 9.2)

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{(x'_3)} + \vec{\Omega}. \quad (9.50)$$

Z obr. 9.2 je dále zřejmé, že průměty vektorů $\vec{\omega}$ a $\vec{\Omega}$ do přímky kolmé k ose x'_3 jsou stejné, tedy

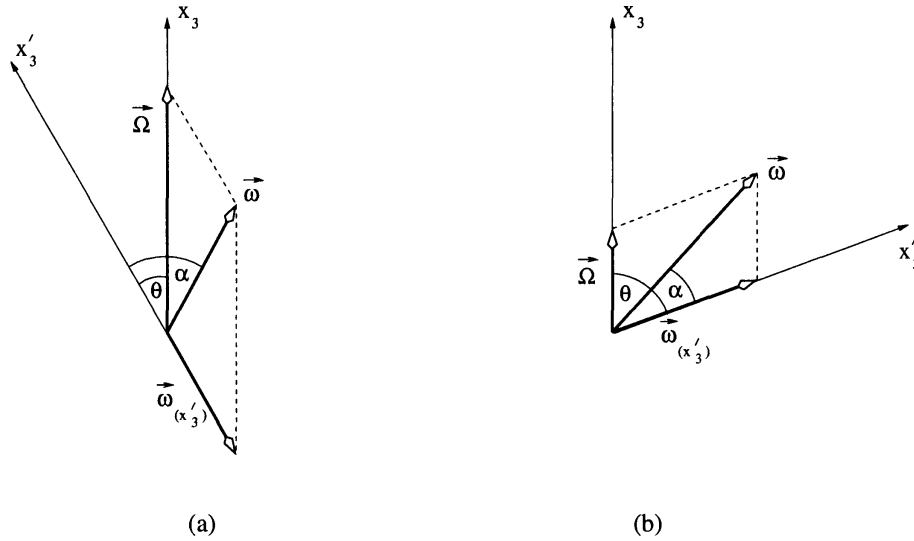
$$\omega \sin \alpha = \Omega \sin \theta. \quad (9.51)$$

Vyjádříme-li podle obr. 9.1

$$\sin \alpha = \frac{D}{\omega}, \quad \sin \theta = \frac{J'_{11} D}{L}, \quad (9.52)$$

dostáváme pro velikost hledané precesní rychlosti vztah

$$\Omega = \frac{L}{J'_{11}}. \quad (9.53)$$



Obr. 9.2. K odvození vztahu pro velikost precesní rychlosti $\vec{\Omega}$: (a) $J'_{11} < J'_{33}$, (b) $J'_{11} > J'_{33}$

Předchozí závěry o pohybu symetrického setrvačnicku potvrdíme výpočtem Eulerových úhlů (např. [26]). Z (9.17) vychází (srv. obr. 9.1)

$$\cos \theta = \frac{J'_{33} \omega'_3}{L} = \text{konst.} = \cos \theta_0, \quad (9.54)$$

z (9.15), resp. z (9.16) dostáváme za předpokladu $\sin \theta_0 \neq 0$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{J'_{11}} = \text{konst.} = \Omega \implies \phi = \Omega t + \phi_0 \quad (9.55)$$

a z (9.17) vychází s přihlédnutím k (9.54) a (9.55)

$$\dot{\psi} = \frac{(L - J'_{33} \dot{\phi}) \cos \theta_0}{J'_{33}} = \frac{J'_{11} - J'_{33}}{J'_{11}} \omega'_3 = \text{konst.} = -\Omega' \implies \psi = -\Omega' t + \psi_0. \quad (9.56)$$

Diskuze pro $\sin \theta_0 = 0$ je stejná jako v případě kulového setrvačnicku (str. 89).

C) Asymetrický setrvačnick

Pro asymetrický setrvačnick zvolme osy vztažné soustavy S' tak, aby platilo

$$J'_{11} < J'_{22} < J'_{33}. \quad (9.57)$$

Integrály pohybu (9.10) a (9.11) jsou opět nezávislé, nyní ale neposkytují (na rozdíl od předchozích případů) žádnou informaci o velikosti úhlové rychlosti setrvačnicku. Vyjádřeme z nich proto

$$(\omega'_1)^2 = \frac{(2J'_{33}E - L^2) - (J'_{33} - J'_{22}) J'_{22} (\omega'_2)^2}{J'_{11} (J'_{33} - J'_{11})}, \quad (9.58)$$

$$(\omega'_3)^2 = \frac{(L^2 - 2J'_{11}E) - (J'_{22} - J'_{11}) J'_{22} (\omega'_2)^2}{J'_{33} (J'_{33} - J'_{11})} \quad (9.59)$$

a dosadíme do druhé Eulerovy dynamické rovnice (9.2). Po úpravách dostaneme

$$\omega'_2 = \pm \frac{\sqrt{(2J'_{33}E - L^2) - (J'_{33} - J'_{22}) J'_{22} (\omega'_2)^2} \cdot \sqrt{(L^2 - 2J'_{11}E) - (J'_{22} - J'_{11}) J'_{22} (\omega'_2)^2}}{J'_{22} \sqrt{J'_{11} J'_{33}}}, \quad (9.60)$$

kde znaménka \pm souvisejí se dvěma možnými směry průmětu vektoru $\vec{\omega}$ do osy x'_2 . Jejich konkrétní volba je určena znaménky složek ω'_1, ω'_3 v okamžiku $t = 0$. Rovnice (9.58) – (9.60) tvoří soustavu pro neznámé složky úhlové rychlosti $\vec{\omega} = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)_{s'}$. První dvě rovnice rovněž poskytují nutnou podmínku pro hodnoty integrálů pohybu E a L setrvačniku

$$2J'_{11}E \leq L^2 \leq 2J'_{33}E. \quad (9.61)$$

Protože součin výrazů pod odmocninami v (9.60) obecně představuje polynom čtvrtého stupně, je složka ω'_2 eliptickým integrálem času. Nyní jej však můžeme (na rozdíl od obecného pohybu sférického kyvadla, kdy bychom museli pracně zjišťovat kořeny polynomu pod odmocninou) snadno vyjádřit. Tvar výsledného řešení závisí na vzájemném vztahu hodnot L^2 a $2J'_{22}E$.

(a) Pro $L^2 > 2J'_{22}E$ vychází z (9.58) – (9.60) (dodatek II. (a))

$$\omega'_1 = \pm \sqrt{\frac{(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{11}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{cn}(\tau - \sigma), \quad (9.62)$$

$$\omega'_2 = + \sqrt{\frac{(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{22}(J'_{33} - J'_{22})}} \operatorname{sn}(\tau - \sigma), \quad (9.63)$$

$$\omega'_3 = \pm \sqrt{\frac{(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{33}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{dn}(\tau - \sigma), \quad (9.64)$$

kde

$$\tau = \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{11})(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{11}J'_{22}J'_{33}}} t \quad (9.65)$$

a σ je integrační konstanta. Znaménka na pravých stranách (9.62) a (9.64) jsou vždy stejná, tedy buď v obou případech $+$, nebo v obou případech $-$ (dodatek II. (a)).

(b) Pro $L^2 < 2J'_{22}E$ vychází (dodatek II. (b))

$$\omega'_1 = \pm \sqrt{\frac{(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{11}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{dn}(\tau - \sigma), \quad (9.66)$$

$$\omega'_2 = + \sqrt{\frac{(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{22}(J'_{22} - J'_{11})}} \operatorname{sn}(\tau - \sigma), \quad (9.67)$$

$$\omega'_3 = \pm \sqrt{\frac{(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{33}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{cn}(\tau - \sigma), \quad (9.68)$$

kde

$$\tau = \sqrt{\frac{(J'_{22} - J'_{11})(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{11}J'_{22}J'_{33}}} t \quad (9.69)$$

a σ je integrační konstanta. Znaménka na pravých stranách (9.66) a (9.68) jsou opět stejná.

(c) Pro $L^2 = 2J'_{22}E$ dostaneme (dodatek II. (c))

$$\omega'_2 = \sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}} \cdot \frac{\exp[\pm 2\sqrt{2E}(\tau - \sigma)] - 1}{\exp[\pm 2\sqrt{2E}(\tau - \sigma)] + 1} \in \left[-\sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}}, +\sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}} \right], \quad (9.70)$$

$$\omega'_1 = \pm \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{22}) [2E - J'_{22}(\omega'_2)^2]}{(J'_{33} - J'_{11}) J'_{11}}}, \quad (9.71)$$

$$\omega'_3 = \pm \sqrt{\frac{(J'_{22} - J'_{11}) [2E - J'_{22}(\omega'_2)^2]}{(J'_{33} - J'_{11}) J'_{33}}}, \quad (9.72)$$

kde

$$\tau = \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{22})(J'_{22} - J'_{11})}{J'_{11}J'_{22}J'_{33}}} t \quad (9.73)$$

a σ je integrační konstanta. Znaménko $+$ v (9.70) přitom odpovídá situaci, kdy mají složky ω'_1 a ω'_3 v počátečním okamžiku totéž znaménko, a $-$ situaci, kdy jsou znaménka složek ω'_1 a ω'_3 v počátečním okamžiku opačná.

Užitím vlastností funkcí, které vystupují ve vztazích pro ω'_1 , ω'_2 a ω'_3 (dodatek II.), se snadno ověří, že jako speciální případy získáme dříve odvozené výsledky pro kulový a symetrický setrvačnick.

Pro úplnost vyjádříme ještě závislost Eulerových úhlů na složkách ω'_1 , ω'_2 a ω'_3 (např. [26]). Z (9.17) vychází

$$\cos \theta = \frac{J'_{33}\omega'_3}{L}, \quad (9.74)$$

dělením vztahů (9.15) a (9.16) za podmínky $\sin \theta \neq 0$ potom

$$\tan \psi = \frac{J'_{11}\omega'_1}{J'_{22}\omega'_2}. \quad (9.75)$$

Z Eulerových kinematických rovnic (9.4) a (9.5) zjistíme, že

$$\dot{\phi} \sin \theta = \omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi, \quad (9.76)$$

užitím (9.12), (9.13), (9.10) a (9.11) pak postupně obdržíme

$$L'_1\omega'_1 + L'_2\omega'_2 = L \sin \theta (\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi) = 2E - J'_{33}(\omega'_3)^2, \quad (9.77)$$

$$L_1'^2 + L_2'^2 = L^2 \sin^2 \theta = L^2 - (J'_{33}\omega'_3)^2. \quad (9.78)$$

Dělením posledních dvou vztahů a dosazením výsledku do (9.76) dostaneme

$$\dot{\phi} = L \frac{2E - J'_{33}(\omega'_3)^2}{L^2 - (J'_{33}\omega'_3)^2}. \quad (9.79)$$

Pro $L^2 \neq 2J'_{22}E$ jsou vzhledem k periodicitě složek ω'_1 , ω'_2 a ω'_3 (dodatek II.) periodické také rychlosti θ , ψ a $\dot{\phi}$. Samotná veličina ϕ však periodická být nemusí. Označíme-li totiž \mathcal{T} periodu složky ω'_2 , je

$$\dot{\phi}(t + \mathcal{T}) = \dot{\phi}(t) \implies \phi(t + \mathcal{T}) = \phi(t) + C, \quad (9.80)$$

kde C je integrační konstanta. Pohyb setrvačnicku v soustavě S proto obecně není periodický. Výjimku tvoří pouze případ $C = 2k\pi$, kde k je celé číslo.

Pro $\sin \theta = 0$ vychází z (9.15) – (9.17)

$$\dot{\theta} = 0 \implies \theta = \text{konst.} \in \{0, \pi\}. \quad (9.81)$$

Další postup je stejný jako v případě kulového a symetrického setrvačnicku.

Všimněme si, že v situacích **(a)** a **(b)** je charakter pohybu setrvačnicku kvalitativně jiný než v situaci **(c)**. Pro $L^2 \neq 2J'_{22}E$ jsou funkce $\omega'_1(t)$, $\omega'_2(t)$ a $\omega'_3(t)$ periodické (dodatek II.), a proto se okamžitá osa otáčení setrvačnicku po jisté době navrací do své původní polohy v soustavě S' . V případě $L^2 = 2J'_{22}E$ však záleží na volbě počátečních podmínek. Je-li v počátečním okamžiku

$$\omega'_2 \neq \pm \sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}} \implies \omega'_1 \neq 0, \quad \omega'_3 \neq 0 \quad (9.82)$$

(srv. vztahy (9.71) a (9.72)), platí při odpovídající volbě znaménka

$$\omega'_2 \rightarrow \pm \sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}}, \quad \omega'_1 \rightarrow 0, \quad \omega'_3 \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad t \rightarrow \infty. \quad (9.83)$$

Pokud v počátečním okamžiku zvolíme

$$\omega'_2 = \pm \sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}} \implies \omega'_1 = 0, \quad \omega'_2 = 0, \quad (9.84)$$

je v (9.70) $\sigma \rightarrow \infty$ a setrvačnick se trvale otáčí kolem hlavní osy x'_2 .

Zatímco volbě $L^2 = 2J'_{22}E$ lze vyhovět celou třídou počátečních podmínek, pro $L^2 = 2J'_{11}E$, resp. $L^2 = 2J'_{33}E$ jsou podle (9.66) – (9.68), resp. (9.62) – (9.64) absolutní hodnoty složek ω'_1 , ω'_2 a ω'_3 předepsány jednoznačně a setrvačnick se trvale otáčí kolem hlavní osy x'_1 , resp. x'_3 . Tato skutečnost souvisí s otázkou stability hlavních os a lze ji názorně geometricky ilustrovat, zapíšeme-li integrály pohybu (9.10) a (9.11) ve tvaru

$$\frac{L'^2_1}{J'_1} + \frac{L'^2_2}{J'_2} + \frac{L'^2_3}{J'_3} = 2E, \quad (9.85)$$

$$L'^2_1 + L'^2_2 + L'^2_3 = L^2. \quad (9.86)$$

První rovnice představuje v souřadnicích L'_1 , L'_2 a L'_3 elipsoid s poloosami

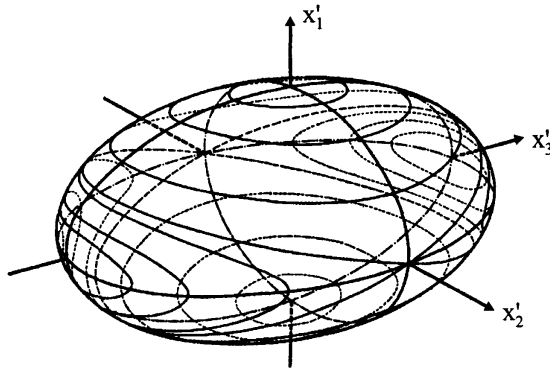
$$\sqrt{2J'_{11}E} < \sqrt{2J'_{22}E} < \sqrt{2J'_{33}E}, \quad (9.87)$$

druhá rovnice představuje kulovou plochu o poloměru L . Tyto rovnice jsou současně splněny právě tehdy, když se obě plochy protínají, tj. právě když platí (srv. (9.61))

$$2J'_{11}E \leq L^2 \leq 2J'_{33}E.$$

Všimněme si následujících případů (obr. 9.3):

- Pro $L^2 = 2J'_{11}E$ se elipsoid protíná s kulovou plochou v bodech na ose x'_1 , setrvačnick se tedy trvale otáčí kolem hlavní osy x'_1 . Změní-li se nepatrně mechanická energie nebo moment hybnosti setrvačnicku, bude se elipsoid s kulovou plochou protínat v uzavřené křivce, která leží v těsné blízkosti osy x'_1 . Vektory \vec{L} i $\vec{\omega}$ se v soustavě S' změní jen málo, a proto je osa x'_1 osou stabilní.
- Pro $L^2 = 2J'_{22}E$ se elipsoid protíná s kulovou plochou v uzavřené křivce procházející společnými body elipsoidu s osou x'_2 . Vektory \vec{L} a $\vec{\omega}$ se v soustavě S' mohou výrazně měnit, a proto je osa x'_2 nestabilní.
- Pro $L^2 = 2J'_{33}E$ se elipsoid protíná s kulovou plochou v bodech na ose x'_3 , setrvačnick se tedy trvale otáčí kolem hlavní osy x'_3 . Změní-li se nepatrně mechanická energie nebo moment hybnosti setrvačnicku, bude se elipsoid s kulovou plochou protínat v uzavřené křivce ležící v blízkosti osy x'_3 . Osa x'_3 je proto rovněž stabilní.



Obr. 9.3. K výkladu stability hlavních os setrvačnosti (převzato z [18] a upraveno)

Porovnejme první a třetí případ. Při pevně daném L lze změnit polohu okamžité osy otáčení setrvačnicku pouze změnou jeho mechanické energie. Z geometrické představy je zřejmé, že v prvním případě platí $\Delta E < 0$, kdežto ve třetím případě $\Delta E > 0$. Protože změna mechanické energie odpovídá práci vnějších sil, vykazuje osa x'_3 vyšší míru stability než osa x'_1 . Druhý případ pak připouští jak $\Delta E < 0$, tak $\Delta E > 0$.

Obr. 9.3 poskytuje také kvalitativní představu o pohybu vektoru momentu hybnosti \vec{L} setrvačnicku v soustavě S' . Zatímco pro asymetrický setrvačnick je tento pohyb obecně složitý, pro symetrický i kulový setrvačnick jej lze popsat snadno. Opět tak dostáváme některé z dřívějších závěrů, uvedených v paragrafech 9.2 A) a 9.2 B):

- Pro symetrický setrvačnick představuje (9.85) rovnici rotačního elipsoidu, jehož průsečnicí s (9.86) je kružnice ležící v rovině kolmé na osu x'_3 . Moment hybnosti \vec{L} se tedy v soustavě S' obecně pohybuje po plášti rotačního kužele s osou x'_3 . Vzhledem k neměnnosti vektoru \vec{L} v soustavě S se po plášti rotačního kužele pohybuje také osa x'_3 . Osa tohoto kužele je naopak určena vektorem \vec{L} .
- Pro kulový setrvačnick je (9.85) kulovou plochou totožnou s (9.86). Při dané hodnotě L tedy může mít vektor momentu hybnosti setrvačnicku v soustavě S' libovolný směr.

9.3 Těžký symetrický setrvačnick

Pro těžký symetrický setrvačnick zvolme osy vztažné soustavy S' tak, aby platilo

$$J'_{11} = J'_{22} \neq J'_{33}. \quad (9.88)$$

Předpokládejme, že střed hmotnosti setrvačnicku leží na kladné poloose x'_3 (srv. závěr oddílu 9.1). Orientujeme-li osu x_3 laboratorní vztažné soustavy S svisle vzhůru, má zákon zachování mechanické energie (9.7) pro takový setrvačnick tvar

$$E = \frac{1}{2} J'_{11} [(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2] + \frac{1}{2} J'_{33} (\omega'_3)^2 + mgd \cos \theta = konst., \quad (9.89)$$

kde d je vzdálenost středu hmotnosti od pevného bodu $O' \equiv O$.

Protože je třetí složka momentu tíhové síly vzhledem k pevnému bodu nulová, zachovává se v soustavě S kromě mechanické energie také třetí složka momentu hybnosti setrvačnicku. Užitím matice (7.47) pro ni dostáváme

$$L_3 = L'_1 \sin \psi \sin \theta + L'_2 \cos \psi \sin \theta + L'_3 \cos \theta = konst. \quad (9.90)$$

a po dosazení $L'_1 = J'_{11} \omega'_1$, $L'_2 = J'_{22} \omega'_2$, $L'_3 = J'_{33} \omega'_3$ a Eulerových kinematických rovnic (9.4) – (9.6) potom

$$L_3 = J'_{11} \dot{\phi} \sin^2 \theta + J'_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = konst. \quad (9.91)$$

Prostřednictvím Eulerových úhlů můžeme vyjádřit také mechanickou energii setrvačnicku (9.89) jako

$$E = \frac{1}{2} J'_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J'_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgd \cos \theta = konst. \quad (9.92)$$

K (9.91) a (9.92) připojíme třetí důležitý vztah

$$\omega'_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = konst., \quad (9.93)$$

který je důsledkem Eulerovy dynamické rovnice (9.3).

Obecně nezávislé integrály pohybu (9.91), (9.92) a (9.93) představují pohybové rovnice těžkého symetrického setrvačnicku se středem hmotnosti na ose x'_3 . Konkrétní typ pohybu setrvačnicku tedy závisí na jeho parametrech J'_{11} , J'_{33} , m a d a na vzájemném vztahu hodnot L_3 , E a ω'_3 , které jsou určeny počátečními podmínkami.

(a) Předpokládejme, že v průběhu pohybu setrvačnicku platí $\sin \theta \neq 0$. Z (9.91) a (9.93) potom můžeme vyjádřit

$$\dot{\phi} = \frac{L_3 - J'_{33} \omega'_3 \cos \theta}{J'_{11} \sin^2 \theta} \quad (9.94)$$

a dosadit spolu s (9.93) do (9.92). Vychází

$$E = \frac{1}{2} J'_{11} \left[\dot{\theta}^2 + \frac{(L_3 - J'_{33} \omega'_3 \cos \theta)^2}{(J'_{11} \sin \theta)^2} \right] + \frac{1}{2} J'_{33} (\omega'_3)^2 + mgd \cos \theta. \quad (9.95)$$

Další postup se značně zjednoduší zavedením substituce

$$u = \cos \theta, \quad u \in (-1, 1). \quad (9.96)$$

Vztah (9.95) tak po jednoduchých úpravách přechází do tvaru

$$\dot{u}^2 = \frac{f(u)}{J'_{11}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{u} = \pm \frac{\sqrt{f(u)}}{J'_{11}} \quad \text{pro } f(u) \geq 0, \quad (9.97)$$

kde jsme označili

$$f(u) = J'_{11} \left[2E - J'_{33} (\omega'_3)^2 - 2mgdu \right] (1 - u^2) - (L_3 - J'_{33} \omega'_3 u)^2. \quad (9.98)$$

Výraz pod odmocninou (9.97) představuje za předpokladu $J'_{11} > 0$ a $d \neq 0$ polynom třetího stupně⁷, a proto je veličina u eliptickým integrálem času⁸. Úhel $\theta = \arccos u$ tedy obecně nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Totéž platí také pro zbývající dva Eulerovy úhly ϕ a ψ , určené diferenciálními rovnicemi (9.94) a (9.93). Protože úprava integrálu pro veličinu u na Legendreovy eliptické integrály (např. [24], [26]) vyžaduje pracné počítání kořenů polynomu pod odmocninou (9.97) s málo přehlednými výsledky, omezíme se zde, stejně jako v případě sférického kyvadla, jenom na kvalitativní popis pohybu setrvačnicku.

Charakter pohybu setrvačnicku je určen počtem a vzájemnou polohou kořenů rovnice $f(u) = 0$ v intervalu přípustných hodnot $u \in (-1, 1)$. Všimněme si proto průběhu funkce $f(u)$. Pro její význačné body platí

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty, \quad (9.99)$$

$$f(-1) = -(L_3 + J'_{33} \omega'_3)^2 \leq 0, \quad f(1) = -(L_3 - J'_{33} \omega'_3)^2 \leq 0. \quad (9.100)$$

Polynom reprezentovaný $f(u)$ je třetího stupně, a proto má vždy alespoň jeden reálný kořen u_3 . Ten leží podle předchozích údajů v intervalu

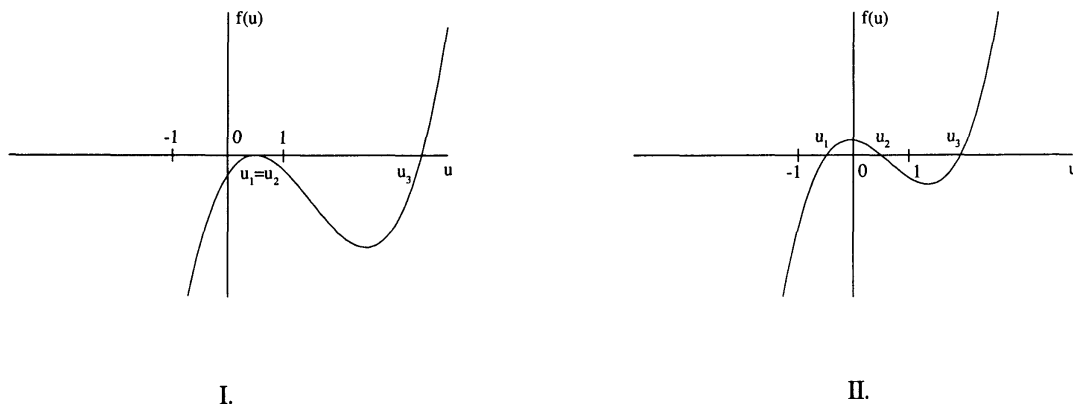
$$u_3 \in [1, \infty). \quad (9.101)$$

O počtu a poloze kořenů polynomu $f(u)$ ve význačném intervalu $(-1, 1)$ zatím nemáme žádnou informaci. Z fyzikálních důvodů je však nutné, aby v tomto intervalu ležel alespoň jeden kořen⁹. Funkce $f(u)$ proto musí mít jeden z průběhů schematicky znázorněných na obr. 9.4. Ukážeme, že obě možnosti jsou realizovatelné.

⁷Možnost $J'_{11} = 0$ neuvažujeme, protože odpovídá nezajímavému případu hmotné úsečky umístěné v ose x'_3 . Stejně tak vyloučíme i možnost $d = 0$, která odpovídá dříve řešenému případu bezmomentového symetrického setrvačnicku.

⁸Limitním přechodem $J'_{11} \rightarrow ml^2$, $J'_{33} \rightarrow 0$ a $d \rightarrow l$ dostaneme po přeznačení $x_3 = l \cos \theta = lu = -z$ z (9.97) a (9.98) vztahy (4.15) a (4.16) pro sférické kyvadlo.

⁹Podobně jako v kapitole 4. bychom z nutnosti existence kořene rovnice $f(u) = 0$ v intervalu $(-1, 1)$ dostali podmínky pro hodnoty integrálů pohybu L_3 , E a ω'_3 . Vzhledem k většímu množství parametrů jsou ale výsledky málo přehledné.



Obr. 9.4. Nákres možných průběhů funkce $f(u)$ pro případ, kdy během pohybu setrvačnicku platí $\sin \theta \neq 0$

I. Předpokládejme, že pro pohyb setrvačnicku trvale platí $\dot{\theta} = 0$, tj. $\theta = konst.$ (situace znázorněná na obr. 9.4 I.). Nalezneme počáteční podmínky takového pohybu.

Uvedme setrvačnicku do pohybu tak, že jej v poloze popsané úhly ϕ_0 , θ_0 a ψ_0 roztočíme kolem osy x'_3 rychlostí $\dot{\psi}_0$ a současně udělíme ose x'_3 rychlost $\dot{\phi}_0$ (tím je jednoznačně určena také rychlost ω'_3). Hledejme podmínky, které musí uvedené veličiny splňovat, aby trvale platilo $\dot{\theta} = 0$, tj. aby rovnice $f(u) = 0$ měla dvojnásobný kořen

$$u_1 = u_2 = \sin \theta_0 \in (-1, 1). \quad (9.102)$$

Požadavek (9.102) je ekvivalentní podmínkám $f(u_1) = 0$ a $\frac{df(u_1)}{du} = 0$, jejichž rozepsáním dostáváme (např. [8], [26])

$$J'_{11} [2E - J'_{33} (\omega'_3)^2 - 2mgdu_1] (1 - u_1^2) - (L_3 - J'_{33} \omega'_3 u_1)^2 = 0, \quad (9.103)$$

$$J'_{11} [2E - J'_{33} (\omega'_3)^2 - 2mgdu_1] u_1 + J'_{11} mgd (1 - u_1^2) - (L_3 - J'_{33} \omega'_3 u_1) J'_{33} \omega'_3 = 0. \quad (9.104)$$

Podle (9.94) však také platí

$$\dot{\phi}_0 = \frac{L_3 - J'_{33} \omega'_3 \cos \theta_0}{J'_{11} \sin^2 \theta_0} = \frac{L_3 - J'_{33} \omega'_3 u_1}{J'_{11} (1 - u_1^2)} = konst. \quad (9.105)$$

Vyloučíme-li z posledních tří vztahů výrazy obsahující L_3 a E , získáme pro rychlost $\dot{\phi}_0$ kvadratickou rovnici

$$J'_{11} u_1 \dot{\phi}_0^2 - J'_{33} \omega'_3 \dot{\phi}_0 + mgd = 0. \quad (9.106)$$

Její reálné řešení vždy existuje a po zpětném dosazení $u_1 = \cos \theta_0$ má tvar

$$\dot{\phi}_0 = \frac{J'_{33} \omega'_3 \pm \sqrt{(J'_{33} \omega'_3)^2 - 4J'_{11} mgd \cos \theta_0}}{2J'_{11} \cos \theta_0} \quad \text{pro } \cos \theta_0 \neq 0, \quad (9.107)$$

$$\dot{\phi}_0 = \frac{mgd}{J'_{33} \omega'_3} \quad \text{pro } \cos \theta_0 = 0. \quad (9.108)$$

Zatímco pro $\theta_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ je popsán typ pohybu setrvačnicku, tzv. *regulární precese*, realizovatelný vždy, pro $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ musí rychlost ω'_3 splňovat podmínku

$$(J'_{33} \omega'_3)^2 \geq 4J'_{11} mgd \cos \theta_0. \quad (9.109)$$

Regulární precesi setrvačnicku lze tedy uskutečnit pro libovolnou počáteční polohu θ_0 a vhodné ω'_3 (vztah (9.109)) konkrétní volbou rychlosti $\dot{\phi}_0$ (vztah (9.107), resp. (9.108)).

II. Pokud při uvedení setrvačníku do pohybu způsobem popsáním v části I. rychlost $\dot{\phi}_0$ podmínku (9.107), resp. (9.108) nesplňuje, má rovnice $f(u) = 0$ v intervalu $(-1, 1)$ dva různé reálné kořeny $u_1 < u_2$ (obr. 9.4 II). Poloha těchto kořenů přitom není omezena na žádnou konkrétní část intervalu $(-1, 1)$ (na rozdíl od sférického kyvadla, pro něž jeden z kořenů vždy ležel v intervalu $(0, l)$). Podle (9.97) pro každé $u \in [u_1, u_2]$ platí

$$\ddot{u} = \pm \frac{1}{J'_{11}} \frac{1}{2\sqrt{f(u)}} \frac{df(u)}{du} \dot{u} = \pm \frac{1}{J'_{11}} \frac{1}{2\sqrt{f(u)}} \frac{df(u)}{du} \left(\pm \frac{\sqrt{f(u)}}{J'_{11}} \right) = \frac{1}{2J'_{11}{}^2} \frac{df(u)}{du}. \quad (9.110)$$

Protože v žádném bodě intervalu $[u_1, u_2]$ není zároveň splněno $\dot{u} = 0$ a $\ddot{u} = 0$, pohybuje se osa x'_3 setrvačníku periodicky v rozmezí $\theta \in [\arccos u_2, \arccos u_1]$. Změny úhlu θ v průběhu pohybu setrvačníku nazýváme *nutací*. Současně koná osa x'_3 *precesi* časově proměnnou rychlostí $\dot{\phi}$ určenou vztahem (9.94). Setrvačnick pak koná *vlastní rotaci* kolem osy x'_3 rychlostí $\dot{\psi}$. Výsledný pohyb se označuje jako *pseudoregulární precese*.

Všimněme si veličiny $\dot{\phi}$, která určuje směr pohybu osy x'_3 . Tato veličina mění v průběhu pohybu setrvačníku znaménko, případně nabývá nulové hodnoty právě tehdy, když platí (srv. (9.94))

$$f(\bar{u}) \geq 0, \quad \text{kde} \quad \bar{u} = \frac{L_3}{J'_{33} \omega'_3} \quad (9.111)$$

a současně

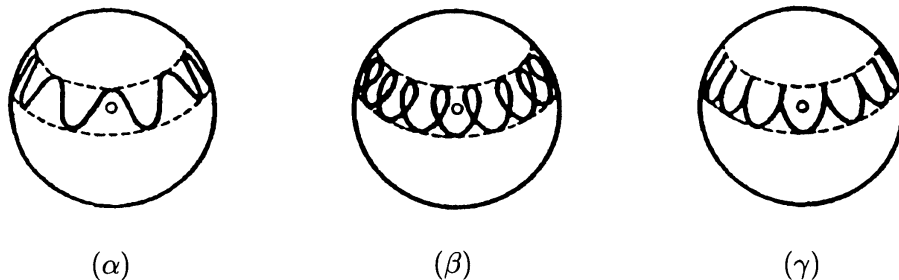
$$\bar{u} \in (-1, 1). \quad (9.112)$$

Pro (9.112) je splněna nerovnost (9.111) právě tehdy, když podle (9.98) platí

$$2E - J'_{33} (\omega'_3)^2 - 2mgd\bar{u} \geq 0. \quad (9.113)$$

V závislosti na hodnotách L_3 , E a ω'_3 mohou nastat následující situace:

- (α) Podmínky (9.112) a (9.113) současně splněny nejsou. Rychlost $\dot{\phi}$ pak v průběhu pohybu setrvačníku nemění své znaménko a průmět vybraného bodu osy x'_3 do roviny $x_3 = 0$ se pohybuje ve stále stejném směru (obr. 9.5 (α)).
- (β) Podmínka (9.112) platí a v (9.113) je ostrá nerovnost. Rychlost $\dot{\phi}$ pak mění své znaménko v bodě $\bar{u} \in (u_1, u_2)$ (obr. 9.5 (β)).
- (γ) Podmínka (9.112) platí a v (9.113) je znaménko rovnosti. Rychlost $\dot{\phi}$ pak nabývá v bodě \bar{u} , který odpovídá jednomu z kořenů rovnice $f(u) = 0$, nulové hodnoty. Vzhledem k (9.98) a (9.113) tato situace nastává vždy pro větší z kořenů, tj. $\bar{u} = u_2$ (obr. 9.5 (γ)).



Obr. 9.5. Nákres trajektorie vybraného bodu osy x'_3 (převzato z [3])

- (b) Předpokládejme, že v průběhu pohybu setrvačnicku nastane $\sin\theta = 0$, tj. osa setrvačnicku x'_3 splývá (až na případnou orientaci) s osou x_3 . V těchto okamžicích není definována uzlová přímka a tím ani úhel ϕ . Rychlost $\dot{\phi}$ však můžeme v případě potřeby dodefinovat tak, aby funkce $\dot{\phi}$ byla v průběhu pohybu setrvačnicku spojitá.

Pro třetí složku momentu hybnosti setrvačnicku nyní platí

$$L_3 = \pm J'_{33} \omega'_3 \quad (9.114)$$

(srv. vztahy (9.91) a (9.93)), kde znaménka \pm souvisejí s dvojí možnou orientací os x_3 a x'_3 pro $\sin\theta = 0$. Další diskuzi provedeme pro znaménko $+$ (pro znaménko $-$ je postup obdobný).

Dosazením (9.114) do (9.98) dostaneme

$$f(u) = J'_{11} \left[2E - J'_{33} (\omega'_3)^2 - 2mgdu \right] (1 - u^2) - (J'_{33} \omega'_3)^2 (1 - u)^2 \quad (9.115)$$

a odtud

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty, \quad (9.116)$$

$$f(-1) = - (2J'_{33} \omega'_3)^2 \leq 0, \quad f(1) = 0. \quad (9.117)$$

- I. Předpokládejme, že $\omega'_3 \neq 0$, tj. $f(-1) < 0$. Podle (9.94) v průběhu pohybu setrvačnicku stále platí

$$\dot{\phi} \geq 0 \quad \text{pro} \quad \omega'_3 > 0, \quad (9.118)$$

$$\dot{\phi} \leq 0 \quad \text{pro} \quad \omega'_3 < 0. \quad (9.119)$$

Výpočtem první a druhé derivace funkce $f(u)$ se prověří, že mohou nastat čtyři případy (obr. 9.6 I.):

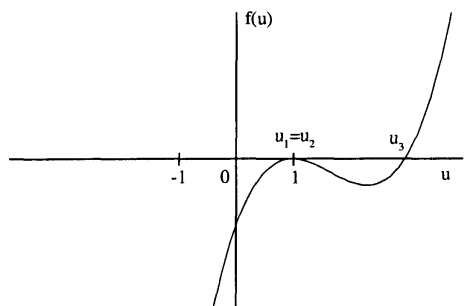
- (α) Pro $2E = J'_{33} (\omega'_3)^2 + 2mgd$, $(J'_{33} \omega'_3)^2 > 4J'_{11} mgd$ nabývá funkce $f(u)$ v bodě $u = 1$ lokálního maxima (obr. 9.6 (α)). Setrvačnick se v tomto případě trvale otáčí kolem svislé osy $x'_3 = x_3$ (je v rovnovážné poloze stálé).
- (β) Pro $2E = J'_{33} (\omega'_3)^2 + 2mgd$, $(J'_{33} \omega'_3)^2 = 4J'_{11} mgd$ má funkce $f(u)$ v bodě $u = 1$ inflexi (obr. 9.6 (β)). Setrvačnick se opět trvale otáčí kolem svislé osy $x'_3 = x_3$ (je v rovnovážné poloze volné).
- (γ) Pro $2E = J'_{33} (\omega'_3)^2 + 2mgd$, $(J'_{33} \omega'_3)^2 < 4J'_{11} mgd$ nabývá funkce $f(u)$ v bodě $u = 1$ lokálního minima (obr. 9.6 (γ)). Je-li v počátečním okamžiku $u \neq 1$, dosáhne osa x'_3 vzhledem k tomu, že v bodě $u = 1$ platí $\dot{u} = 0$, $\ddot{u} = 0$, polohy $\theta = 0$ pro $t \rightarrow \infty$. V opačném případě se setrvačnick trvale otáčí kolem osy $x_3 = x'_3$ (je v rovnovážné poloze vratké).
- (δ) Pro $2E \neq J'_{33} (\omega'_3)^2 + 2mgd$ (obr. 9.6 (γ)) je charakter pohybu setrvačnicku analogický jako v případě (a) II.

- II. Pro $\omega'_3 = 0$ má rovnice $f(u) = 0$ kořeny ± 1 a $\frac{E}{mgd}$. Vzhledem k tomu, že podle (9.92) platí $E \geq mgd$, nastane jedna ze situací znázorněných na obr. 9.6 II. Popis pohybu setrvačnicku se vede podobně jako v předchozích případech. Protože je podle (9.94) nyní

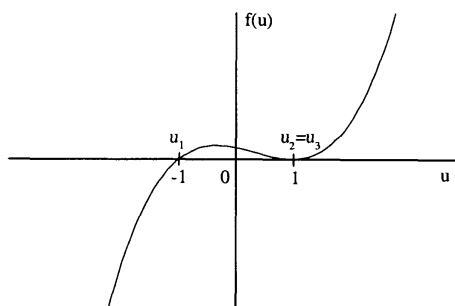
$$\dot{\phi} = 0, \quad (9.120)$$

pohybuje se osa x'_3 pouze ve svislé rovině.

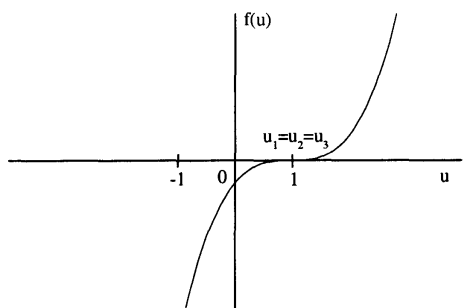
(α)



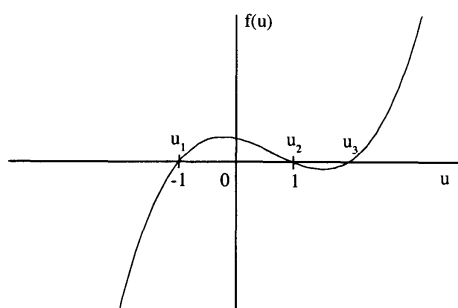
(α)



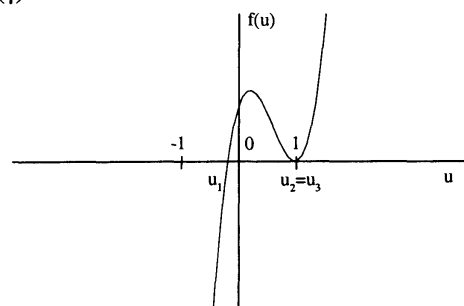
(β)



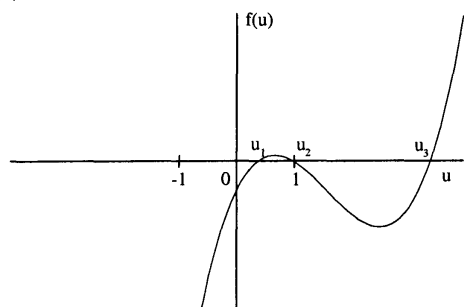
(β)



(γ)



(δ)



I.

II.

Obr. 9.6. Nákres možných průběhů funkce $f(u)$ pro případ, kdy během pohybu setrvačnicku nastane $\sin \theta = 0$:
 I. $\omega'_3 \neq 0$, II. $\omega'_3 = 0$

Po obecném kvalitativním rozboru pohybu těžkého symetrického setrvačnicku si všimněme prakticky důležitého speciálního případu, kdy absolutní hodnota složky ω'_3 nabývá velmi vysoké hodnoty (např. [8]). Kritérium velikosti $|\omega'_3|$ se vyjasní v průběhu dalších výpočtů. Počáteční podmínky setrvačnicku zvolme způsobem

$$\phi_0, \quad \theta_0, \quad \psi_0 \quad \text{libovolné,} \quad (9.121)$$

$$\dot{\phi}_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_0 = \omega'_3 \neq 0, \quad (9.122)$$

tj. setrvačnick roztočíme kolem osy x'_3 a uvolníme. Této situaci odpovídá část **(a) II.** (γ), proto

$$\cos \theta_0 = u_2. \quad (9.123)$$

Setrvačnick se tedy začíná pohybovat tak, že veličina u klesá a úhel θ roste. Integrály pohybu (9.91) a (9.92) mají nyní (s ohledem na (9.93)) tvar

$$L_3 = J'_{33} \omega'_3 u_2, \quad (9.124)$$

$$E = \frac{1}{2} J'_{33} (\omega'_3)^2 + mgdu_2. \quad (9.125)$$

Jejich dosazením do (9.98) dostáváme kombinaci s (9.97)

$$(J'_{11} \dot{u})^2 = f(u) = (u_2 - u) \left[2J'_{11} mgd (1 - u^2) - (J'_{33} \omega'_3)^2 (u_2 - u) \right]. \quad (9.126)$$

Zbývající dva kořeny u_1, u_3 rovnice $f(u) = 0$ určíme jako kořeny kvadratického polynomu v hranaté závorce (9.126). Vychází

$$u_{1,3} = \frac{(J'_{33} \omega'_3)^2}{4J'_{11} mgd} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8J'_{11} mgdu_2}{(J'_{33} \omega'_3)^2} + \frac{(4J'_{11} mgd)^2}{(J'_{33} \omega'_3)^4}} \right). \quad (9.127)$$

Pro natolik vysoká $|\omega'_3|$, že

$$8J'_{11} mgd \ll (J'_{33} \omega'_3)^2, \quad (9.128)$$

můžeme poslední člen pod odmocninou zanedbat a následně použít přibližného vztahu $(1+x)^n \doteq 1+nx$ pro $|x| \ll 1$. Získáme výsledky

$$u_1 \doteq u_2, \quad (9.129)$$

$$u_3 \doteq \frac{(J'_{33} \omega'_3)^2}{2J'_{11} mgd} \gg 1. \quad (9.130)$$

Charakter pohybu setrvačnicku se tedy blíží situaci popsané v části **(a) I.** V tomto speciálním případě lze snadno vyjádřit také závislosti úhlů θ a ϕ na čase. Označíme-li $\xi = u_2 - u \rightarrow 0$, dostaneme z (9.126) dosazením $1 - u^2 \doteq 1 - u_2^2 = \sin^2 \theta_0$ diferenciální rovnici

$$(J'_{11} \dot{\xi})^2 \doteq 2J'_{11} mgd \sin^2 \theta_0 \xi - (J'_{33} \omega'_3 \xi)^2. \quad (9.131)$$

Její řešení má s využitím počátečních podmínek (9.121) a (9.122) tvar¹⁰

$$\xi = u_2 - u = \cos \theta_0 - \cos \theta \doteq \xi_P (1 - \cos \bar{\omega} t), \quad (9.132)$$

kde

$$\bar{\omega} = \frac{J'_{33} \omega'_3}{J'_{11}}, \quad \xi_P = \frac{J'_{11} mgd \sin^2 \theta_0}{(J'_{33} \omega'_3)^2}. \quad (9.133)$$

¹⁰Rovnici řešíme například tak, že obě její strany derivujeme podle času. Úpravou získáme nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty.

Dosazením předchozích výsledků a (9.124) do (9.94) vychází

$$\dot{\phi} = \frac{J'_{33} \omega'_3 (u_2 - u)}{J'_{11} (1 - u^2)} \doteq \frac{J'_{33} \omega'_3}{J'_{11} \sin^2 \theta_0} \xi = \frac{J'_{33} \omega'_3}{J'_{11} \sin^2 \theta_0} \xi_P (1 - \cos \bar{\omega} t) = \frac{mgd}{J'_{33} \omega'_3} (1 - \cos \bar{\omega} t) \quad (9.134)$$

a odtud integrací s uplatněním počáteční podmínky (9.121)

$$\phi \doteq \frac{mgd}{J'_{33} \omega'_3} \left(t - \frac{\sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega}} \right) + \phi_0. \quad (9.135)$$

Pro střední časovou hodnotu veličiny $\dot{\phi}$ tedy platí

$$\langle \dot{\phi} \rangle \doteq \frac{mgd}{J'_{33} \omega'_3} \rightarrow 0. \quad (9.136)$$

Tento výsledek dostáváme při splnění podmínky (9.128) také ze vztahu (9.107).

Závěrem dodejme, že zde popsany obecný typ pohybu těžkého symetrického setrvačnicku, určený současně probíhající precesí, nutací a vlastní rotací, je čistě modelový, neboť v praxi je obvykle obtížné zaručit nehybnost právě jednoho bodu. Důsledkem je složitější pohyb tělesa, brzděný třením. Jako příklad uveďme běžný demonstrační experiment – rychle se otáčející rotačně symetrické těleso opřené o drsnou vodorovnou podložku. Pohyb osy symetrie takového tělesa je zpočátku s vysokou přesností dán pouze precesí úhlovou rychlostí předepsanou vztahem (9.134). Vlivem tření však klesá rychlost vlastní rotace tělesa a přidává se nutace. Výsledkem je poměrně komplikovaný pohyb, jehož matematický popis není vzhledem k nutnosti zformulovat vazební podmínku určující bod okamžitého kontaktu tělesa s podložkou jednoduchý. Obecně však platí, že postupnými ztrátami kinetické energie tělesa klesá výška jeho středu hmotnosti nad podložkou a těleso tak po jisté době spadne.

10. Mechanika tuhého tělesa na elementární úrovni

Hmotný bod je nejjednodušším, ale současně nejméně přesným modelem, neboť neposkytuje žádnou informaci o orientaci tělesa ve zvolené vztažné soustavě a o vzájemném pohybu jeho částí. K podrobnějšímu popisu pohybu těles slouží – s ohledem na konkrétní situaci – model *soustavy hmotných bodů* nebo model *kontinua*.

Soustavou hmotných bodů (tělesem s diskrétním rozložením hmotnosti) rozumíme konečný počet objektů, z nichž na každý pohlížíme jako na hmotný bod. Rozložení hmotnosti v soustavě je popsáno souborem $\{m_i, \vec{r}_i\}$ hmotností a okamžitých poloh jednotlivých bodů.

Kontinuem (tělesem se spojitým rozložením hmotnosti) rozumíme část prostoru o objemu V spojitě vyplněnou látkou. Rozložení hmotnosti v kontinuu charakterizuje *hustota*, definovaná v daném bodě kontinua následujícím způsobem:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\Delta V)}{\Delta V}, \quad (10.1)$$

kde $m(\Delta V)$ je hmotnost části kontinua o objemu ΔV , která obklopuje daný bod.

Důležitým speciálním případem obou modelů je *tuhé těleso*, které působením libovolných sil nemění tvar ani rozměry. Tuhým tělesem nahrazujeme reálná tělesa, jejichž deformace nejsou v průběhu zkoumaného děje příliš podstatné. Předpoklad tuhosti významně zjednodušuje popis polohy i pohybu (tj. kinematiku) tělesa. Polohu tuhého tělesa ve zvolené vztažné soustavě jednoznačně určuje poloha tří jeho bodů, které neleží v přímce. Pohyb tuhého tělesa je dán složením současně probíhajícího pohybu zvoleného *referenčního bodu* a otáčení tělesa kolem *okamžité osy otáčení* procházející tímto bodem (oddíl 7.2 a první odstavec oddílu 7.5).

V této kapitole budeme pro větší názornost úvah a jejich matematického zápisu modelovat těleso soustavou n hmotných bodů, kde n je přirozené číslo.

10.1 Dynamika tuhého tělesa

A) První impulzová věta. Střed hmotnosti tělesa

Popis pohybu tělesa ve zvolené inerciální vztažné soustavě $S = \langle O; x, y, z \rangle$ vychází z druhého Newtonova zákona, formulovaného zvláště pro každý z jeho bodů. Druhý Newtonův zákon pro i -tý (hmotný) bod můžeme zapsat ve tvaru

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i,j}, \quad (10.2)$$

kde \vec{F}_i je výslednice sil, jimiž na i -tý bod působí hmotné objekty mimo těleso (tyto síly nazýváme *vnějšími* nebo také *externími silami*) a $\vec{F}_{i,j}$ je síla, jíž na i -tý bod působí j -tý bod tělesa (tyto síly nazýváme *vnitřními* nebo také *interními silami*). Abychom našli vztah mezi *celkovou hybností* tělesa $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ a výsledným silovým působením, sečteme rovnice (10.2), formulované pro každý z bodů tělesa. Užitím třetího Newtonova zákona

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad (10.3)$$

dostáváme *první impulzovou větu*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (10.4)$$

kde \vec{F} je výslednice vnějších sil působících na těleso.

K popisu pohybu tělesa jako celku je výhodné zavést pojem *střed hmotnosti* jako geometrický bod o polohovém vektoru

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (10.5)$$

kde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ je *celková hmotnost* tělesa. Protože platí

$$\vec{a}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{m}, \quad (10.6)$$

můžeme první impulzovou větu (10.4) přepsat do prakticky výhodnějšího tvaru

$$m\vec{a}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (10.7)$$

který formálně odpovídá druhému Newtonovu zákonu pro hmotný bod o hmotnosti m a polohovém vektoru \vec{r}_0 .

Newtonovy zákony (10.2) umožňují beze zbytku popsat pohyb kteréhokoli z bodů tělesa, požadují však znalost explicitního vyjádření sil $\vec{F}_{i,j}$ a zadání počátečních podmínek pro všechny body.

V případě tuhého tělesa je formulace Newtonových zákonů pro každý z jeho bodů zbytečná. Za referenční bod je totiž v obecném případě výhodné zvolit střed hmotnosti, jehož pohyb určuje jediná rovnice (10.7), zahrnující pouze vnější síly působící na těleso. Zbývá najít vztah, který popisuje otáčení tělesa kolem referenčního bodu. Tím je, jak bude ukázáno v dalších paragrafech, druhá impulzová věta.

B) Druhá impulzová věta

Z každodenní zkušenosti víme, že pohybový účinek síly závisí nejen na její velikosti a směru, ale také na poloze jejího působiště v tělese. Fyzikálně tuto skutečnost charakterizuje veličina *moment síly* (vzhledem k počátku soustavy S), definovaná vztahem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (10.8)$$

kde \vec{r} je polohový vektor působiště síly \vec{F} . V analogii s momentem síly definujeme *moment hybnosti* hmotného bodu jako

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \quad (10.9)$$

Pro změnu momentu hybnosti hmotného bodu za velmi krátký časový interval $\Delta t \rightarrow 0$ vychází užitím vlastností vektorového součinu, zanedbáním $\Delta \vec{r} \times \Delta \vec{p}$ a aplikací druhého Newtonova zákona

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\vec{r} \times \vec{p})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(\vec{r} + \Delta \vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta \vec{p}) - (\vec{r} \times \vec{p})]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{r} \times \Delta \vec{p})}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{r} \times \vec{p})}{\Delta t} = \vec{r} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} + \vec{v} \times \vec{p} = \\ &= \vec{r} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

kde \vec{F} je výslednice sil, které na hmotný bod působí.

Vraťme se k tělesu tvořenému n hmotnými body. Abychom vyjádřili vztah mezi změnou *celkového momentu hybnosti* $\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$ tělesa a momentem působících sil, sečteme rovnice (10.10), formulované pro každý z bodů tělesa, tj. rovnice

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}_i}{\Delta t} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i,j} \quad \text{pro } i, j \in \{1, 2, \dots, n-1, n\}. \quad (10.11)$$

Označíme-li přitom $\vec{r}_{j,i} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ polohový vektor j -tého bodu tělesa vzhledem k i -tému, platí podle třetího Newtonova zákona

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{j,i} = \vec{r}_{j,i} \times \vec{F}_{j,i} = \vec{0}, \quad (10.12)$$

neboť vektory $\vec{r}_{j,i}$ a $\vec{F}_{j,i}$ jsou rovnoběžné. Výsledkem součtu je *druhá impulzová věta*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sum_{i=1}^n \vec{L}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}, \quad (10.13)$$

kde \vec{M} je výsledný moment vnějších sil působících na těleso.

Zavedme jinou vztahnou soustavu $\vec{S} = \langle \vec{O}; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rangle$, jejíž počátek se vzhledem k soustavě S pohybuje se zrychlením \vec{A} a jejíž osy se v soustavě S neotáčejí. Pro celkový moment hybnosti tělesa vzhledem k \vec{S} platí

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (10.14)$$

K výslednému momentu reálných vnějších sil \vec{F}_i působících na jednotlivé body tělesa však nyní musíme přičíst také momenty fiktivních sil $\vec{F}_i^* = -m_i \vec{A}$, tj.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (-m_i \vec{A}) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{A} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (10.15)$$

Druhá impulzová věta formulovaná v soustavě \vec{S}

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sum_{i=1}^n \vec{L}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{A} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{M} \quad (10.16)$$

nabude – bez ohledu na případnou neinerciálnost soustavy \vec{S} – tvaru (10.13), který zahrnuje pouze reálné vnější síly \vec{F}_i , právě když

$$\vec{A} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{0}. \quad (10.17)$$

Tomuto požadavku lze vyhovět například:

- volbou $\vec{A} = \vec{0}$, tj. soustava \vec{S} je inerciální,
- volbou $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{0}$, tj. soustava \vec{S} má počátek ve středu hmotnosti tělesa (tzv. *soustava středu hmotnosti*).

Dodejme, že impulzové věty (10.4), (10.7) a (10.13) platí pro jakékoli těleso (ne tedy nutně tuhé) modelované soustavou hmotných bodů. Jejich platnost lze rozšířit i na model kontinua.

Pro odvození impulzových vět je třeba těleso považované za kontinuum rozdělit na velmi malé spojitě navazující elementy o hmotnostech $\Delta m_i \doteq \rho \Delta V_i$, kde ρ je hustota tělesa v místě elementu ΔV_i . Limitním přechodem $\Delta V_i \rightarrow 0$ pro každý z elementů přecházejí sumace ve všech výše uvedených vztazích v integrace.

V dalších oddílech se již zaměříme pouze na *tuhá tělesa*, opět pro jednoduchost modelovaná soustavou hmotných bodů.

C) Soustavy sil působících na tuhé těleso. Těžiště tuhého tělesa

Soustavou (*vnějších*) sil působících na tuhé těleso budeme rozumět soubor

$$\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}, \quad \text{kde } i \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N} - 1, \mathcal{N}\}, \quad (10.18)$$

jednotlivých sil \vec{F}_i a jejich působišť \vec{r}_i (\mathcal{N} označuje celkový počet působících sil). Dvě soustavy sil α, β

$$\{\vec{F}_i^\alpha, \vec{r}_i^\alpha\}, \quad \text{kde } i \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N} - 1, \mathcal{N}\}, \quad (10.19)$$

$$\{\vec{F}_j^\beta, \vec{r}_j^\beta\}, \quad \text{kde } j \in \{1, 2, \dots, \mathcal{M} - 1, \mathcal{M}\} \quad (10.20)$$

nazveme *ekvivalentními*, právě když vedou ke stejné změně pohybového stavu tělesa. Vzhledem k tomu, že tuhé těleso se nedeformuje, je změna jeho pohybového stavu jednoznačně určena změnou celkové hybnosti a změnou celkového momentu hybnosti (v daném časovém intervalu $\Delta t \rightarrow 0$). Z impulzových vět potom dostáváme, že soustavy sil α, β jsou ekvivalentní, právě když současně platí

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i^\alpha = \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} \vec{F}_j^\beta, \quad \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{r}_i^\alpha \times \vec{F}_i^\alpha = \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} \vec{r}_j^\beta \times \vec{F}_j^\beta. \quad (10.21)$$

Odtud je ihned patrné, že posuvem působiště \vec{r} libovolné síly \vec{F} po její vektorové přímkce do bodu $\vec{r} + k \frac{\vec{F}}{F}$, kde k je reálné číslo, vznikne ekvivalentní soustava sil, neboť

$$\left(\vec{r} + k \frac{\vec{F}}{F} \right) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (10.22)$$

Z dosavadních závěrů plynou známá pravidla pro nahrazení soustavy sil $\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}$ jedinou ekvivalentní silou \vec{F} s působištěm \vec{r} , například¹:

- Dvě různoběžné síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 posuneme po vektorových přímkách do jejich společného průsečíku a sečteme. Výslednou sílu $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ je možné libovolně posouvat po její vektorové přímkce.
- Pro soustavu rovnoběžných sil $\vec{F}_i = k_i \vec{e}$, kde \vec{e} je vektor určující společný směr sil a k_i jsou reálná čísla, platí

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i \vec{e} \quad (10.23)$$

a za předpokladu $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i \neq 0$ dále

$$\vec{r} \times \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i \vec{e} \right) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{r}_i \times k_i \vec{e}, \quad \text{tj.} \quad \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i \vec{r} \right) \times \vec{e} = \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i \vec{r}_i \right) \times \vec{e} \implies \vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i} + K \vec{e}, \quad (10.24)$$

¹Podrobný přehled soustav sil působících na tuhé těleso a jejich ekvivalence lze najít např. v [26].

kde K je libovolné reálné číslo. Konkrétním příkladem soustavy rovnoběžných sil jsou tíhové síly působící na jednotlivé body tělesa v homogenním tíhovém poli Země. Náhradou $k_i \longleftrightarrow m_i$, $\vec{e} \longleftrightarrow \vec{g}$ a $\mathcal{N} \longleftrightarrow n$ dostáváme

$$\vec{F} \equiv \vec{F}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} = m \vec{g}, \quad \vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} + K \vec{g}, \quad (10.25)$$

přičemž zpravidla klademe $K = 0$ a bod o polohovém vektoru \vec{r} nazýváme *těžištěm* tělesa. Těžiště tělesa splývá se středem hmotnosti.

- Zvláštní soustavu sil tvoří dvě rovnoběžné síly $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, které mají různá působišť $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$ (jde o speciální případ předchozí situace, kdy $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} k_i = 0$). Tuto soustavu nazýváme *dvojicí sil*. Pro jejich výslednici a výsledný moment platí

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}, \quad \vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \neq \vec{0}. \quad (10.26)$$

Dvojici sil tedy nelze nahradit jedinou silou s konkrétním působišťem vázaným na její vektorovou přímkou. Výsledný moment silové dvojice nezávisí na bodu, vzhledem k němuž jej určujeme (srv. úloha 6.).

Obecně nelze soustavu sil $\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}$ nahradit ekvivalentní soustavou $\{\vec{F}, \vec{r}\}$, kde $\vec{F} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i$ a \vec{r} je polohový vektor vhodného bodu splňující vztah $\vec{r} \times \vec{F} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. Skutečně, označíme-li

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)_S, \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = (M_x, M_y, M_z)_S, \quad (10.27)$$

dostáváme pro $\vec{r} = (x, y, z)_S$ soustavu rovnic

$$yF_z - zF_y = M_x, \quad (10.28)$$

$$zF_x - xF_z = M_y, \quad (10.29)$$

$$xF_y - yF_x = M_z. \quad (10.30)$$

V případě obecné volby M_x, M_y, M_z nemusí mít tato soustava řešení. Vynásobíme-li totiž první rovnici F_x , druhou F_y a sečteme, vychází

$$-F_z(xF_y - yF_x) = F_x M_x + F_y M_y. \quad (10.31)$$

Na levé straně dostáváme levou stranu třetí rovnice vynásobenou $-F_z$. Aby soustava měla řešení, je nutné a stačí, aby platilo

$$F_x M_x + F_y M_y = -F_z M_z. \quad (10.32)$$

Třetí rovnice je potom závislá a vhodných působišť sil \vec{F} je nekonečně mnoho (leží na přímce).

S vnějším silovým působením souvisí pojem *rovnováha tuhého tělesa*. Řekneme, že tuhé těleso je v rovnováze, právě když jsou výsledná vnější síla i výsledný moment vnějších sil nulové vektory (srv. úloha 6.), tj.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (10.33)$$

Zatímco hmotný bod se v případě, že výslednice působících sil je nulová, pohybuje rovnoměrně přímočaře, tuhé těleso může při splnění podmínek rovnováhy vykonávat i poměrně složité pohyby (paragraf 10.2 B)).

D) Otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy

Speciálním, avšak často realizovaným pohybem je otáčení tuhého tělesa kolem přímky, která ve zvolené vztahné soustavě S nemění svoji polohu. Takovou přímku nazýváme *pevnou osou*.

Všimněme si nejprve nejjednoduššího typu tuhého tělesa: trojice bodů P , Q a R neležících v přímce. Osa otáčení nechť prochází body P a Q . Bod R se pak pohybuje po kružnici se středem na ose otáčení úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ (obr. 10.1), která souvisí s jeho momentem hybnosti vztahem

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m (\vec{r} \times \vec{v}) = m [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]. \quad (10.34)$$

Budeme-li bez újmy na obecnosti předpokládat, že osa z soustavy S je souhlasně rovnoběžná s vektorem úhlové rychlosti, platí pro složky polohového vektoru, vektoru úhlové rychlosti a vektoru rychlosti bodu R

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z)_S, \quad \vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega(t))_S, \quad (10.35)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = (-y(t)\omega(t), x(t)\omega(t), 0)_S. \quad (10.36)$$

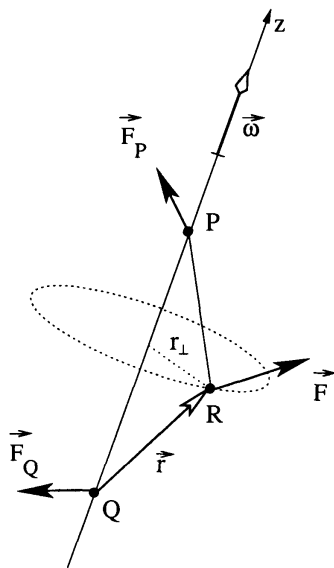
Pro složky momentu hybnosti bodu R potom (již bez vyznačení časových závislostí) vychází

$$\vec{L} = (-mzx\omega, -myz\omega, mr_{\perp}^2\omega)_S, \quad (10.37)$$

kde

$$r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10.38)$$

je velikost průmětu polohového vektoru \vec{r} do roviny kolmé k ose otáčení.



Obr. 10.1. K otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy

Označme \vec{F} výslednici vnějších sil působících na bod R a \vec{F}_P , \vec{F}_Q výslednice vnějších sil působících na body P , Q (obr. 10.1). Polohové vektory bodů P a Q nechť jsou \vec{r}_P a \vec{r}_Q . Protože se body P a Q vzhledem k soustavě S nepohybují, má druhá impulzová věta (10.13) pro těleso P , Q , R tvar

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{r}_P \times \vec{F}_P + \vec{r}_Q \times \vec{F}_Q + \vec{r} \times \vec{F}. \quad (10.39)$$

Změnu úhlové rychlosti bodu R (a tím i celého tělesa tvořeného body P , Q , R) v závislosti na vnějším silovém působení určíme porovnáním třetích složek poslední rovnice. (K prvním dvěma

složkám se vrátíme v paragrafu 10.1 E.) Poněvadž vektory momentů sil \vec{F}_P a \vec{F}_Q (vzhledem k počátku soustavy S) leží v rovinách rovnoběžných s rovinou $z = 0$, vychází

$$mr_{\perp}^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = (\vec{r} \times \vec{F})_z, \quad (10.40)$$

kde $(\vec{r} \times \vec{F})_z$ je z -ová složka momentu síly \vec{F} . Pravou stranu tohoto vztahu upravíme do přehlednějšího tvaru rozkladem jednotlivých vektorů do směru osy otáčení a do roviny kolmé k ose otáčení. Příslušné průměty opatříme indexy \parallel a \perp . Platí

$$(\vec{r} \times \vec{F})_z = ((\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}))_z = (\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp})_z. \quad (10.41)$$

Dosadíme-li dále

$$\vec{F}_{\perp} = F_{\tau} \vec{\tau} + F_n \vec{n}, \quad (10.42)$$

kde F_{τ} , F_n jsou složky vektoru \vec{F}_{\perp} ve směru tečny a ve směru normály k trajektorii bodu R , dostáváme

$$(\vec{r} \times \vec{F})_z = (\vec{r}_{\perp} \times F_{\tau} \vec{\tau})_z = F_{\tau} r_{\perp}. \quad (10.43)$$

Sloučení předchozích výsledků vede k závěru

$$mr_{\perp}^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = F_{\tau} r_{\perp}, \quad (10.44)$$

který je ve shodě s očekáváním, neboť změnu úhlové rychlosti bodu R může způsobit pouze průmět síly \vec{F} do směru tečny k jeho trajektorii².

Zobecněním předchozího postupu na tuhé těleso tvořené n hmotnými body a uvážením, že úhlová rychlost je všem těmto bodům společná, získáme *pohybovou rovnici otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy*

$$J \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = J \varepsilon = M_z. \quad (10.48)$$

Veličina

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \quad (10.49)$$

zde charakterizuje rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k dané ose a nazývá se *momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení*³. Výraz

$$M_z = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)_z = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} r_{i\perp} \quad (10.50)$$

nezávisí na konkrétním umístění počátku soustavy S na dané ose, a proto se nazývá *momentem vnějších sil vzhledem k ose otáčení*.

²Na bod R působí kromě vnější síly \vec{F} také bod P silou \vec{F}^{PR} a bod Q silou \vec{F}^{QR} . Síly \vec{F}^{PR} a \vec{F}^{QR} jsou vnitřními silami tuhého tělesa tvořeného body P , Q , R . Výslednice sil působících na bod R je tedy

$$\vec{F}_{\text{vysl}} = \vec{F} + \vec{F}^{PR} + \vec{F}^{QR}. \quad (10.45)$$

Poněvadž jsou síly \vec{F}^{PR} a \vec{F}^{QR} centrální, tj. mají směr spojnice uvažovaných bodů, platí v každém okamžiku

$$F_{\tau}^{PR} = 0, \quad F_{\tau}^{QR} = 0. \quad (10.46)$$

Změnu úhlové rychlosti bodu R proto skutečně může způsobit pouze průmět síly \vec{F} do směru tečny k jeho trajektorii. Dále platí

$$\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\parallel}^{PR} + \vec{F}_{\parallel}^{QR} = \vec{0}, \quad (10.47)$$

neboť bod R se ve směru osy otáčení nepohybuje (vazební podmínka). Výslednice sil působících na bod R tedy leží v rovině jeho kružnicové trajektorie a má obecně nenulovou tečnou i normálovou složku (srv. paragraf 6.1 B)).

³Hodnoty momentů setrvačnosti pro význačné osy některých homogenních těles jsou uvedeny v tabulkách.

Známe-li moment setrvačnosti J_0 tuhého tělesa o hmotnosti m pro některou osu procházející jeho středem hmotnosti, můžeme zjistit také moment setrvačnosti J tělesa vzhledem k ose, která je s ní rovnoběžná a leží ve vzdálenosti d , podle vztahu

$$J = J_0 + md^2. \quad (10.51)$$

Toto tvrzení je známé jako *Steinerova věta*. Její důkaz je předmětem úlohy 10.

Prostřednictvím momentu setrvačnosti lze vyjádřit kinetickou energii otáčivého pohybu tuhého tělesa. Platí

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\omega r_{i\perp})^2 = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (10.52)$$

Pohybovou rovnicí (10.48) je možné odvodit také uvážením skutečnosti, že změna kinetické energie tuhého tělesa je rovna celkové práci vnějších sil. Práci ovšem konají pouze průměty vnějších sil do směru tečen k trajektoriím jednotlivých bodů tělesa, proto

$$\Delta E_k = \sum_{i=1}^n (F_{i\tau} \vec{r}_i) \Delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} \Delta s_i = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} r_{i\perp} \Delta \varphi = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} r_{i\perp} \omega \Delta t = M_z \omega \Delta t \quad \text{pro } \Delta t \rightarrow 0. \quad (10.53)$$

Současně platí při zanedbání členu $(\Delta\omega)^2$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} J [(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2] = J \omega \Delta\omega \quad \text{pro } \Delta t \rightarrow 0. \quad (10.54)$$

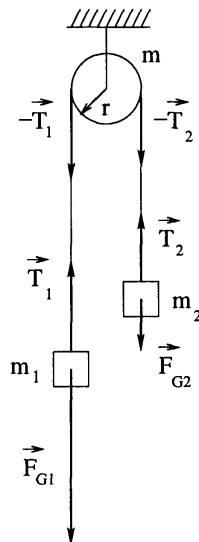
Porovnání posledních dvou vztahů dává rovnici (10.48).

V následujících dvou příkladech ukážeme aplikaci dosavadních závěrů na konkrétní jednoduché situace.

PŘÍKLAD 1.

Určete zrychlení těles o hmotnostech m_1 , m_2 , která jsou spojena ohebným vláknem přes válcovou kladku o hmotnosti m a poloměru r . Jaké síly napínají svislé části vlákna? Moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho ose symetrie je $J = \frac{1}{2} m r^2$. Předpokládejte, že vlákno má neproměnnou délku a zanedbatelnou hmotnost. Odpor prostředí nevažujte.

ŘEŠENÍ:



Obr. 10.2. Soustava těles spojených vláknem přes kladku

Na tělesa působí tíhové síly $\vec{F}_{G1} = m_1\vec{g}$, $\vec{F}_{G2} = m_2\vec{g}$ a tahové síly vlákna \vec{T}_1 , \vec{T}_2 . Podle třetího Newtonova zákona působí tělesa na vlákno stejně velkými, ale opačně orientovanými silami $-\vec{T}_1$, $-\vec{T}_2$. Síly $-\vec{T}_1$, $-\vec{T}_2$ jsou pak ekvivalentní silám, jimiž vlákno působí na kladku⁴ (obr. 10.2).

Kladka působí na části vlákna, s nimiž je v kontaktu, statickými třecími silami. Předpokládáme-li, že hmotnost vlákna je zanedbatelná, tj. $m_{\text{vlákno}} \rightarrow 0$, musí být vzhledem k (10.7) a (10.13) výslednice i výsledný moment sil, které na ně působí, nulovými vektory. Soustava třecích sil, jimiž na vlákno působí kladka, tedy musí být ekvivalentní silám \vec{T}_1 , \vec{T}_2 . Podle třetího Newtonova zákona pak působí vlákno na kladku soustavou třecích sil, která je ekvivalentní silám $-\vec{T}_1$, $-\vec{T}_2$.

Pohybové rovnice pro středy hmotnosti těles (tj. formulace první impulzové věty (10.7)) a pohybová rovnice pro otáčivý pohyb kladky kolem její osy symetrie mají skalární tvar

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (10.55)$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g, \quad (10.56)$$

$$J\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon = T_1 r - T_2 r. \quad (10.57)$$

Protože má vlákno podle předpokladu v zadání neproměnnou délku, má zrychlení obou těles stejnou velikost, tj.

$$a_1 = a_2 = a. \quad (10.58)$$

Současně mezi zrychlením těles a úhlovým zrychlením kladky platí vztah

$$\varepsilon = \frac{a}{r}. \quad (10.59)$$

Dosazením (10.58) a (10.59) do (10.55) – (10.57) obdržíme soustavu tří rovnic pro tři neznámé veličiny a , T_1 a T_2 . Jejím řešením (například sečtením první rovnice s druhou a dosazením za $(T_1 - T_2)$ ze třetí rovnice) získáme výsledky

$$a = \frac{2(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2) + m} g, \quad (10.60)$$

$$T_1 = \frac{4m_2 + m}{2(m_1 + m_2) + m} m_1 g, \quad (10.61)$$

$$T_2 = \frac{4m_1 + m}{2(m_1 + m_2) + m} m_2 g. \quad (10.62)$$

Diskuze výsledků: Předpokládejme, že soustavu uvolníme z klidu, tj. počáteční rychlosti obou těles jsou nulové. Potom:

- pro $m_1 > m_2$ je $a > 0$ a těleso o hmotnosti m_1 klesá,
- pro $m_1 < m_2$ je $a < 0$ a těleso o hmotnosti m_1 stoupá,
- pro $m_1 = m_2$ je $a = 0$ a obě tělesa zůstávají v klidu.

Všimněme si, že pro $m \neq 0$ a $m_1 \neq m_2$ platí $T_1 \neq T_2$. Pro $m \rightarrow 0$ je potom $T_1 \rightarrow T_2$.

◇

⁴Předpokládáme natolik velké tření, že vlákno po obvodu kladky neprokluzuje.

PŘÍKLAD 2.

Válec o hmotnosti m a poloměru r se valí z nejvyššího bodu nakloněné roviny o výšce h a úhlu sklonu α . Určete rychlost jeho středu hmotnosti na konci nakloněné roviny. Moment setrvačnosti válce vzhledem k ose jeho symetrie je $J = \frac{1}{2}mr^2$. Odpor vzduchu zanedbejte.

ŘEŠENÍ:

1. *způsob:* Pohyb válce lze považovat za složení pohybu jeho středu hmotnosti a otáčení kolem vodorovné osy procházející středem hmotnosti.

Na válec působí ve středu hmotnosti (těžišti) tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$ (srv. str. 108), v bodech dotyku s nakloněnou rovinou pak tlaková síla \vec{N} a třecí síla \vec{F}_T (obr. 10.3). První impulzová věta pro pohyb středu hmotnosti válce a druhá impulzová věta formulovaná v soustavě středu hmotnosti (srv. str. 106) mají skalární tvar

$$ma = mg \sin \alpha - F_T, \quad (10.63)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N, \quad (10.64)$$

$$J\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon = F_T r. \quad (10.65)$$

Předpokládáme-li, že válec po nakloněné rovině nepodkluzuje, platí mezi zrychlením jeho středu hmotnosti a úhlovým zrychlením otáčivého pohybu vztah

$$\varepsilon = \frac{a}{r}. \quad (10.66)$$

Z (10.63), (10.65) a (10.66) vychází

$$a = \frac{2}{3}g \sin \alpha = \text{konst.} \quad (10.67)$$

Užitím kinematických vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí

$$v = at, \quad l = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}at^2 \quad (10.68)$$

pak dostaneme pro rychlost středu hmotnosti válce na konci nakloněné roviny výsledek

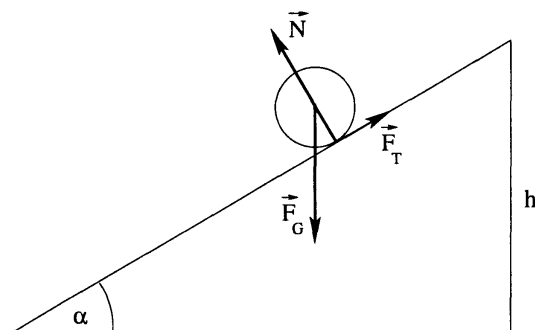
$$v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}. \quad (10.69)$$

Poznámka: Získaný výsledek platí pouze za předpokladu, že válec po nakloněné rovině nepodkluzuje. V takovém případě je síla F_T statickou třecí silou a její velikost je omezena podmínkou

$$F_T \leq Nf_0, \quad (10.70)$$

kde f_0 je koeficient statického tření mezi válcem a nakloněnou rovinou. Kombinací předchozích vztahů dostáváme podmínku, za níž válec nepodkluzuje, ve tvaru

$$F_T = mg \sin \alpha - ma = \frac{1}{3}mg \sin \alpha \leq Nf_0 = mg \cos \alpha f_0 \quad \Rightarrow \quad f_0 \geq \frac{\tan \alpha}{3}. \quad (10.71)$$



Obr. 10.3. Pohyb válce po nakloněné rovině

2. způsob: Předpokládáme-li, že válec nepodkluzuje, jsou body jeho dotyku s nakloněnou rovinou v klidu a statická třecí síla \vec{F}_T nekoná práci. Pro pohyb válce tedy platí zákon zachování mechanické energie ve tvaru (srv. úloha 13.)

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh. \quad (10.72)$$

Dosazením $J = \frac{1}{2}mr^2$ a $\omega = \frac{v}{r}$ dostaneme po úpravě opět výsledek (10.69). ◇

E) Volné osy

Vraťme se k prvním dvěma složkám druhé impulzové věty (10.39). Zobecněním na těleso tvořené n hmotnými body pro ně platí (viz též (10.37))

$$-\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \omega \right)}{\Delta t} = M_x^I + M_x^{II}, \quad (10.73)$$

$$-\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \omega \right)}{\Delta t} = M_y^I + M_y^{II}, \quad (10.74)$$

kde jsme odděleně označili \vec{M}^I výsledný moment vnějších sil (vzhledem k počátku soustavy S), jimiž na těleso působí osa otáčení, a \vec{M}^{II} výsledný moment ostatních vnějších sil. Limitní přechody v posledních dvou vztazích můžeme již známým způsobem rozepsat a upravit. Protože se z -ové souřadnice jednotlivých bodů tělesa nemění, vychází

$$-\left(\sum_{i=1}^n m_i v_{ix} z_i \right) \omega - \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \varepsilon = M_x^I + M_x^{II}, \quad (10.75)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^n m_i v_{iy} z_i \right) \omega - \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \varepsilon = M_y^I + M_y^{II} \quad (10.76)$$

a dosazením za složky rychlostí jednotlivých bodů ze vztahu (10.36) potom

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \omega^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \varepsilon = M_x^I + M_x^{II}, \quad (10.77)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \omega^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \varepsilon = M_y^I + M_y^{II}. \quad (10.78)$$

Pro zadané silové působení (známá hodnota \vec{M}^{II}) můžeme z (10.77) a (10.78) vypočítat složky výsledného momentu \vec{M}^I sil, jimiž na těleso působí osa otáčení. Tento moment je vzhledem k časovým závislostem souřadnic x_i a y_i obecně proměnný, tj. mění směr i velikost. Podle třetího Newtonova zákona pak působí těleso na osu silami se stejně velkým, ale opačně orientovaným výsledným momentem, a obecně tak způsobuje opotřebení jejích ložisek.

Ve speciálním případě, kdy je jediným objektem působícím na těleso osa otáčení, mají impulzové věty pro pohyb středu hmotnosti tělesa a pro otáčení tělesa kolem osy tvar

$$ma_{0x} = F_x^I, \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \omega^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \varepsilon = M_x^I, \quad (10.79)$$

$$ma_{0y} = F_y^I, \quad -\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \omega^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \varepsilon = M_y^I, \quad (10.80)$$

$$ma_{0z} = F_z^I, \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \right) \varepsilon = 0, \quad (10.81)$$

kde \vec{F}^I je výslednice vnějších sil, jimiž na těleso působí osa. Nemá-li být osa v průběhu pohybu tělesa nikterak namáhána, tj.

$$\vec{F}^I = \vec{0}, \quad \vec{M}^I = \vec{0}, \quad (10.82)$$

je nutné a stačí, aby v každém okamžiku platilo

$$a_{0x} = 0, \quad a_{0y} = 0, \quad a_{0z} = 0 \quad (10.83)$$

a současně

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = 0. \quad (10.84)$$

Podmínky (10.83) vyjadřují skutečnost, že střed hmotnosti tělesa leží na ose otáčení (jeho kružnicová trajektorie degeneruje v bod) a je v klidu, podmínky (10.84) se vztahují k rozložení hmotnosti tělesa (v daném okamžiku) vzhledem k ose otáčení. Při současném splnění podmínek (10.83) a (10.84) nemusí být osa otáčení fixována žádnými vazbami a nazývá se proto *volnou osou*. Příkladem volných os jsou osy symetrie rotačních těles.

Všimněme si situace, kdy na těleso kromě osy otáčení působí ještě homogenní tíhové pole Země. Potom platí

$$ma_{0x} = F_x^I + F_{Gx}, \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \omega^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \varepsilon = M_x^I + M_{Gx}, \quad (10.85)$$

$$ma_{0y} = F_y^I + F_{Gy}, \quad - \left(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \omega^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \varepsilon = M_y^I + M_{Gy}, \quad (10.86)$$

$$ma_{0z} = F_z^I + F_{Gz}, \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \right) \varepsilon = M_{Gz}, \quad (10.87)$$

kde F_{Gx} , F_{Gy} , F_{Gz} jsou složky výslednice tíhových sil, umístěné do středu hmotnosti tělesa, a M_{Gx} , M_{Gy} , M_{Gz} jsou složky momentu této síly (vzhledem k počátku soustavy S). Protože v každém okamžiku platí $a_{0z} = 0$, je z levého vztahu v (10.87) patrné, že síla \vec{F}^I , kterou působí osa otáčení na těleso, je obecně nenulová.

Ve speciálním případě, kdy střed hmotnosti tělesa leží na ose otáčení, která je svislá, platí $M_{Gx} = M_{Gy} = M_{Gz} = 0$. Pokud jsou navíc splněny podmínky (10.84), není osa otáčení vystavena žádnému momentu sil⁵. Přesto je nutné osu alespoň v jednom bodě upevnit a zajistit tak existenci vazební síly $\vec{F}^I = -\vec{F}_G$, nezbytné pro zaručení neměnnosti výšky středu hmotnosti tělesa nad pevně zvolenou vodorovnou rovinou.

V praxi bývá přirozeně snahou konstruovat otáčivé části přístrojů tak, aby osa otáčení byla namáhána pouze tíhou tělesa a žádnými momenty sil, tj. aby byly splněny podmínky (10.84) a (10.84). Konečné jemné doladění parametrů soustavy tak, aby byly uvedené podmínky splněny co nejlépe, se provádí experimentálně a nazývá se *vyvažováním* (např. [9], [17]).

F) Otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu

V předchozím paragrafu jsme se zabývali otáčením tuhého tělesa kolem pevné osy. Rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose jsme přitom charakterizovali časově neproměnným momentem setrvačnosti. Nyní si všimneme otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu. Protože pevným bodem může procházet nekonečně mnoho os otáčení (srv. první odstavce oddílu 7.5), bude nutné charakterizovat rozložení hmotnosti v tělese obecnějším způsobem. K nalezení této charakteristiky opět vyjdeme ze vztahu pro (celkový) moment hybnosti tělesa.

⁵V literatuře se někdy i takové osy označují jako volné.

Volíme-li společný počátek soustav S a S' v pevném bodě, platí pro rychlost i -tého bodu tělesa vztah

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (10.88)$$

kde $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)_S$ je okamžitá úhlová rychlost tělesa. Potom

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]. \quad (10.89)$$

Provedením vektorových součinů na pravé straně posledního vztahu vychází pro složky momentu hybnosti tělesa

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z, \quad (10.90)$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z, \quad (10.91)$$

$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z, \quad (10.92)$$

kde jsme zavedli označení

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = - \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i = J_{yx}, \quad (10.93)$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad J_{yz} = - \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = J_{zy}, \quad (10.94)$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_{zx} = - \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i = J_{xz}. \quad (10.95)$$

Soubor veličin $(J_{ij})_S$, kde za i, j postupně dosazujeme indexy x, y a z , nazýváme *tenzorem momentu setrvačnosti tuhého tělesa* nebo krátce jen *tenzorem setrvačnosti*⁶, vyjádřeným v soustavě S . Jeho složky J_{ij} jsou vzhledem k časovému závislostem složek vektorů \vec{r}_i a $\vec{\omega}$ obecně funkcemi času. Vyjádříme-li však složky všech vektorů vystupujících v (10.89) v soustavě $S' = (O'; x', y', z')$ spojené s tělesem, dostaneme stejným postupem jako dříve⁷

$$L'_x = J'_{xx}\omega'_x + J'_{xy}\omega'_y + J'_{xz}\omega'_z, \quad (10.96)$$

$$L'_y = J'_{yx}\omega'_x + J'_{yy}\omega'_y + J'_{yz}\omega'_z, \quad (10.97)$$

$$L'_z = J'_{zx}\omega'_x + J'_{zy}\omega'_y + J'_{zz}\omega'_z, \quad (10.98)$$

kde

$$J'_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i'^2 + z_i'^2), \quad J'_{xy} = - \sum_{i=1}^n m_i x_i' y_i' = J'_{yx}, \quad (10.99)$$

$$J'_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + z_i'^2), \quad J'_{yz} = - \sum_{i=1}^n m_i y_i' z_i' = J'_{zy}, \quad (10.100)$$

$$J'_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2), \quad J'_{zx} = - \sum_{i=1}^n m_i x_i' z_i' = J'_{xz} \quad (10.101)$$

a příslušnost složek jednotlivých vektorů k soustavě S' jsme vyznačili čárkou. Složky tenzoru setrvačnosti J'_{ij} již nejsou závislé na čase a poskytují tak požadovanou informaci o rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k pevnému bodu. Tato informace je přitom vázána na soustavu S' .

Složky J'_{ii} tenzoru setrvačnosti mají s přihlédnutím k (10.49) význam momentů setrvačnosti tělesa vzhledem k příslušným osám i . Ostatní složky J'_{ij} pro $i \neq j$ vystupují ve vztazích pro výsledný moment sil, jimiž otáčející se těleso působí na pevnou osu, a proto se nazývají *deviačními momenty* (srv. předchozí paragraf a úloha 16.).

Prostřednictvím složek tenzoru setrvačnosti se vyjadřují nejen složky momentu hybnosti, ale také kinetická energie tělesa

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2. \quad (10.102)$$

⁶Doposud jsme se setkávali pouze se *skalárními* a *vektorovými veličinami*. Ve fyzice se však často vyskytují také *tenzorové veličiny*, které mají více složek (jejich definice překračuje středoškolský rámec, a proto ji ponecháme stranou). Jednou z takových veličin je tenzor setrvačnosti.

⁷Zdůrazněme, že zde vyjadřujeme složky vektorů \vec{L} , \vec{r}_i a $\vec{\omega}$, které charakterizují pohyb tuhého tělesa vzhledem k soustavě S , ve dvou různých soustavách S a S' (srv. se skutečností, že například moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k soustavě S' je nulový vektor).

Vyjádřením složek vektorů $\vec{\omega}$ a \vec{r}_i v soustavě S' a provedením vektorových součinů pro ni získáme vztah

$$E_k = \frac{1}{2} J'_{xx} \omega_x'^2 + \frac{1}{2} J'_{yy} \omega_y'^2 + \frac{1}{2} J'_{zz} \omega_z'^2 + J'_{xy} \omega_x' \omega_y' + J'_{yz} \omega_y' \omega_z' + J'_{xz} \omega_x' \omega_z'. \quad (10.103)$$

Známe-li složky tenzoru setrvačnosti vzhledem k soustavě S' , můžeme užitím (10.103) stanovit moment setrvačnosti J tělesa vzhledem ke kterékoli ose, která prochází počátkem soustavy a je určena vektorem $\vec{\nu} = (\nu'_x, \nu'_y, \nu'_z)_{S'}$. Dělením vztahu

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J'_{xx} \omega_x'^2 + \frac{1}{2} J'_{yy} \omega_y'^2 + \frac{1}{2} J'_{zz} \omega_z'^2 + J'_{xy} \omega_x' \omega_y' + J'_{yz} \omega_y' \omega_z' + J'_{xz} \omega_x' \omega_z' \quad (10.104)$$

veličinou ω^2 a uvážením, že $\vec{\nu} = \pm \left(\frac{\omega'_x}{\omega}, \frac{\omega'_y}{\omega}, \frac{\omega'_z}{\omega} \right)_{S'}$, kde znaménka \pm souvisejí s dvojí možnou orientací vektorů $\vec{\nu}$ a $\vec{\omega}$, dostáváme

$$J = J'_{xx} \nu_x'^2 + J'_{yy} \nu_y'^2 + J'_{zz} \nu_z'^2 + 2J'_{xy} \nu_x' \nu_y' + 2J'_{yz} \nu_y' \nu_z' + 2J'_{xz} \nu_x' \nu_z'. \quad (10.105)$$

Vztah (10.103) představuje v soustavě souřadnic, na jejíž osy nanášíme hodnoty veličin ω'_x, ω'_y a ω'_z , rovnici kvadratické plochy. Bez důkazu zde uvedeme, že vždy existuje taková soustava souřadnic (spojená s tělesem), v níž má (10.103) *kanonický tvar*

$$E_k = \frac{1}{2} J'_{xx} \omega_x'^2 + \frac{1}{2} J'_{yy} \omega_y'^2 + \frac{1}{2} J'_{zz} \omega_z'^2, \quad \text{tj.} \quad J'_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j. \quad (10.106)$$

Kvadratická plocha (10.103) je tedy elipsoidem. Nazýváme jej *elipsoidem setrvačnosti* tělesa vzhledem k pevnému bodu (terminologie však není zcela jednotná).

Osy soustavy S' , v níž platí (10.106), nazýváme *hlavními osami setrvačnosti* a veličiny J'_{ii} *hlavními momenty setrvačnosti*. Při otáčení tělesa kolem i -té hlavní osy potom podle (10.96) – (10.98) platí vztah

$$\vec{L} = J'_{ii} \vec{\omega}, \quad (10.107)$$

který vyjadřuje rovnoběžnost vektorů \vec{L} a $\vec{\omega}$. Pokud se těleso otáčí kolem jiné než hlavní osy, jsou vektory \vec{L} a $\vec{\omega}$ různoběžné. Hlavní osy setrvačnosti procházející středem hmotnosti tělesa jsou osami volnými (úloha 16.).

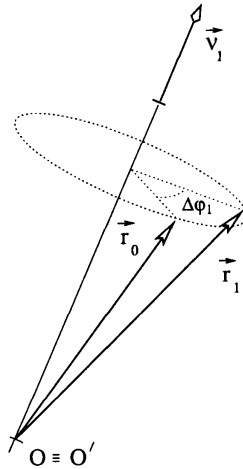
Průběh otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu je matematicky popsán druhou impulzovou větou (10.13). Situace je však poměrně komplikovaná, neboť složky vektoru momentu hybnosti (10.90) – (10.92) ve vztahné soustavě S jsou obecně funkcemi časově proměnných poloh jednotlivých bodů tělesa, které se vyjadřují prostřednictvím hledané veličiny $\vec{\omega}$. Toto úskalí lze obejít a odvodit rovnice, které uvádějí do souvislosti změny složek ω'_i úhlové rychlosti tělesa, konstantní složky J'_{ij} jeho tenzoru setrvačnosti a složky M'_i výsledného momentu vnějších sil, všechny vyjádřené v soustavě S' (tzv. *Eulerovy dynamické rovnice*, např. [3], [17], [26]). Postup při řešení Eulerových dynamických rovnic, vedoucí k nalezení závislosti ω'_i na čase, ale překračuje středoškolský rámec, a proto si v dalším oddíle všimneme pouze některých – prakticky důležitých – typů pohybu tuhého tělesa. Nejprve ovšem zařadíme krátkou poznámku o otáčení tuhého tělesa kolem různoběžných os.

G) Otáčení tuhého tělesa kolem různoběžných os

Uvažme dvě různoběžné osy otáčení $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, které jsou určeny pevným bodem tělesa a jednotkovými vektory $\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2$. Otočme těleso nejprve kolem osy \mathcal{O}_1 o velmi malý úhel $\Delta\varphi_1 \rightarrow 0$ a následně kolem osy \mathcal{O}_2 o velmi malý úhel $\Delta\varphi_2 \rightarrow 0$. Označíme-li \vec{r}_0 původní polohový vektor vybraného bodu tělesa v soustavě S , budou polohové vektory tohoto bodu po provedení prvního a druhého otočení postupně (obr. 10.4)

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (\Delta\varphi_1 \vec{\nu}_1 \times \vec{r}_0), \quad (10.108)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (\Delta\varphi_2 \vec{\nu}_2 \times \vec{r}_1). \quad (10.109)$$



Obr. 10.4. K určení polohového vektoru vybraného bodu tuhého tělesa po otočení kolem pevné osy

Spojením (10.108) a (10.109) dostáváme při zanedbání výrazu obsahujícího $\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2$ vztah pro změnu polohového vektoru vybraného bodu tělesa po provedení obou otočení

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (\Delta\varphi_1\vec{v}_1 + \Delta\varphi_2\vec{v}_2) \times \vec{r}_0. \quad (10.110)$$

Tentýž výsledek dostáváme také záměnou pořadí obou otočení, tj. nejprve otočením tělesa kolem osy \mathcal{O}_2 o úhel $\Delta\varphi_2 \rightarrow 0$ a následně kolem osy \mathcal{O}_1 o úhel $\Delta\varphi_1 \rightarrow 0$. Vidíme, že skládání otočení tělesa kolem různoběžných os o velmi malé úhly je, na rozdíl od skládání otočení o obecné úhly (srv. oddíl 7.2), komutativní. V tomto smyslu tedy můžeme považovat otáčení tělesa kolem os \mathcal{O}_1 a \mathcal{O}_2 za současná. Výsledná změna polohy tělesa potom odpovídá otočení kolem osy určené pevným bodem a jednotkovým vektorem \vec{v} o úhel $\Delta\varphi$ tak, že platí

$$\Delta\varphi\vec{v} = \Delta\varphi_1\vec{v}_1 + \Delta\varphi_2\vec{v}_2. \quad (10.111)$$

Dělíme-li poslední vztah délkou časového intervalu $\Delta t \rightarrow 0$, po který obě současně chápaná otáčení probíhala, dostáváme souvislost mezi výslednou úhlovou rychlostí a dílčími úhlovými rychlostmi tělesa kolem jednotlivých os

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (10.112)$$

Naopak, otáčí-li se těleso kolem okamžité osy otáčení úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$, můžeme jeho pohyb považovat za současná otáčení kolem různoběžných os dílčími úhlovými rychlostmi, které jsou určeny průměty vektoru $\vec{\omega}$ do těchto os.

K procvičení pojmů a závěrů tohoto oddílu zařazujeme následující soubor úloh.

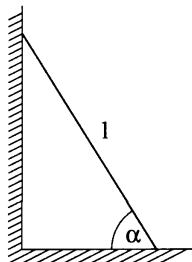
Úlohy:

1. Uveďte konkrétní příklady těles různých skupenství, která
 - a) lze považovat za tuhá,
 - b) nelze považovat za tuhá.
2. Uveďte konkrétní příklady těles, která za jistých okolností lze považovat za tuhá, kdežto za jiných okolností se jako tuhá nechovají.
3. Uveďte konkrétní příklady posuvných, otáčivých a obecných pohybů tuhých těles.
4. Dokažte, že střed hmotnosti tělesa je určen nezávisle na způsobu volby vztažné soustavy.
Návod: Uvažte dvě obecně zvolené vztažné soustavy. Přesvědčte se, že polohové vektory definované v každé z nich vztahem (10.5) určují tentýž bod.
5. Ukažte, že pokud jsou v jisté vztažné soustavě S pro dvě soustavy reálných sil $\{\vec{F}_i^\alpha, \vec{r}_i^\alpha\}$, $\{\vec{F}_j^\beta, \vec{r}_j^\beta\}$, kde $i \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N} - 1, \mathcal{N}\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \mathcal{M} - 1, \mathcal{M}\}$, splněny podmínky (10.21), pak jsou splněny také v každé jiné soustavě \bar{S} .

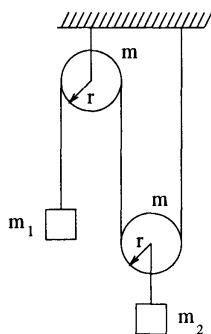
6. Ukažte, že pokud pro soustavu sil $\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}$, kde $i \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N} - 1, \mathcal{N}\}$, platí $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \vec{F}_i = \vec{0}$, pak výsledný moment sil \vec{F}_i nezávisí na volbě bodu, vzhledem k němuž jej určujeme. Platí také obrácené tvrzení?

Poznámka: Uvedená věta má význam při popisu rovnováhy tuhého tělesa, kdy je výsledný moment vnějších sil stejný vzhledem k libovolnému bodu.

- *7. Homogenní žebřík o hmotnosti m a délce l je opřen o stěny podle následujícího obrázku. Koeficient statického tření mezi žebříkem a oběma stěnami je f_0 . Jakých hodnot může nabývat úhel α , aby žebřík nesklouzl?



8. Diskutujte vliv síly \vec{F} na otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy pro obě znaménka složky F_τ (srv. str. 110).
9. Vysvětlete, proč moment setrvačnosti homogenního rotačního válce vzhledem k jeho ose symetrie nezávisí na výšce válce.
- *10. Dokažte Steinerovu větu.
- Návod: Zaveďte vztažnou soustavu s počátkem ve středu hmotnosti tělesa a s osou z totožnou s danou osou otáčení. Vyjádřete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose s ní rovnoběžné a ležící ve vzdálenosti d . Využijte přitom definičního vztahu pro polohový vektor středu hmotnosti tělesa.
11. Popište pohyb těles z příkladu 1. za předpokladu, že v počátečním okamžiku těleso o hmotnosti m_1 klesá rychlostí o velikosti v_0 . Všimněte si zvláště případů $m_1 > m_2$, $m_1 = m_2$ a $m_1 < m_2$.
- *12. Určete zrychlení těles o hmotnostech m_1, m_2 , která jsou podle následujícího obrázku spojena vláknem přes stejné válcové kladky o hmotnosti m a poloměru r . Vláknem je ohebné a má neproměnnou délku a zanedbatelnou hmotnost. Odpor prostředí neuvažujte.



13. Odvoďte vztah kinetickou energii tuhého tělesa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde v je rychlost středu hmotnosti tělesa, ω je úhlová rychlost tělesa kolem osy procházející středem hmotnosti a J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této ose.

Návod: Vyjděte ze vztahu $E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$. Nalezněte souvislost mezi rychlostí i -tého bodu tělesa, rychlostí středu hmotnosti a úhlovou rychlostí tělesa.

- *14. Předpokládejte, že válec z příkladu 2. při pohybu po nakloněné rovině podkluzuje. Určete rychlost středu hmotnosti válce na konci nakloněné roviny
- užitím impulzových vět,
 - užitím zákona zachování energie.

Jaké je úhlové zrychlení válce? Jakou práci vykoná na dráze l třecí síla? Koeficient dynamického tření mezi válcem a nakloněnou rovinou je f .

15. Vyjádřete kinetickou energii tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevného bodu, prostřednictvím složek J_{ij} tenzoru setrvačnosti a složek ω_i úhlové rychlosti tělesa, vyjádřených v soustavě S .

*16. Dokažte, že hlavní osy setrvačnosti procházející středem hmotnosti tuhého tělesa jsou volnými osami.

Návod: Předpokládejte bez újmy na obecnosti, že osa otáčení splývá s osou $z \equiv z'$ soustav S i S' se společným počátkem v pevném bodě tělesa. Ukažte, že platí

$$J'_{xz} = J'_{yz} = 0 \iff J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Použijte přitom transformačních vztahů (paragraf 6.2 D))

$$\begin{aligned} x' &= x(t) \cos \varphi(t) + y(t) \sin \varphi(t), \\ y' &= -x(t) \sin \varphi(t) + y(t) \cos \varphi(t), \\ z' &= z, \end{aligned}$$

kde $\varphi(t)$ je úhel otočení tělesa v okamžiku t .

10.2 Pohyb setrvačnicků

A) Setrvačnický a jejich rozdělení

V tomto oddíle si všimneme popisu pohybu *setrvačnicků*. Setrvačnickem zde budeme rozumět takové tuhé těleso, které se v jisté inerciální vztažné soustavě $S = \langle O; x, y, z \rangle$ otáčí kolem jejího počátku. Vztažnou soustavu $S' = \langle O'; x', y', z' \rangle$ spojenou se setrvačnickem potom zavádíme tak, aby platilo $O' \equiv O$ a její osy odpovídaly hlavním osám setrvačnosti. Podle rozložení hmotnosti dělíme setrvačnický na

- *asymetrické*, pro něž jsou všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé (délky poloos elipsoidu setrvačnosti jsou různé),
- *symetrické*, pro něž jsou právě dva hlavní momenty setrvačnosti stejné (elipsoid setrvačnosti je rotačním tělesem),
- *kulové*, pro něž jsou všechny hlavní momenty setrvačnosti stejné (elipsoidem setrvačnosti je kulová plocha)⁸.

Podle typu vnějšího silového působení pak zvlášť mluvíme pouze o dvou speciálních případech:

- *bezmomentovém setrvačnicku*⁹, pro nějž je výsledný moment vnějších sil vzhledem k pevnému bodu nulový,
- *těžkém setrvačnicku*, který je upevněn mimo střed hmotnosti (těžiště) a jiné než tíhové síly a vazební síla v pevném bodě na něj nepůsobí.

Kvalitativnímu popisu pohybu uvedených typů setrvačnicků se budeme věnovat v následujících dvou paragrafech. Výsledky, k nimž dospějeme, je vhodné demonstrovat na prostorových modelech nebo přiblížit prostřednictvím počítačových programů (např. [10], [22]).

B) Bezmomentový setrvačnick

Typickým příkladem bezmomentového setrvačnicku je tuhé těleso upevněné ve středu hmotnosti (například v Cardanově závěsu), na něj kromě vazební síly působí pouze homogenní tíhové pole Země.

Nejjednodušším pohybem bezmomentového setrvačnicku je otáčení kolem některé z hlavních os setrvačnosti. Protože na tyto osy nepůsobí žádné momenty sil, nemusí být jejich poloha – s výjimkou uvažovaného pevného bodu – nikterak fixována (srv. paragraf 10.2 E)). Otáčí-li se tedy setrvačnick v počátečním okamžiku kolem některé z hlavních os, otáčí se kolem ní i nadále. Tím je zcela popsán pohyb kulového setrvačnicku, jehož všechny osy jsou hlavní.

Popišme nyní obecnější situaci. Pro bezmomentový setrvačnick je výsledný moment vnějších sil vzhledem k pevnému bodu nulový, proto podle druhé impulzové věty (10.13) platí

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \overrightarrow{\text{konst.}} \quad (10.113)$$

a odtud užitím (10.96) – (10.98)

$$L^2 = L_x'^2 + L_y'^2 + L_z'^2 = (J'_{xx}\omega_x')^2 + (J'_{yy}\omega_y')^2 + (J'_{zz}\omega_z')^2 = \text{konst.} \quad (10.114)$$

Protože je výsledný moment vnějších sil vzhledem k pevnému bodu nulový, zachovává se kromě kvadrátu velikosti momentu hybnosti také kinetická energie setrvačnicku, tj. (opět užitím (10.96) – (10.98))

$$E_k = \frac{1}{2} J'_{xx}\omega_x'^2 + \frac{1}{2} J'_{yy}\omega_y'^2 + \frac{1}{2} J'_{zz}\omega_z'^2 = \frac{1}{2} \frac{L_x'^2}{J'_{xx}} + \frac{1}{2} \frac{L_y'^2}{J'_{yy}} + \frac{1}{2} \frac{L_z'^2}{J'_{zz}} = \text{konst.} \quad (10.115)$$

⁸Kulovým setrvačnickem tedy může být nejen homogenní koule, ale také například homogenní krychle s pevným bodem ve středu hmotnosti (úloha 1.).

⁹Bezmomentové setrvačnický se v literatuře někdy také označují jako *volné* nebo *bezsílové*.

Zápisy (10.114) a (10.115) představují v soustavě souřadnic, na jejíž osy vynášíme hodnoty L'_x , L'_y a L'_z , rovnici kulové plochy o poloměru L a rovnici elipsoidu s poloosami $a = \sqrt{2J'_{xx}E_k}$, $b = \sqrt{2J'_{yy}E_k}$, $c = \sqrt{2J'_{zz}E_k}$. Obě tyto plochy mají společný střed v počátku soustavy souřadnic. Rovnice (10.114) a (10.115) pro složky momentu hybnosti L'_x , L'_y a L'_z jsou splněny současně, a proto se kulová plocha s elipsoidem protíná. Odtud dostáváme podmínky mezi kvadrátem velikosti momentu hybnosti a kinetickou energií bezmomentového setrvačnicku

$$2J'_{\min}E_k \leq L^2 \leq 2J'_{\max}E_k, \quad (10.116)$$

kde

$$J'_{\min} = \min\{J'_{xx}, J'_{yy}, J'_{zz}\}, \quad J'_{\max} = \max\{J'_{xx}, J'_{yy}, J'_{zz}\}. \quad (10.117)$$

Pro symetrický setrvačnick zpravidla volíme osy soustavy S' tak, aby platilo $J'_{xx} = J'_{yy} \neq J'_{zz}$. Průsečnicí kulové plochy (10.114) s elipsoidem (10.115) je potom kružnice ležící v rovině kolmé k ose z' (s výjimkou případu, kdy tato kružnice degeneruje v bod). Umístíme-li počátek vektoru \vec{L} do pevného bodu $O' \equiv O$, pohybuje se tento vektor v soustavě S' po plášti rotačního kužele s osou z' . Platí tedy

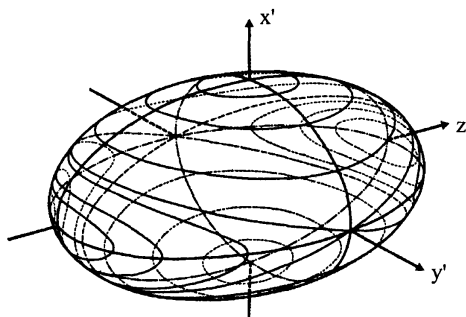
$$L'_z = J'_{zz}\omega'_z = \text{konst.} \quad \implies \quad \omega'_z = \text{konst.} \quad (10.118)$$

Současně pro symetrický setrvačnick platí

$$L'_x = J'_{xx}\omega'_x, \quad L'_y = J'_{yy}\omega'_y. \quad (10.119)$$

Tyto vztahy vyjadřují skutečnost, že průměty vektorů \vec{L} a $\vec{\omega}$ do roviny $z' = 0$ jsou souhlasně rovnoběžné, tj. vektory \vec{L} a $\vec{\omega}$ umístěné do bodu $O' \equiv O$ a osa z' leží vždy v jedné rovině. Vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ umístěný do bodu $O' \equiv O$ se proto v soustavě S' rovněž pohybuje po plášti rotačního kužele s osou z' . Poněvadž se ovšem vektor \vec{L} v soustavě S nemění, pohybuje se současně vektor $\vec{\omega}$ i osa z' v soustavě S po pláštích rotačních kuželů se společnou osou určenou vektorem \vec{L} .

Pro asymetrický setrvačnick zde pouze uvedeme, že průsečnicí kulové plochy (10.114) s elipsoidem (10.115) je uzavřená křivka, která není kružnicí (obr. 10.5). Pohyb takového setrvačnicku je tudíž podstatně složitější.



Obr. 10.5. Nákres průsečnic kulových ploch o různém poloměru s elipsoidem (převzato z [18] a upraveno)

C) Těžký setrvačnick

Dříve než přistoupíme k popisu pohybu těžkého setrvačnicku, všimněme si vlivu nenulového momentu vnějších sil na roztočený setrvačnick. Uvažujme pro jednoduchost o rotačně symetrickém tělese, například bicyklovém kole, které se zpočátku otáčí kolem své osy symetrie úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Moment hybnosti takového kola je rovnoběžný s osou otáčení, tj.

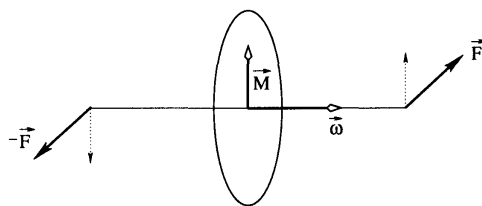
$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad (10.120)$$

kde J je moment setrvačnosti kola vzhledem k ose symetrie. Působme nyní na osu kola po velmi krátkou dobu $\Delta t \rightarrow 0$ dvojicí sil \vec{F} , $-\vec{F}$, jejichž vektory leží například v rovině kolmé k papíru (obr. 10.6). Výsledný moment \vec{M} této dvojice leží v rovině papíru. Podle druhé impulzové věty (10.13) platí pro změnu vektoru momentu hybnosti kola

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t \quad \text{pro} \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (10.121)$$

Vidíme, že vektor změny momentu hybnosti $\Delta\vec{L}$ je souhlasně rovnoběžný s vektorem \vec{M} , a proto se dá osa kola v rovině papíru do pohybu ve směru vyznačeném tečkovanými šipkami. Toto na první pohled překvapivé chování otáčejících se těles bývá nazýváno *gyroskopickým efektem*¹⁰.

¹⁰Gyroskopem se někdy označuje těleso, které se velmi rychle otáčí kolem své osy symetrie (terminologie však není jednotná).



Obr. 10.6. K vysvětlení gyroskopického efektu

Těžký setrvačnick je vystaven neustálému vlivu momentu výsledné tíhové síly, a jeho pohyb je proto obecně velmi složitý. Matematický rozbor ukazuje, že z prakticky důležitých případů je možné analyticky popsat pouze pohyb těžkého symetrického setrvačnicku, jehož střed hmotnosti leží na ose symetrie elipsoidu setrvačnicku. Tímto případem se také budeme dále zabývat, přičemž opět zvolíme osy soustavy S' tak, aby platilo $J'_{xx} = J'_{yy} \neq J'_{zz}$.

Lze dokázat, že pohyb uvažovaného setrvačnicku je určen současně probíhajícími otáčením setrvačnicku kolem osy z' (tzv. *vlastní rotace setrvačnicku*), periodickým pohybem vybraného bodu osy z' mezi dvěma rovnoběžkami kulové plochy se středem v pevném bodě (tzv. *nutace setrvačnicku*) a otáčením osy z' kolem svislé přímky procházející pevným bodem (tzv. *precese setrvačnicku*). Konkrétní parametry vlastní rotace, nutace a precese jsou dány způsobem, kterým byl setrvačnick uveden do pohybu.

Zvlášť jednoduchá situace nastane tehdy, když setrvačnick velmi rychle roztočíme kolem osy z' a uvolníme. Moment tíhové síly je potom pouze malou poruchou, která v soustavě S' nemůže způsobit příliš výrazné změny vektoru okamžité úhlové rychlosti. V každém okamžiku proto můžeme s dobrou přesností psát

$$\vec{L} = J'_{zz} \vec{\omega}, \quad (10.122)$$

tj. osa z' je téměř totožná se směrem vektorů $\vec{\omega}$ a \vec{L} . Poněvadž je moment tíhové síly v každém okamžiku kolmý na osu $z' \parallel \vec{L}$ a změna vektoru momentu hybnosti setrvačnicku je vždy souhlasně rovnoběžná s vektorem výsledného momentu sil, pohybuje se osa z' a tím i vektor \vec{L} po plášti rotačního kužele se svislou osou procházející pevným bodem (obr. 10.7). Platí (srv. vztah (10.13))

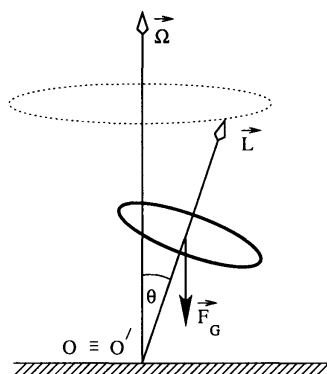
$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad \text{pro } \Delta t \rightarrow 0, \quad (10.123)$$

kde $\vec{\Omega}$ je úhlová rychlost otáčení vektoru \vec{L} v soustavě S . Označíme-li θ úhel, který svírá vektor \vec{L} se svislou přímkou a \vec{d} polohový vektor středu hmotnosti (těžiště) setrvačnicku, dostáváme z předchozího vztahu a z (10.122) (srv. vztah (9.136))

$$\Omega = \frac{mgd}{L} = \frac{mgd}{J'_{zz} \omega'_z}. \quad (10.124)$$

Podrobnější rozbor ukazuje, že uvedený zjednodušený popis pohybu rychle se otáčejícího těžkého symetrického setrvačnicku je adekvátní za předpokladu

$$(J'_{zz} \omega'_z)^2 \gg 8J'_{xx} mgd. \quad (10.125)$$



Obr. 10.7. K popisu pohybu těžkého symetrického setrvačnicku

Dodejme, že jako velký symetrický setrvačnick, podrobený vnějšímu silovému působení nebeských objektů, se přibližně chová také samotná Země. Popis jejího pohybu lze najít např. v [5], [8] a [23].

Závěrem oddílu zařazujeme čtveřici úloh, která rozšiřuje a prohlubuje některé ze závěrů uvedených v textu.

Úlohy:

1. Užitím vztahu (10.105) ukažte, že homogenní krychle má vzhledem ke každé ose procházející jejím středem hmotnosti stejný moment setrvačnicku.

2. Vysvětlete, proč dělení setrvačníků na bezmomentové a těžké nevyčerpává všechny realizovatelné případy.
- *3. Porovnejte velikosti vrcholových úhlů kuželů, po nichž se v soustavě S' pohybují vektory \vec{L} a $\vec{\omega}$ bezmomentového symetrického setrvačnicku, pro
- $J'_{xx} > J'_{zz}$,
 - $J'_{xx} = J'_{zz}$,
 - $J'_{xx} < J'_{zz}$.
- *4. Uvažte symetrický setrvačnick, pro nějž platí $J'_{xx} < J'_{zz}$. Ukažte, že pro pevně danou velikost momentu hybnosti L je k vychýlení setrvačnicku, který se otáčí kolem hlavní osy z' , třeba vykonat práci. Platí totéž tvrzení pro setrvačnick, který se otáčí kolem hlavní osy x' ?
- Návod: Uvědomte si, že práce vnějších sil je rovna změně kinetické energie setrvačnicku. Vysvětlete, jak můžeme při pevně volbě L změnit kinetickou energii setrvačnicku, který se otáčí kolem dané hlavní osy, aby měla kulová plocha (10.114) s elipsoidem (10.115) neprázdný průnik.

10.3 Použití setrvačníků

Závěrečný oddíl této kapitoly se zabývá některými praktickými důsledky pohybu otáčejících se rotačně symetrických těles. Taková tělesa se v technické praxi rovněž nazývají setrvačnický, přestože obecně nemusí vyhovovat definici uvedené na str. 120. Detailní teoretický rozbor i konkrétní technická realizace zde diskutovaných zařízení je záležitostí velmi komplikovanou. Text je proto koncipován pouze jako stručný kvalitativní přehled základních fyzikálních aspektů jejich činnosti. Zájemce o podrobnější informace odkazujeme na literaturu¹¹.

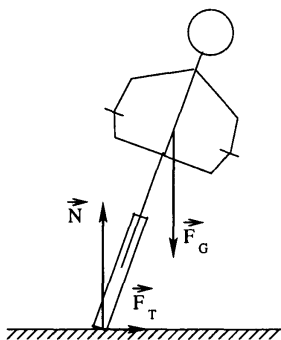
A) Umělý horizont

Umělý horizont je přístroj, který umožňuje pilotům při změnách pohybového stavu letadla nebo při letu za snížené viditelnosti stanovit horizontální rovinu. Jako umělý horizont se chová bezmomentový setrvačnick uložený v Cardanově závěsu tak, že žádná jeho osa není fixována (na setrvačnick se tedy při změnách polohy letadla nepřenášejí žádné vnější silové momenty). Pokud roztočíme takový setrvačnick kolem některé z hlavních os, zachováva osa otáčení ve vztažné soustavě spojené se Zemí i ve vztažné soustavě spojené se setrvačnickem svoji polohu. Leží-li hlavní osa původně v horizontální, případně vertikální rovině, zůstává v ní i nadále.

B) Kola dopravních prostředků

Nejprve si všimneme pohybu jízdního kola. Zkušenost i intuice ukazují, že je značně obtížné udržet rovnováhu na kole, které se pohybuje velmi pomalu, případně je v klidu. Pro jedoucí kolo je tomu již jinak. Pokud se totiž cyklista náhodně naklání například doleva, působí na pravou část řídítek silou směrem vzhůru a na levou část silou směrem dolů, což vede (srv. gyroskopický efekt, paragraf 10.2 C)) k zatočení předního kola doleva. Současně se mění směr výslednice sil, jimiž na soustavu „kolo+cyklista“ působí její okolí: výslednice tíhové síly \vec{F}_G , tlakové síly vozovky \vec{N} a statické třecí síly \vec{F}_T mezi pneumatikami kol a vozovkou (obr. 10.8) má dostředivou složku. Kolo tedy zatáčí doleva a „objíždí“ tak místo potenciálního pádu.

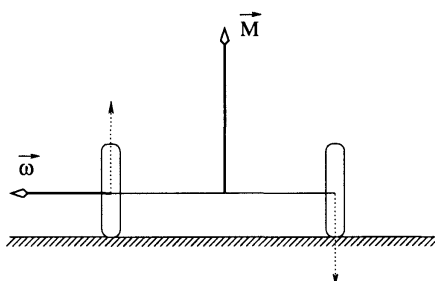
Jízda na kole je provázena neustálými náhodnými změnami polohy cyklisty a odpovídajícími více či méně výraznými zatáčkami (proto končí vjezd do tramvajových kolejí okamžitým pádem). Detailní popis pohybu jízdního kola je ovšem velmi komplikovaný, protože soustava „kolo+cyklista“ není tuhá. Sám cyklista vyrovnává náhodné změny své polohy intuitivně a různým způsobem tak neustále působí nejen na řídítka (tlakem nebo otáčivým momentem), ale i na jiné části kola (sedlo, pedály). Podle třetího Newtonova zákona potom kolo zpětně působí na cyklistu a ovlivňuje tím jeho pohyb. Roli hraje rovněž statická třecí síla mezi koly a vozovkou, jejíž matematické vyjádření není vzhledem k obecnému natočení předního kola jednoduché.



Obr. 10.8. Jízda na kole

¹¹Pro první orientaci je možné prolistovat několik čísel časopisu *American Journal of Physics*, který spolu s řadou článků k dané problematice obsahuje také odkazy na knižní publikace.

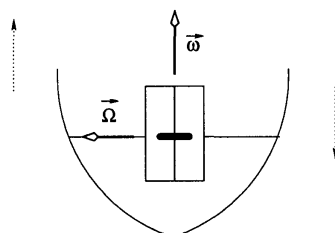
Odlíšným způsobem se chovají dvoustopá vozidla (např. [14]). Na obr. 10.9 je schematicky znázorněna řízená náprava automobilu, který zatáčí doleva (vektor rychlosti automobilu směřuje do papíru). Řídicí mechanismus působí na společnou osu kol momentem \vec{M} , jehož účinkem má levá část osy tendenci pohybovat se směrem vzhůru (tečkovaná šipka). Poněvadž je ale osa spojena s ostatními částmi vozu o značné hmotnosti, působí na ně nenulovou silou orientovanou vzhůru. Moment této síly vzhledem ke středu hmotnosti má tendenci překloupat automobil ven ze zatáčky.



Obr. 10.9. Kola automobilu zatáčejícího doleva

C) Stabilizátory kmitů

Setrvačnicků lze s výhodou použít ke stabilizaci kmitů lodí (např. [14]). Setrvačnick omezující boční kmity se montuje tak, aby se jeho osa mohla pohybovat pouze v rovině symetrie lodi. Pokud se účinkem vlnobití začíná loď naklánět například doprava (obr. 10.10, tečkované šipky), působí na setrvačnick, který se původně otáčí úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$, prostřednictvím vazeb moment sil směřující do papíru a osa setrvačnicku se tak začíná otáčet úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$. Na změnu pohybového stavu setrvačnicku reaguje pomocné zařízení, které otáčení osy urychluje (tj. zvyšuje velikost vektoru $\vec{\Omega}$). Setrvačnick potom v souladu s gyroskopickým efektem působí na loď prostřednictvím vazeb tak, že brání jejímu naklánění.



Obr. 10.10. Setrvačnick stabilizující kmity lodí

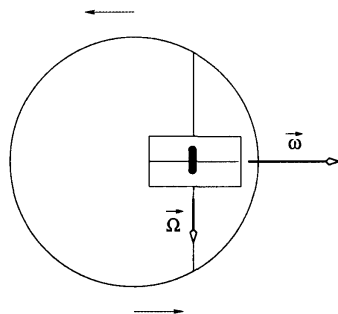
D) Setrvačnickový kompas

Setrvačnick může sloužit také jako kompas (tzv. *gyrokompas*). Abychom objasnili jeho chování, všimněme si následujícího modelového experimentu. Uvažme setrvačnick upevněný na vodorovné točně, která se otáčí vzhledem k Zemi konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}_0$. Setrvačnick nechť je k točně upevněn tak, aby se jeho osa symetrie mohla otáčet pouze kolem vodorovné osy. Předpokládejme, že v počátečním okamžiku leží osa symetrie setrvačnicku ve vodorovné rovině a setrvačnick se kolem ní otáčí úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ (obr. 10.11). Pohyb setrvačnicku popíšeme z hlediska neinerciální vztažné soustavy spojené s točnou i z hlediska vztažné soustavy spojené se Zemí, kterou budeme pro tento účel považovat za soustavu inerciální.

Z hlediska neinerciální vztažné soustavy spojené s točnou působí na každou část setrvačnicku Coriolisova fiktivní síla $\Delta \vec{F}_C^* = -2\Delta m (\vec{\omega}_0 \times \vec{v}')$, kde \vec{v}' je rychlost malé části setrvačnicku o hmotnosti Δm vzhledem k točně. Snadno se přesvědčíme, že výsledný moment Coriolisových sil působících na jednotlivé části setrvačnicku leží ve vodorovné rovině a je kolmý na osu symetrie setrvačnicku. Ve vodorovné rovině obecně leží i výsledný moment odstředivých fiktivních sil $\Delta \vec{F}_{od}^* = -\Delta m \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')$. Pohybu osy symetrie setrvačnicku ve směru výsledného momentu \vec{M}^* fiktivních sil ovšem brání vazby, které na ni působí jistými silami \vec{F}_1, \vec{F}_2 . Moment těchto sil pak vede k otáčení osy symetrie setrvačnicku kolem vodorovné osy proměnnou úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ (obr. 10.11). Osa symetrie setrvačnicku se tedy pohybuje zrychleným otáčivým pohybem kolem vodorovné osy až do okamžiku, kdy jsou vektory $\vec{\omega}$ a $\vec{\omega}_0$ rovnoběžné. Po překročení této polohy se změní orientace výsledného momentu \vec{M}^* fiktivních sil a otáčení setrvačnicku kolem vodorovné osy se zpomaluje. Výsledný pohyb setrvačnicku je tedy dán kmitáním jeho osy symetrie kolem směru určeného vektorem $\vec{\omega}_0$.

K vysvětlení pohybu setrvačnicku z hlediska (inerciální) vztažné soustavy spojené se Zemí použijeme druhou impulzovou větu (10.13). Protože má setrvačnick možnost pohybovat se kolem dvou přípustných navzájem

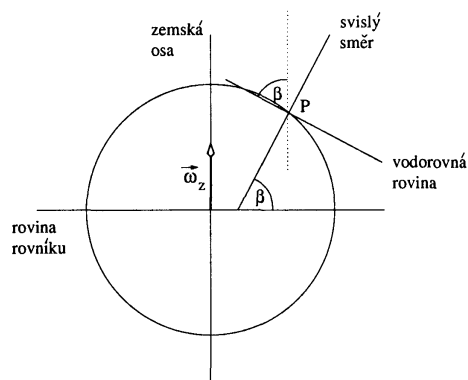
kolmých os úhlovými rychlostmi $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$ a současně se otáčí spolu s točnou konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}_0$, mění se v laboratorní vztažné soustavě vektor \vec{L} jeho momentu hybnosti. Kdyby bylo trvale $\vec{\Omega} \equiv \vec{0}$, ležela by změna vektoru momentu hybnosti setrvačnicku ve vodorovné rovině. Vzhledem ke konstrukci setrvačnicku však neexistují žádné vnější síly, jejichž moment by k takové změně vedl, a proto musí být obecně $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$. Za změnu výsledného momentu hybnosti setrvačnicku potom – s ohledem na jeho konstrukci – odpovídá moment vazebních sil ležících ve vodorovné rovině (síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , srv. předchozí odstavec). Setrvačnick se tedy v každém okamžiku otáčí tak (rychlostmi $\vec{\omega}$ a $\vec{\Omega}$), aby změna vektoru jeho momentu hybnosti měla směr výsledného momentu vazebních sil.



Obr. 10.11. Setrvačnick na točně (pohled shora, točna se pohybuje ve směru šipek)

Zobecněním popsaného experimentu na pozemské podmínky (neinerciální vztažná soustava spojená se Zemí) se ukáže, že osa symetrie setrvačnicku, jejíž pohyb je vázán na svislou rovinu, kmitá kolem směru určeného vektorem úhlové rychlosti Země $\vec{\omega}_z$. Rovnovážná poloha takového kmitavého pohybu tedy umožňuje stanovit úhel β (obr. 10.12), který svírá svislá přímka procházející daným místem P na povrchu Země s rovinou rovníku (srv. úlohu 20., oddíl 6.2).

Podobně se lze přesvědčit, že osa symetrie setrvačnicku, jejíž pohyb je vázán na vodorovnou rovinu, kmitá kolem severojižního směru (úloha 1.).



Obr. 10.12. Ke stanovení úhlu β (přímka určující rovnovážnou polohu osy setrvačnicku je vyznačena tečkovaně)

Úloha:

1. Vysvětlete, proč osa symetrie setrvačnicku, jejíž pohyb je vázán na vodorovnou rovinu, kmitá kolem severojižního směru.

Závěr

V práci byly diskutovány problémy mechaniky hmotného bodu a mechaniky tuhého tělesa. Obecné pojmy a závěry z dané oblasti, formulované v prvních kapitolách každé z částí, byly aplikovány na následující situace: pohyb sférického kyvadla, pohyb hmotného bodu v laboratorní vztažné soustavě a pohyb setrvačnicků. Tematika byla zpracována ve dvou úrovních: vysokoškolské, určené absolventům bakalářského studijního programu fyziky, a středoškolské.

Vysokoškolské zpracování látky spočívá v důsledné matematické formulaci veličin, zákonů i konkrétních problémů a v následné fyzikální interpretaci získaných výsledků. Přestože se jednotlivé pasáže v mnohém opírají o dostupnou literaturu, kopírují ji jen na místech nezbytně nutných. Je tomu tak zejména ve standardních definicích a dále pak v postupech při řešení některých dílčích úloh, kde by byly snahy o jiné přístupy zbytečné a „umělé“ (jde například o první kroky při řešení pohybu sférického kyvadla a pohybu těžkého setrvačnicku, o řešení pohybu bezmomentového setrvačnicku a o řešení pohybových rovnic hmotného bodu v laboratorní vztažné soustavě). Oproti citovaným učebnicím, které mají zpravidla širší záběr a nemohou proto zacházet příliš do detailů, je zde zvolen obecnější přístup k problémům, založený na maticovém formalizmu a na metodách matematické analýzy. Takto jsou mimo jiné zavedeny základní pojmy mechaniky tuhého tělesa a odvozeny závěry, které použité prameny (s výjimkou [26]) uvádějí buď jako hotová tvrzení s odkazem na podrobnější publikace (např. [9], [17]), nebo spoléhají – místy i neprávem – na intuici čtenáře (např. [11]).

V kapitolách zpracovaných na středoškolské úrovni se pak ukazuje, že elementárním způsobem je možné vyložit i zdánlivě složité věci, jimž se literatura odpovídající úrovň většinou vyhýbá (například pohyb hmotného bodu v otáčející se vztažné soustavě, namáhání osy otáčení tuhého tělesa, pohyb setrvačnicků a jejich praktické použití). Jediným matematickým požadavkem je přitom znalost vektorového počtu a pochopení limitních přechodů, které lze pro pokročilejší studenty nahradit diferenciálním počtem.

Práce má relativně široké zadání, a proto do ní nebylo možné zařadit vše, čemu by měla být věnována pozornost. I nadále zůstává celá řada problémů, které zasluhují důsledný matematický rozbor a následnou elementární – avšak fyzikálně správnou – interpretaci.

Literatura

- [1] BARFORD, N.C. *Mechanics*. London: Wiley, 1973.
- [2] BEDNAŘÍK, M.; ŠIROKÁ, M.; BUJOK, P. *Fyzika pro gymnázia. Mechanika*. 1. vyd. (dotisk). Praha: Prometheus, 1994.
- [3] BRDIČKA, M.; HLADÍK, A. *Teoretická mechanika*. 1. vyd. Praha: Academia, 1987.
- [4] BROŽ, J.; ROSKOVEC, V.; VALOUCH, M. *Fyzikální a matematické tabulky*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1980.
- [5] BURŠA, M.; PĚČ, K. *Tíhové pole a dynamika Země*. 1. vyd. Praha: Academia, 1988.
- [6] CZUDKOVÁ, L.; MUSILOVÁ, J. Physics in a lift and on a turntable. *Phys. Educ.* 2000, vol. 35, no. 1, p. 22-29.
- [7] CZUDKOVÁ, L.; MUSILOVÁ, J. The pendulum: a stumbling block of secondary school mechanics. *Phys. Educ.* 2000, vol. 35, no. 6, p. 428-435.
- [8] GOLDSTEIN, H. *Klassičeskaja mechanika*. 2. izd. Moskva: Nauka, 1975.
- [9] HAVRÁNEK, A. *Klasická mechanika I. Hmotný bod a tuhé těleso* (skripta). Praha: Univerzita Karlova, 2002.
- [10] HAVRÁNEK, A.; VÝBORNÝ, K.; PROUZA, M. Modelování obecného pohybu tuhého tělesa. *Mezinárodní konference Pedagogický software '98*. České Budějovice, 9.–10. 6. 1998, s. 70-72.
- [11] HORÁK, Z.; KRUPKA, F. *Fyzika*. 3. vyd. Praha: SNTL, 1976.
- [12] HORSKÝ, J.; NOVOTNÝ, J. *Teoretická mechanika* (skripta). 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1998.
- [13] HOSTINSKÝ, B. *Mechanika tuhých těles*. Praha: Jednota českoslov. matematiků a fyziků, 1924.
- [14] ILKOVIČ, D. *Fyzika*. 3. oprav. a dopl. vyd. Bratislava: SNTL, 1962.
- [15] KITTEL, CH.; KNIGHT, W.D; RUDERMAN, M.A.: *Mechanika. Berkleevskij kurs fiziki, tom I*. Moskva: Nauka, 1971.
- [16] KUČERA, B. *Základy mechaniky tuhých těles*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1921.
- [17] KVASNICA, J. a kol. *Mechanika*. 1. vyd. Praha: Academia, 1988.
- [18] LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. *Mechanics. Course of Theoretical Physics, Volume 1*. 3rd edn. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [19] MATHEWS, J. Coordinate-free rotation formalism. *Am. J. Phys.* 1976, vol. 44, no. 12, p. 1210.
- [20] MUSILOVÁ, J.; KRUPKA, D. *Lineární a multilineární algebra* (skripta). 1. vyd. Praha: SPN, 1989.
- [21] PÍCHA, J. *Gravimetrie*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1954.
- [22] PROUZA, M.; VÝBORNÝ, K.; HAVRÁNEK, A. Program na řešení obecného pohybu tuhého tělesa. *Mezinárodní konference Pedagogický software '98*. České Budějovice, 9.–10. 6. 1998, s. 73-75.
- [23] RANDA, M. Precese Země. *Školská fyzika*. 1998, roč. 5, č. 1, s. 86-92.
- [24] REKTORYS, K. a kol. *Přehled užití matematiky I*. 6. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1995.
- [25] SCHECK, F. *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [26] TRKAL, V. *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. 1. vyd. Praha: NČSAV, 1956.
- [27] VACHEK, J. a kol. *Fyzika pro I. ročník gymnázií*. 2. vyd. Praha: SPN, 1985.

Dodatky

I. Výpočet prvků matice $A = Q^T \bar{A} Q$ z oddílu 7.4

Určujeme prvky matice $A = Q^T \bar{A} Q$, kde

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}.$$

Přímé výpočty vedou k výsledkům

$$a_{11} = f_{31}^2 + (f_{11}^2 + f_{21}^2) \cos \varphi, \quad (\text{I.1})$$

$$a_{12} = f_{31}f_{32} + (f_{11}f_{12} + f_{21}f_{22}) \cos \varphi + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) \sin \varphi, \quad (\text{I.2})$$

$$a_{13} = f_{31}f_{33} + (f_{11}f_{13} + f_{21}f_{23}) \cos \varphi + (f_{11}f_{23} - f_{13}f_{21}) \sin \varphi, \quad (\text{I.3})$$

$$a_{21} = f_{31}f_{32} + (f_{11}f_{12} + f_{21}f_{22}) \cos \varphi + (f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22}) \sin \varphi, \quad (\text{I.4})$$

$$a_{22} = f_{32}^2 + (f_{12}^2 + f_{22}^2) \cos \varphi, \quad (\text{I.5})$$

$$a_{23} = f_{32}f_{33} + (f_{12}f_{13} + f_{22}f_{23}) \cos \varphi + (f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}) \sin \varphi, \quad (\text{I.6})$$

$$a_{31} = f_{31}f_{33} + (f_{11}f_{13} + f_{21}f_{23}) \cos \varphi + (f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}) \sin \varphi, \quad (\text{I.7})$$

$$a_{32} = f_{32}f_{33} + (f_{12}f_{13} + f_{22}f_{23}) \cos \varphi + (f_{13}f_{22} - f_{12}f_{23}) \sin \varphi, \quad (\text{I.8})$$

$$a_{33} = f_{33}^2 + (f_{13}^2 + f_{23}^2) \cos \varphi. \quad (\text{I.9})$$

Pro prvky matice Q však platí relace ortogonality (2.18), které mají po přeznačení a rozepsání tvar

$$f_{11}^2 + f_{21}^2 + f_{31}^2 = 1, \quad (\text{I.10})$$

$$f_{12}^2 + f_{22}^2 + f_{32}^2 = 1, \quad (\text{I.11})$$

$$f_{13}^2 + f_{23}^2 + f_{33}^2 = 1, \quad (\text{I.12})$$

$$f_{11}f_{12} + f_{21}f_{22} + f_{31}f_{32} = 0, \quad (\text{I.13})$$

$$f_{12}f_{13} + f_{22}f_{23} + f_{32}f_{33} = 0, \quad (\text{I.14})$$

$$f_{11}f_{13} + f_{21}f_{23} + f_{31}f_{33} = 0. \quad (\text{I.15})$$

Tyto relace nesou spolu s požadavkem pravotočivosti báze $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \rangle$, tj. s podmínkou $\det A = 1$, úplnou informaci o souvislostech mezi prvky matice Q . Lze z nich tedy odvodit i další zde potřebné vztahy

$$f_{31} = f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}, \quad (\text{I.16})$$

$$f_{32} = f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}, \quad (\text{I.17})$$

$$f_{33} = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}. \quad (\text{I.18})$$

Vzhledem ke zdlouhavosti výpočtu je ovšem výhodnější dospět k těmto vztahům přímo, jako ke složkám vektoru $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$.

Po dosazení (I.10) – (I.18) do (I.1) – (I.9) a přeznačení $\vec{f}_3 = \vec{\nu}$ dostáváme konečný výsledek

$$A = \begin{pmatrix} \nu_1^2(1-\cos \varphi) + \cos \varphi & \nu_1\nu_2(1-\cos \varphi) + \nu_3 \sin \varphi & \nu_1\nu_3(1-\cos \varphi) - \nu_2 \sin \varphi \\ \nu_1\nu_2(1-\cos \varphi) - \nu_3 \sin \varphi & \nu_2^2(1-\cos \varphi) + \cos \varphi & \nu_2\nu_3(1-\cos \varphi) + \nu_1 \sin \varphi \\ \nu_1\nu_3(1-\cos \varphi) + \nu_2 \sin \varphi & \nu_2\nu_3(1-\cos \varphi) - \nu_1 \sin \varphi & \nu_3^2(1-\cos \varphi) + \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{I.19})$$

II. Řešení soustavy rovnic pro ω'_1 , ω'_2 a ω'_3 z paragrafu 9.2 C)

Řešíme soustavu rovnic

$$(\omega'_1)^2 = \frac{(2J'_{33}E - L^2) - (J'_{33} - J'_{22}) J'_{22} (\omega'_2)^2}{J'_{11} (J'_{33} - J'_{11})}, \quad (\text{II.1})$$

$$(\omega'_3)^2 = \frac{(L^2 - 2J'_{11}E) - (J'_{22} - J'_{11}) J'_{22} (\omega'_2)^2}{J'_{33} (J'_{33} - J'_{11})}, \quad (\text{II.2})$$

$$\omega'_2 = \pm \frac{\sqrt{(2J'_{33}E - L^2) - (J'_{33} - J'_{22}) J'_{22} (\omega'_2)^2} \cdot \sqrt{(L^2 - 2J'_{11}E) - (J'_{22} - J'_{11}) J'_{22} (\omega'_2)^2}}{J'_{22} \sqrt{J'_{11} J'_{33}}} \quad (\text{II.3})$$

postupně pro případy

$$L^2 > 2J'_{22}E, \quad L^2 < 2J'_{22}E, \quad L^2 = 2J'_{22}E.$$

(a) $L^2 > 2J'_{22}E$

Vytknutím členů, které neobsahují $(\omega'_2)^2$, z výrazů pod odmocninami v (II.3) vychází

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{22})(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{11} J'_{22} J'_{33}}} \cdot \sqrt{1 - b^2 q^2} \cdot \sqrt{1 - q^2}, \quad (\text{II.4})$$

kde jsme označili

$$q = \sqrt{\frac{J'_{22}(J'_{33} - J'_{22})}{(2J'_{33}E - L^2)}} \omega'_2, \quad b = \sqrt{\frac{(J'_{22} - J'_{11})}{(J'_{33} - J'_{22})} \cdot \frac{(2J'_{33}E - L^2)}{(L^2 - 2J'_{11}E)}} \in (0, 1). \quad (\text{II.5})$$

Substitucí

$$\tau = \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{22})(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{11} J'_{22} J'_{33}}} t \quad (\text{II.6})$$

dostáváme z (II.4)

$$\pm \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{1 - b^2 q^2} \cdot \sqrt{1 - q^2}} = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau. \quad (\text{II.7})$$

Poslední zápis je nutno chápat tak, že integrál na levé straně rozdělíme na součet integrálů, jejichž meze leží v intervalech $[0, 1]$ a $[-1, 0]$, opatřených příslušnými znaménky. Výsledek integrace můžeme zapsat ve tvaru

$$q = +\text{sn}(\tau - \sigma), \quad (\text{II.8})$$

kde σ má význam integrační konstanty.

Funkce $x = \operatorname{sn} \mathcal{U}$ je inverzní funkce k funkci zadané následujícím způsobem (srv. [24]):

$$\begin{array}{llll}
 \dots & & \dots & \dots \\
 \mathcal{U}(x) = & + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} & \text{pro } \mathcal{U} \in [0, K], & x \in [0, 1], \\
 \mathcal{U}(x) = & K - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} & \text{pro } \mathcal{U} \in [K, 2K], & x \in [0, 1], \\
 \mathcal{U}(x) = & 2K - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} & \text{pro } \mathcal{U} \in [2K, 3K], & x \in [-1, 0], \\
 \mathcal{U}(x) = & 3K + \int_{-1}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} & \text{pro } \mathcal{U} \in [3K, 4K], & x \in [-1, 0], \\
 \mathcal{U}(x) = & 4K + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} & \text{pro } \mathcal{U} \in [4K, 5K], & x \in [0, 1], \\
 \dots & & \dots & \dots
 \end{array}$$

kde

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} \quad \text{pro } k \in (0, 1).$$

Vidíme, že funkce $\operatorname{sn} \mathcal{U}$ (tzv. *sinusamplituda* \mathcal{U}) má periodu $4K$. Integrál

$$F(k, \delta) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \delta}}, \quad k \in (0, 1), \quad x \in [0, 1], \quad \delta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

se nazývá *Legendreovým eliptickým integrálem prvního druhu s modulem k a amplitudou δ* . Tento integrál nelze vyjádřit explicitně a jeho hodnoty jsou v závislosti na k a δ tabelovány¹. Druhý z tvarů integrálu přitom získáme z prvního substitucí $x = \sin \delta$ (odtud také název „sinusamplituda“). Platí

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Prostřednictvím funkce $\operatorname{sn} \mathcal{U}$ lze definovat funkce $\operatorname{cn} \mathcal{U}$ (tzv. *kosinusamplituda* \mathcal{U}) a $\operatorname{dn} \mathcal{U}$ (tzv. *deltaamplituda* \mathcal{U}):

$$\begin{array}{ll}
 \operatorname{cn} \mathcal{U} = +\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \mathcal{U}} & \text{pro } u \in \dots \cup [-K, K] \cup [3K, 5K] \cup \dots, \\
 \operatorname{cn} \mathcal{U} = -\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \mathcal{U}} & \text{pro } u \in \dots \cup [K, 3K] \cup [5K, 7K] \cup \dots, \\
 \operatorname{dn} \mathcal{U} = +\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \mathcal{U}} & \text{pro } u \in \mathbf{R}.
 \end{array}$$

Z definic je patrné, že funkce $\operatorname{cn} \mathcal{U}$ má periodu $4K$, kdežto funkce $\operatorname{dn} \mathcal{U}$ má periodu $2K$. Dále platí

$$\operatorname{sn} \mathcal{U} \rightarrow \sin \mathcal{U}, \quad \operatorname{cn} \mathcal{U} \rightarrow \cos \mathcal{U}, \quad \operatorname{dn} \mathcal{U} \rightarrow 1 \quad \text{pro } k \rightarrow 0.$$

Vraťme se k výrazům (II.1) a (II.2). Označíme-li

$$p^2 = \frac{J'_{11} (J'_{33} - J'_{11})}{(2J'_{33} E - L^2)} (\omega'_1)^2, \quad r^2 = \frac{J'_{33} (J'_{33} - J'_{11})}{(L^2 - 2J'_{11} E)} (\omega'_3)^2, \quad (\text{II.9})$$

platí vzhledem k (II.1), (II.2) a (II.5)

$$p^2 = 1 - q^2, \quad r^2 = 1 - b^2 q^2. \quad (\text{II.10})$$

¹Legendreův eliptický integrál prvního druhu konverguje (tj. nabývá konečných hodnot) pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a všechna $k \in (0, 1)$. Pro $k \rightarrow 1$ je $F(k, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \infty$.

Je tedy

$$p = \pm \operatorname{cn}(\tau - \sigma), \quad (\text{II.11})$$

$$r = \pm \operatorname{dn}(\tau - \sigma), \quad (\text{II.12})$$

přičemž znaménka na pravých stranách obou vztahů jsou vzhledem k fyzikálnímu významu veličin p , q pevná a jsou určena počátečními podmínkami setrvačnicku. Zpětným dosazením za p , q a r dostáváme pro ω'_1 , ω'_2 a ω'_3 výsledky

$$\omega'_1 = \pm \sqrt{\frac{(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{11}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{cn}(\tau - \sigma), \quad (\text{II.13})$$

$$\omega'_2 = + \sqrt{\frac{(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{22}(J'_{33} - J'_{22})}} \operatorname{sn}(\tau - \sigma), \quad (\text{II.14})$$

$$\omega'_3 = \pm \sqrt{\frac{(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{33}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{dn}(\tau - \sigma). \quad (\text{II.15})$$

Dosazením těchto výsledků do Eulerových dynamických rovnic (9.1) – (9.3) se přesvědčíme, že na pravé straně vztahů pro ω'_1 a ω'_3 musí být vždy totéž znaménko², tedy buď v obou případech +, nebo v obou případech –.

(b) $L^2 < 2J'_{22}E$

Postupujeme podobně jako v předchozím případě. Vytknutím členů, které v (II.3) neobsahují $(\omega'_2)^2$, dostaneme

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{(J'_{22} - J'_{11})(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{11}J'_{22}J'_{33}}} \cdot \sqrt{1 - b^2q^2} \cdot \sqrt{1 - q^2}, \quad (\text{II.16})$$

kde jsme označili (srv. část **(a)**)

$$q = \sqrt{\frac{J'_{22}(J'_{22} - J'_{11})}{(L^2 - 2J'_{11}E)}} \omega'_2, \quad b = \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{22})}{(J'_{22} - J'_{11})} \cdot \frac{(L^2 - 2J'_{11}E)}{(2EJ'_{33} - L^2)}} \in (0, 1). \quad (\text{II.17})$$

Dále zavedme substituce

$$\tau = \sqrt{\frac{(J'_{22} - J'_{11})(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{11}J'_{22}J'_{33}}} t, \quad (\text{II.18})$$

$$p^2 = \frac{J'_{11}(J'_{33} - J'_{11})}{(2J'_{33}E - L^2)} (\omega'_1)^2, \quad r^2 = \frac{J'_{33}(J'_{33} - J'_{11})}{(L^2 - 2J'_{11}E)} (\omega'_3)^2. \quad (\text{II.19})$$

Vzhledem k (II.1), (II.2) a (II.17) potom platí

$$p^2 = 1 - b^2q^2, \quad r^2 = 1 - q^2 \quad (\text{II.20})$$

²Užitím definic, pravidla pro derivování složených funkcí a pravidla pro derivování inverzních funkcí dostáváme

$$\frac{d(\operatorname{sn} \mathcal{U})}{d\mathcal{U}} = \frac{d(\sin \delta)}{d\delta} \frac{d\delta}{d\mathcal{U}} = \cos \delta \left(\frac{d\mathcal{U}}{d\delta} \right)^{-1} = \cos \delta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \delta} = \operatorname{cn} \mathcal{U} \operatorname{dn} \mathcal{U}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{d(\operatorname{cn} \mathcal{U})}{d\mathcal{U}} &= \pm \frac{d(\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \mathcal{U}})}{d\mathcal{U}} = -\operatorname{sn} \mathcal{U} \operatorname{dn} \mathcal{U}, \\ \frac{d(\operatorname{dn} \mathcal{U})}{d\mathcal{U}} &= \frac{d(\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \mathcal{U}})}{d\mathcal{U}} = -k^2 \operatorname{sn} \mathcal{U} \operatorname{cn} \mathcal{U}. \end{aligned}$$

a celkem tedy

$$\omega'_1 = \pm \sqrt{\frac{(2J'_{33}E - L^2)}{J'_{11}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{dn}(\tau - \sigma), \quad (\text{II.21})$$

$$\omega'_2 = + \sqrt{\frac{(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{22}(J'_{22} - J'_{11})}} \operatorname{sn}(\tau - \sigma), \quad (\text{II.22})$$

$$\omega'_3 = \pm \sqrt{\frac{(L^2 - 2J'_{11}E)}{J'_{33}(J'_{33} - J'_{11})}} \operatorname{cn}(\tau - \sigma). \quad (\text{II.23})$$

Na pravé straně vztahů pro ω'_1 a ω'_3 musí být opět (se stejným zdůvodněním jako v části (a)) totéž znaménko, tedy buď v obou případech +, nebo v obou případech –.

(c) $L^2 = 2J'_{22}E$

Rovnice (II.1) – (II.3) mají pro $L^2 = 2EJ'_{22}$ jednoduchý tvar

$$(\omega'_1)^2 = \frac{(J'_{33} - J'_{22}) [2E - J'_{22}(\omega'_2)^2]}{(J'_{33} - J'_{11}) J'_{11}}, \quad (\text{II.24})$$

$$(\omega'_3)^2 = \frac{(J'_{22} - J'_{11}) [2E - J'_{22}(\omega'_2)^2]}{(J'_{33} - J'_{11}) J'_{33}}, \quad (\text{II.25})$$

$$\omega'_2 = \pm \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{22})(J'_{22} - J'_{11}) [2E - J'_{22}(\omega'_2)^2]}{J'_{11}J'_{22}J'_{33} \sqrt{J'_{22}}}}. \quad (\text{II.26})$$

Substitucí

$$\tau = \sqrt{\frac{(J'_{33} - J'_{22})(J'_{22} - J'_{11})}{J'_{11}J'_{22}J'_{33}}} t \quad (\text{II.27})$$

a úpravou dostáváme z (II.26)

$$\pm \int \frac{\sqrt{J'_{22}} d\omega'_2}{2E - J'_{22}(\omega'_2)^2} = \int d\tau. \quad (\text{II.28})$$

Převedením integrandu na levé straně posledního vztahu na parciální zlomky a následnou integrací získáme s uvážením

$$2E \geq J'_{22}(\omega'_2)^2 \implies \sqrt{2E} \geq \sqrt{J'_{22}}\omega'_2, \quad \sqrt{2E} \geq -\sqrt{J'_{22}}\omega'_2 \quad (\text{II.29})$$

výsledek

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{2E}} \ln \frac{\sqrt{2E} + \sqrt{J'_{22}}\omega'_2}{\sqrt{2E} - \sqrt{J'_{22}}\omega'_2} = \tau - \sigma, \quad (\text{II.30})$$

kde σ je integrační konstanta. Odtud po úpravě vychází

$$\omega'_2 = \sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}} \cdot \frac{\exp[\pm 2\sqrt{2E}(\tau - \sigma)] - 1}{\exp[\pm 2\sqrt{2E}(\tau - \sigma)] + 1} \in \left[-\sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}}, +\sqrt{\frac{2E}{J'_{22}}} \right]. \quad (\text{II.31})$$

Tento výsledek dosadíme do vztahů (II.24) a (II.25). Z druhé Eulerovy dynamické rovnice (9.2) je přitom patrné, že znaménko + v (II.31) odpovídá situaci, kdy mají složky ω'_1 a ω'_3 v počátečním okamžiku totéž znaménko, a – situaci, kdy jsou znaménka složek ω'_1 a ω'_3 opačná.

Životopis

Narodila jsem se 28. října 1973 v Brně.

Po základní školní docházce jsem v roce 1992 absolvovala čtyřleté všeobecně zaměřené gymnázium na Křenové ulici v Brně. V letech 1992–1997 jsem studovala obor Matematika – fyzika na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Diplomovou práci *Perrinova analýza Brownova pohybu* jsem zpracovala pod vedením doc. RNDr. Aleše Laciny, CSc., a obhájila na katedře obecné fyziky.

V roce 1997 jsem byla přijata k prezenčnímu doktorskému (dříve postgraduálnímu) studiu oboru Obecné otázky fyziky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Dizertační práci *Vybrané problémy mechaniky soustav hmotných bodů a tuhého tělesa* jsem zpracovala pod vedením doc. RNDr. Jany Musilové, CSc. Od září roku 1999 jsem zaměstnána na částečný úvazek jako odborná pracovnice katedry obecné fyziky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně. V říjnu roku 2001 jsem byla převedena do kombinované (dříve distanční) formy doktorského studia.

Přehled aktivit v průběhu doktorského studia:

A. Pedagogická činnost:

1. *Mechanika a molekulová fyzika* (dříve *Konzultační cvičení*), cvičení pro 1. ročník oboru Fyzika, od roku 1997.
2. *Mechanika a molekulová fyzika*, cvičení pro 1. ročník učitelských kombinací s fyzikou, od roku 1997.
3. *Úvod do fyziky mikrosvěta*, cvičení pro 2. ročník učitelských kombinací s fyzikou, od roku 1998 (v roce 2002 společně s druhým ročníkem oboru Fyzika).
4. *Atomová, jaderná a částicová fyzika*, cvičení pro 2. ročník oboru Fyzika, v roce 2000.
5. *Kvantová mechanika*, cvičení pro 3. ročník učitelských kombinací s fyzikou, od roku 2000.
6. *Termodynamika a statistická fyzika*, společné cvičení pro 3. a 4. ročník učitelských kombinací s fyzikou, v roce 2002.

B. Popularizační činnost:

1. Organizační vedení Korespondenčního semináře z fyziky pro studenty středních škol, od roku 2000.
2. Příprava sérií Korespondenčního semináře z fyziky: *Vztažné soustavy* (6. ročník, 1. série), *Fyzika ve starověkém Řecku* (6. ročník, 4. série), *Pohyb tuhého tělesa* (7. ročník, 1. série).
3. Každoroční (s výjimkou roku 2002) přednášky z různých oblastí fyziky na závěrečném soustředění úspěšných řešitelů Korespondenčního semináře z fyziky na Cikháji.
4. Školení úspěšných řešitelů Fyzikální olympiády kategorie D na soustředění v Jedovnicích. Témata *Pohyb sférického kyvadla* (18. června 1998), *Soustavy těles spojených vláknem* (19. června 1998), *Translační a rotační pohyb tuhého tělesa* (19. června 2000).
5. Školení účastníků celostátního kola Fyzikální olympiády kategorie A na gymnáziu tř. Kpt. Jaroše v Brně. Téma *Elektrina a magnetismus* (24. března 1998 a 16. března 1999).

C. Studijní pobyty:

1. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 5.–16. února 2001 (konzultace u doc. RNDr. Antonína Havránka, CSc.).
2. Fakulta fyziky a astronomie Univerzity ve Wroclawi, Kabinet vyučování fyziky, 21.–28. května 2001.

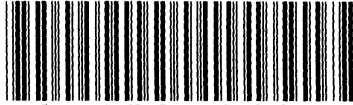
D. Jiné aktivity:

1. Účast na letní škole Natural Variational Principles (Differential Invariants, Natural Variational Principles in Physics). Levoča, Slovenská republika, 15.–19. srpna 1999.
2. Příspěvek *Some problems of the mechanics of system of many particles and continuum in teaching physics*, Week of doctoral students, section f12 (General problems of physics). MFF UK Praha, 12.–15. června 2001.
3. Účast na letní škole Global Analysis and Applications (Geometrical Structures in the Calculus of Variations). Prešov, Slovenská republika, 19.–23. srpna 2002.
4. Příspěvek *Rozumíme silám tření?*, 14. konference českých a slovenských fyziků, sekce 9. (Pedagogická fyzika). Plzeň, 9.–12. září 2002 (společně s doc. RNDr. Janou Musilovou, CSc.).

Seznam publikovaných prací

1. CZUDKOVÁ, L. Perrinova analýza Brownova pohybu jako první důkaz částicové struktury látek. *Školská fyzika*. 1998, roč. 5, č. 1, s. 9-17.
2. CZUDKOVÁ, L.; MUSILOVÁ, J. Physics in a lift and on a turntable. *Phys. Educ.* 2000, vol. 35, no. 1, p. 22-29.
3. CZUDKOVÁ, L.; MUSILOVÁ, J. The pendulum: a stumbling block of secondary school mechanics. *Phys. Educ.* 2000, vol. 35, no. 6, p. 428-435.
4. CZUDKOVÁ, L. Fyzika a dopravní nehody. *Školská fyzika*. 2000, roč. 6, č. 4, s. 18-24.
5. CZUDKOVÁ, L.; MUSILOVÁ, J. Rozumíme silám tření? *14. konference českých a slovenských fyziků*. Plzeň, 9.–12. 9. 2002 (v recenzním řízení).

Knihovna PŕF MU



3 1 4 5 3 1 5 6 0 5

