



**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**Přírodovědecká fakulta**

Jiří Bartoš

Demonstrační experimenty ve fyzice a jejich  
interpretace

Disertační práce

Školitelka: prof. RNDr. Jana Musilová, CSc.

Brno 2006



## Bibliografická identifikace

**Jméno a příjmení autora:** Jiří Bartoš

**Název disertační práce:** Demonstrační experimenty ve fyzice a jejich interpretace

**Studijní program:** Fyzika

**Studijní obor (směr):** Obecné otázky fyziky

**Školitelka:** prof. RNDr. Jana Musilová, CSc.

**Rok obhajoby:** 2006



## Abstrakt

Práce se zabývá vybraným souborem demonstračních experimentů z mechaniky, které jsou rozčleněny do tří kategorií: mechanika hmotných bodů, mechanika tuhých těles a pohyb těles v odporujícím prostředí. Do každé části jsou vybrány typické demonstrační experimenty, které jsou zpracovány do jednotné formy "karet", poskytujících experimentátorovi kompletní popis průběhu sestavení, provedení a zpracování experimentu. Důraz je zvláště kladen na důslednou matematickou a fyzikální interpretaci experimentů.



## **Poděkování**

Děkuji prof. RNDr. Janě Musilové, CSc., za pečlivé vedení mé práce, mnoho podnětných nápadů, diskuzí a připomínek. Dále děkuji prof. RNDr. Michalu Lencovi, PhD, doc. Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D., doc. RNDr. Leoši Dvořákovi, CSc., za poskytnuté konzultace. Poděkování patří i všem, kteří mě v práci podporovali a umožnili mi její vypracování.





# Obsah

<b>1 Úvod – demonstrační experiment</b>	<b>11</b>
1.1 Úskalí demonstračního experimentu . . . . .	11
1.2 Náležitosti demonstračního experimentu . . . . .	13
1.3 Cíl a struktura práce . . . . .	15
<b>2 Mechanika hmotných bodů</b>	<b>17</b>
2.1 Pádová brzda . . . . .	18
2.2 Gravitační katapult . . . . .	25
<b>3 Mechanika tuhých těles</b>	<b>33</b>
3.1 Cívka s nití . . . . .	34
3.2 Válec na nakloněné rovině . . . . .	41
3.3 Závit s kuličkou - model smyčky smrti . . . . .	46
<b>4 Pohyb těles v odporujícím prostředí</b>	<b>57</b>
4.1 Měření koeficientu odporu vzduchu . . . . .	58
4.2 Mechanický oscilátor s lineárním tlumením . . . . .	63
4.3 Mechanický oscilátor tlumený odporem vzduchu . . . . .	67
<b>5 Závěr</b>	<b>75</b>
<b>Literatura</b>	<b>77</b>



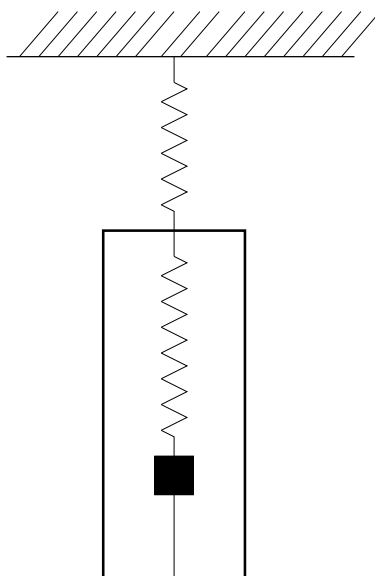
# Kapitola 1

## Úvod – demonstrační experiment

Experiment je nepostradatelnou součástí fyzikálního poznání. Stojí na počátku vzniku fyzikální teorie jako experiment vstupní při formulaci hypotéz, při jejím závěrečném testování pak jako experiment ověřovací. Při výkladu fyzikálních teorií na všech úrovních fyzikálního vzdělávání hraje důležitou roli především experiment demonstrační. Často však bývá demonstrační experiment bohužel chápán jako pouhá ukázka pro oživení výkladu a komentář k němu zůstává na kvalitativní úrovni. Není-li však kvalitativní výklad formulován na základě předchozí důkladné fyzikální analýzy a matematického zpracování problému, nese s sebou nejen riziko nepřesnosti, ale i nesprávnosti interpretace demonstrovaneho fyzikálního jevu.

### 1.1 Úskalí demonstračního experimentu

Jako typický příklad chybné interpretace demonstračního pokusu, o jejímž nebezpečí jsme se zmínili v úvodním odstavci, lze uvést následující oblíbený experiment:



Obdélníkový rámeček je zavěšen na pružině. Na horní základně rámečku je, rovněž na pružině, zavěšeno závaží. Závaží je k dolní základně rámečku připoutáno nití tak, aby pružina byla napjatá. Výchozím stavem soustavy je rovnováha. Po přepálení niti se soustava rozkmitá. Argument, že přepálením niti došlo pouze ke změně vnitřních sil v soustavě, bývá použit k formulaci závěru, že hybnost soustavy se zachovává. Protože hybnost byla ve výchozím stavu nulová, následuje závěr, že střed hmotnosti soustavy je stále v klidu. První fáze experimentu, těsně po přepálení niti, probíhá většinou tak, že při prvním zběžném pohledu tomuto tvrzení nasvědčuje. Teprve po delším pozorování průběhu děje je zřetelně vidět, že tvrzení není pravdivé, neboť ke změně směrů rychlostí rámečku a tělíška (body obratu) nedochází ve stejných okamžicích. Toto zjištění není nijak překvapivé, uvědomíme-li si, že při pokusu se mění i výslednice vnějších sil působících na soustavu. Konkrétně se uplatňuje změna silového působení pružiny, na níž visí rámeček. Tato změna je zjevná – pružina mění při kmitech svou délku. Pokud si ovšem experimentátor předchodí skutečnosti neuvědomí, popřípadě si nesestaví a nevyřeší soustavu pohybových rovnic těles soustavy, může pozorovaný děj chybně interpretovat jako demonstraci zákona zachování hybnosti. Zejména ukončí-li pokus předčasně, nemohou si ani přemýšlivější studenti všimnout "rozfázování" bodů obratu rámečku a závaží. (Ti méně přemýšliví si bez explicitního upozornění sami nevšimnou.)

Jednoduchý a názorný pokus tak může při chybném výkladu způsobit více škody než užítku. Právě pro svou jednoduchost a názornost se totiž snadno studentům vtiskne do paměti, bohužel i s chybným vysvětlením.

Jednoduchých a názorných pokusů, kterým při absenci důkladného rozboru hrozí obdobně chybná interpretace, je řada. Téměř každý pokus takové riziko přináší, neboť nikdy neprobíhá v ideálních podmínkách, při nichž platí některé fyzikální zákony. Například zákony zachování hybnosti, momentu hybnosti a mechanické energie formulované pro izolované soustavy v "pozemských" podmínkách de facto neplatí, neboť žádná soustava v tíhovém poli Země a v odporujícím vzduchu není izolovaná. Nejjednodušší zákonitosti proudění kapalin, jejichž pochopení je ve fyzikálním vzdělávání na středoškolské nebo základní univerzitní úrovni ještě schůdné, platí pro ustálené a laminární proudění, vyžadují tedy opět předpoklady, které nejsou při reálných demonstračních experimentech splněny. A to zatím hovoříme pouze o pokusech z klasické mechaniky, jejichž jevy jsou snadno přístupné přímému pozorování a odhalení případných interpretačních chyb je mnohem snazší než v jiných oblastech fyziky.

Dobry demonstrační experiment tedy musí být podložen kvalifikovaným fyzikálním rozбором, přiměřeným matematickým zpracováním a následnou fyzikální interpretací. Teprve poté má smysl formulovat kvalitativní výklad, popřípadě elementární výklad odpovídající danému typu fyzikálního vzdělávání a fyzikální a matematické vybavenosti studentů.

## 1.2 Náležitosti demonstračního experimentu

Vzhledem k nezastupitelné a svým způsobem rozhodující úloze demonstračního experimentu pro pochopení fyzikálních zákonitostí je třeba pečlivě promýšlet jednotlivé etapy jeho přípravy. Za základní požadavky kladené na demonstrační experiment lze považovat následující: Demonstrační experiment má být

- uspořádaný tak, aby demonstrováný jev výrazně převažoval nad jevy vedlejšími, nelze-li je eliminovat zcela,
- realizovaný s co nejjednodušším experimentálním zařízením neobsahujícím (je-li to možné) "černé skříňky",
- názorný, průhledný, jednoduchý a reprodukovatelný,
- snadno dostupný, včetně dostupnosti finanční,
- podložený důkladným fyzikálním rozбором, matematickým zpracováním a následnou fyzikální interpretací.

Při přípravě demonstračního experimentu je vhodné postupovat podle následujícího schématu, s uvážením předchozích požadavků:

- specifikovat fyzikální zákon, který má být experimentem demonstrován a zvolit vhodné jevy, pomocí něhož bude zákon prokazován,
- specifikovat vedlejší jevy, které mohou mít na průběh experimentu vliv,
- zvolit konkrétní způsob realizace experimentu s ohledem na technické zázemí (zařízení, pomůcky, apod),
- pro zvolený způsob realizace experimentu kvantitativně odhadnout vliv vedlejších jevů z hlediska fyzikálního zákona, který má být demonstrován, a tyto jevy eliminovat či minimalizovat,
- provést fyzikální rozbor experimentu, zvolit eventuelní aproximativní postupy,
- formulovat a řešit problém matematicky (analyticky či numericky),
- na základě rozboru řešení zvolit nejvhodnější parametry experimentu (z hlediska průkaznosti sledovaného jevu a z hlediska minimalizace jevů vedlejších),
- realizovat experiment a porovnat jeho výsledky s teoretickým řešením,
- interpretovat výsledky experimentu,
- formulovat elementární kvantitativní resp. kvalitativní výklad přizpůsobený dané úrovni fyzikálního vzdělávání, tj. fyzikálnímu a matematickému zázemí studentů.

Je samozřejmostí, že hlavním kritériem vhodnosti konkrétního typu demonstračního experimentu pro vlastní výuku fyziky, jejímž cílem má být hlubší pochopení podstaty jevů, je fyzikální a matematická správnost výkladu a jeho přiměřenost možnostem posluchačů. Efektní experimenty se složitým fyzikálním a matematickým pozadím mohou být používány pouze jako motivační, avšak velmi střídavě a vždy s patřičným komentářem.

### 1.3 Cíl a struktura práce

V této disertační práci je předložen rozbor několika demonstračních experimentů z mechaniky s výkladem na úrovni základního kurzu bakalářského studia fyziky. Mechanika byla zvolena jednak jako vstupní disciplína základního fyzikálního kurzu, jejímž prostřednictvím se studenti setkávají s vysokoškolskou fyzikou vůbec poprvé, jednak pro svou názornost a přístupnost přímému pozorování. S respektováním požadavků na demonstrační experiment uvedených v předchozím odstavci jsou zpracovány typické pokusy ze tří základních oblastí klasické mechaniky: mechanika hmotných bodů, mechanika tuhých těles, pohyb těles v odporujícím prostředí. Těmto oblastem také odpovídá členění práce do kapitol. Jednotlivé experimenty jsou zpracovány formou samostatných odstavců v kapitolách. Obrázky jsou číslovány odděleně v každém odstavci, počínaje vždy číslem 1.

Cílem disertační práce také bylo dát současně základ vzniku kartotéky demonstračních experimentů pro výuku předmětů F1030 a F1040 "Mechanika a molekulová fyzika", povinných v bakalářských programech studia fyziky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. K tomu byla zvolena prezentace jednotlivých experimentů formou karet, které obsahují potřebné údaje pro samotnou realizaci experimentů, ale i jejich fyzikální a matematické řešení a příslušné závěry. Fyzikální a matematický výklad, určený učiteli či demonstrátorovi, má tak zcela cíleně zvolenou stručnou a přehlednou formu, bez zbytečných slovních komentářů. Ukázky výkladu použitelného pro přímou fyzikální výuku jsou však uvedeny v příloze. Jsou jimi práce, které byly publikovány v jediném evropském časopisu s impaktním faktorem, který uveřejňuje práce z oblasti didaktiky vysokoškolské fyziky – *European Journal of Physics*.

Karty demonstračních experimentů mají následující jednotnou strukturu:

- charakteristika problematiky
- fyzikální zákony, které má experiment demonstrovat
- pomůcky a zařízení (dostupné ve sbírkách fyzikální sekce PŘF MU)
- popis experimentu
- číselné parametry experimentu
- fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení
- výsledky a závěry

V souhrnu jsou takto zpracovány dva experimenty z mechaniky hmotných bodů (pádová brzda a gravitační katapult), tři experimenty z mechaniky tuhých těles (cívka s nití, válec na nakloněné rovině a závit s kuličkou – model smyčky smrti) a tři experimenty popisující pohyb těles v odporujícím prostředí (měření koeficientu odporu vzduchu pomocí digitální fotografie, mechanický oscilátor s lineárním tlumením a mechanický oscilátor tlumený odporem vzduchu).



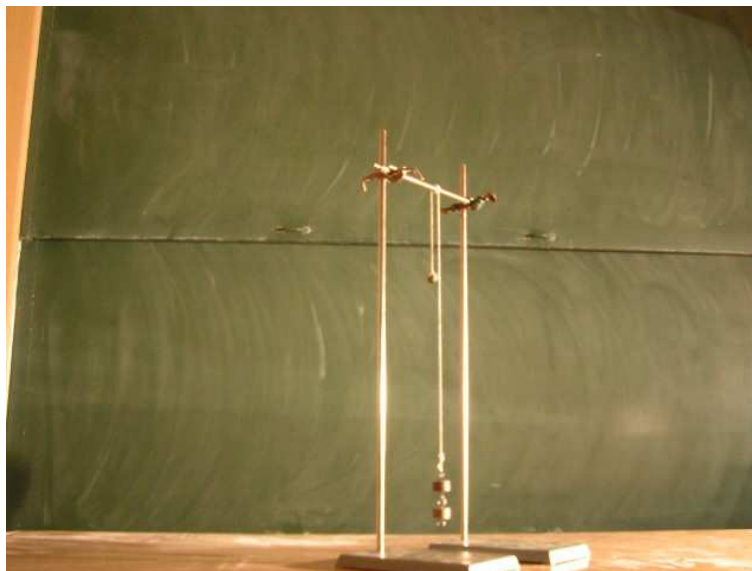
## Kapitola 2

# Mechanika hmotných bodů

V této kapitole uvádíme dva demonstrační experimenty z oblasti mechaniky soustav hmotných bodů, pod názvy "Pádová brzda" a "Gravitační katapult". Jejich cílem je demonstrovat platnost pohybových rovnic soustavy částic a jejich řešení. Sestavení pohybových rovnic (formulace druhého Newtonova zákona) pro jednotlivé hmotné body soustavy a zápis eventuálních vazebních podmínek není obtížným problémem. Diferenciální rovnice, k nimž tato formulace vede, jsou však nelineární a je třeba je řešit numericky [2]. Numerický přístup také lépe odpovídá matematickému zázemí začínajících studentů bakalářského programu fyziky. Grafické výstupy numerického řešení dávají dobrou názornou představu o průběhu experimentu a možnost srovnání se skutečností.

## 2.1 Pádová brzda

Pádová brzda je zařízení, které přesvědčivě demonstruje významný vliv třecích sil na pokles rychlosti tělesa připevněného na laně, které se navíjí na osu. Výstižným modelem třecích sil je v tomto případě Eulerův silový zákon, podle kterého třecí síla exponenciálně narůstá s úhlem odpovídajícím ovinutí lana kolem osy [1].



obr. 1 Pádová brzda

### Charakteristika:

Studium pohybu soustavy dvou těles výrazně rozdílných hmotností spojených provazem, který se navíjí na osu (viz obr. 1 a 2). Sestavení pohybových rovnic jednotlivých těles soustavy a jejich numerické řešení s grafickými výstupy.

### Fyzikální zákony:

Newtonovy zákony, Eulerův silový zákon pro tření.

**Pomůcky a zařízení:**

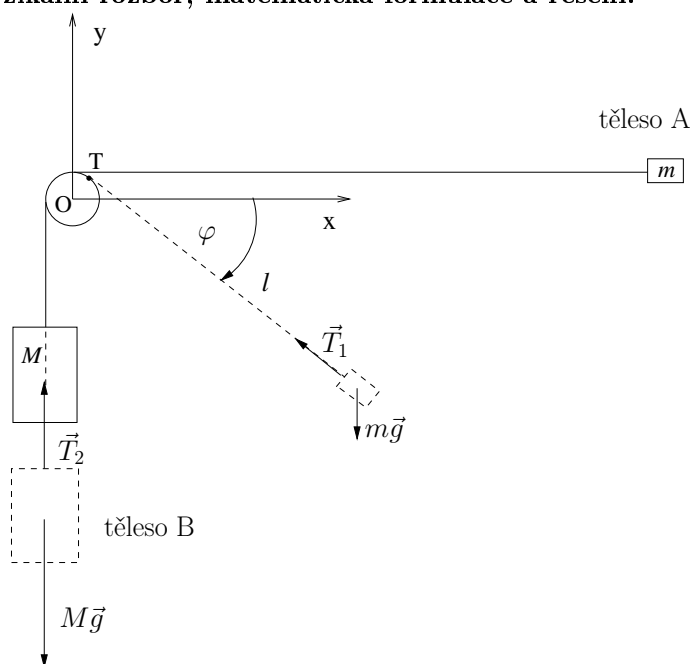
Dvě tělesa (závaží) o hmotnostech  $m$  a  $M$ , kde  $\frac{m}{M}$  je v rozmezí  $\frac{1}{50}$  až  $\frac{1}{10}$ ; provaz na spojení těles; tyč (lze použít i prst).

**Popis experimentu:**

Na začátku uspořádáme experiment podle obr. 2 a uvolníme těleso A. Při jeho pohybu se provaz navíjí na osu, těleso B klesá. Po velmi krátké době dojde k zastavení pohybu tělesa B a navinutí zbytku provazu na osu.

**Číselné parametry experimentu:**

$M = 0,1$  kg;  $m = 0,01$  kg;  $r = 0,01$  m;  $l_0 = 1$  m

**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:**

obr. 2 Schéma pádové brzdy

$O$	...	počátek soustavy souřadnic
$m\vec{g}$	...	tíhová síla působící na těleso A
$\vec{T}_1$	...	tahová síla niti působící na těleso A
$M\vec{g}$	...	tíhová síla působící na těleso B
$\vec{T}_2$	...	tahová síla niti působící na těleso B
$l$	...	vzdálenost tělesa A od bodu dotyku T provazu s osou
$r$	...	poloměr osy
$\varphi$	...	úhel otočení tělesa A kolem osy

Označení souřadnic těles A a B a vazební podmínky:

Soustava má dva stupně volnosti, příslušné zobecněné souřadnice jsou  $\varphi(t)$  a  $l(t)$ . Kartézské souřadnice těles vyjádříme pomocí zobecněných souřadnic.

$Y$	— y-ová souřadnice tělesa B
$x$	— x-ová souřadnice tělesa A
$y$	— y-ová souřadnice tělesa A
$f$	— koeficient dynamického ( $f_d$ ), resp. statického ( $f_s$ ) tření
$l_0$	— počáteční délka závěsu tělesa A

$$Y = l_0 - l - r\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$x = r \sin \varphi + l \cos \varphi$$

$$y = r \cos \varphi - l \sin \varphi$$

Druhý Newtonův zákon:

$$M\ddot{Y} = -Mg + T_2 \quad (2.1)$$

$$m\ddot{x} = -T_1 \cos \varphi \quad (2.2)$$

$$m\ddot{y} = -mg + T_1 \sin \varphi \quad (2.3)$$

Vztah mezi  $T_1$  a  $T_2$  (silový zákon — Eulerův vzorec):

$$T_2 = T_1 e^{f\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \quad (2.4)$$

Dvojitým zderivováním vazebních podmínek získáme zrychlení  $\ddot{Y}$ ,  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  v závislosti na funkcích  $\varphi(t)$  a  $l(t)$  a jejich derivacích:

$$\ddot{Y} = -(\ddot{l} + r\ddot{\varphi}) \quad (2.5)$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{l} \cos \varphi - 2\dot{l}\dot{\varphi} \sin \varphi - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (2.6)$$

$$\ddot{y} = -r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \ddot{l} \sin \varphi - 2\dot{l}\dot{\varphi} \cos \varphi - l\ddot{\varphi} \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (2.7)$$

Další úpravy jsou následující: Vynásobení rovnice (2.6)  $\cos \varphi$ , rovnice (2.7)  $\sin \varphi$  a odečtení, vynásobení rovnice (2.6)  $\sin \varphi$ , rovnice (2.7)  $\cos \varphi$  a sečtení. Dostáváme

$$\begin{aligned} \ddot{x} \cos \varphi - \ddot{y} \sin \varphi &= r\ddot{\varphi} + \ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 \\ \ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi &= -r\dot{\varphi}^2 - 2\dot{l}\dot{\varphi} - l\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

S využitím vztahů (2.1) až (2.5) získáme soustavu diferenciálních rovnic pro náš systém:

$$r\dot{\varphi}^2 + 2\dot{l}\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi} - g \cos \varphi = 0 \quad (2.8)$$

$$m(r\ddot{\varphi} + \ddot{l} - l\dot{\varphi}^2) + e^{-f_d(\frac{\pi}{2} + \varphi)} (Mg - M(\ddot{l} + r\ddot{\varphi})) - mg \sin \varphi = 0 \quad (2.9)$$

Jestliže numericky vyřešíme soustavu rovnic (2.8) a (2.9), můžeme získat různé typy grafických výstupů, z nichž nejnázornější je souvislost  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice tělesa A ukazující přímo rovinnou křivku, po níž se těleso A pohybuje. (Pro použité parametry experimentu,  $m = 0,01$  kg,  $M = 0,1$  kg a  $l_0 = 1$  m, je tato křivka znázorněna na obr. 3.)

V jistém okamžiku  $t$  ( $t = 0,45$  s podle obr. 3) se zastaví pohyb tělesa B ( $\dot{Y} = 0 \Rightarrow T_2 = -Mg$ ) a přestanou platit rovnice (2.8) a (2.9). Dále se bude pohybovat pouze těleso A. Provaz se bude navíjet na osu a délka závěsu  $l$  tělesa A se bude zkracovat. Jedná se o situaci, kdy se namísto dynamického tření uplatňuje tření statické. Aby byl splněn tento předpoklad, je nutné, aby byla v průběhu dalšího děje splněna podmínka:

$$T_2 \leq T_1 e^{f_s(\frac{\pi}{2} + \varphi)}, \quad \text{tj.}$$

$$0 \leq T_1 e^{f_s(\frac{\pi}{2} + \varphi)} - Mg \quad (2.10)$$

Pohybové rovnice tělesa A mají stále tvar (2.2) a (2.3).

Pomocí těchto pohybových rovnic a vztahů, které jsme získali úpravou (2.6) a (2.7), dostaneme pro funkce  $l(t)$  a  $\varphi(t)$ :

$$m(r\ddot{\varphi} + \ddot{l} - l\dot{\varphi}^2) = mg \sin \varphi - T_1 \quad (2.11)$$

$$r\dot{\varphi}^2 + 2\dot{l}\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi} = g \cos \varphi \quad (2.12)$$

Uvědomme si, že tyto vztahy odpovídají rovnicím (2.8) a (2.9). Jako neznámá v nich však zůstává velikost tahové síly  $T_1$ , pro niž nyní nemůžeme použít silový zákon (2.4). Vzhledem k tomu, že  $Y = konst$ , platí:

$$l = L_0 - r\varphi,$$

kde  $L_0$  je délka závěsu tělesa A v okamžiku, kdy se zastaví těleso B. Platí

$$\dot{l} = -r\dot{\varphi}, \quad \ddot{l} = -r\ddot{\varphi}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnic (2.11) a (2.12), můžeme rovnice přepsat do tvaru:

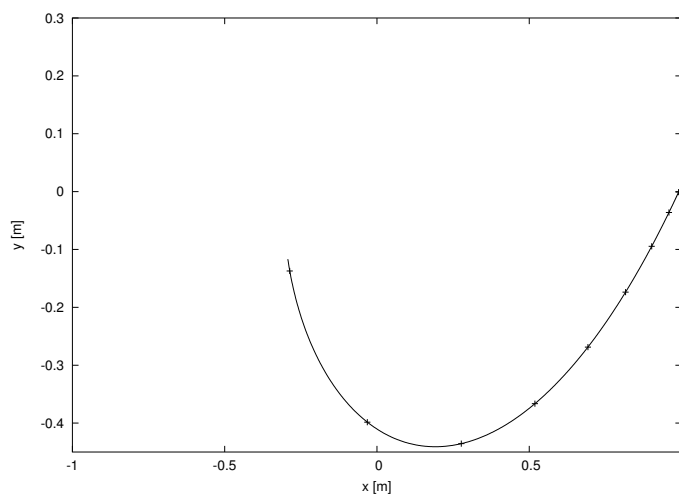
$$-m(L_0 - r\varphi)\dot{\varphi}^2 = mg \sin \varphi - T_1 \quad (2.13)$$

$$(L_0 - r\varphi)\ddot{\varphi} - r\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi = 0 \quad (2.14)$$

Řešením rovnice (2.14) získáme přímo trajektorii tělesa A, rovnice (2.13) slouží ke kontrole podmínky (2.10).

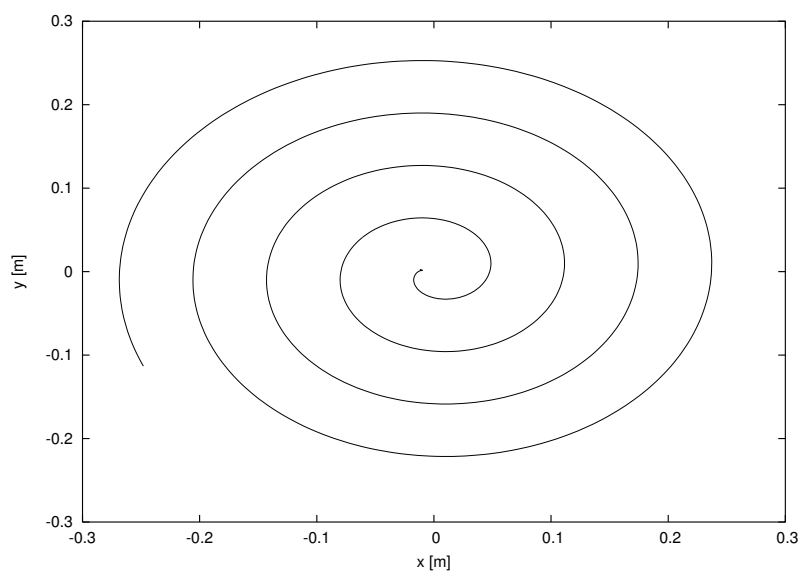
### Výsledky a závěry:

Na obr. 3 je v kartézské soustavě souřadnic znázorněna křivka, po které se pohybuje těleso A do okamžiku zastavení tělesa B. Křivku získáme využitím řešení soustavy rovnic (2.8) a (2.9).



obr. 3 Pohyb tělesa A do okamžiku zastavení tělesa B

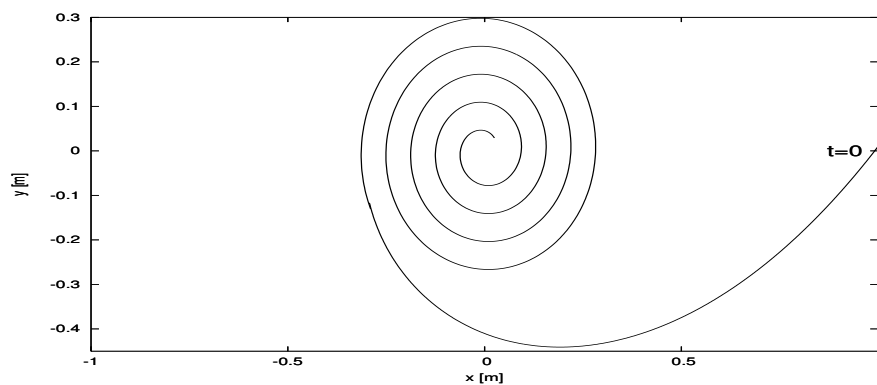
Zvýrazněné body na křivce rozdělují trajektorii na 8 úseků různé délky, z nichž každý odpovídá stejnému časovému intervalu. Celkový čas je  $t = 0,45$  s. Z rozložení těchto bodů na křivce můžeme usuzovat na rychlost pohybu tělesa A v jednotlivých úsecích. V okamžiku  $t = 0,45$  s se již těleso B zastaví a platí soustava rovnic (2.13) a (2.14). Její řešení, opět v kartézských souřadnicích  $x$  a  $y$ , je na obr. 4.



obr. 4 Pohyb tělesa A po zastavení tělesa B

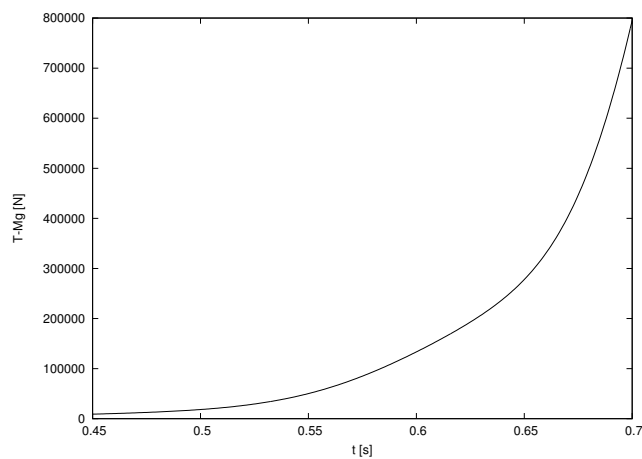
Podle očekávání se jedná o spirálu, jejíž okamžitý poloměr se zmenšuje navýšením provazu na osu.

Spojíme-li do jednoho grafu obr. 3 a obr. 4, získáme celou křivku, po níž se pohybuje těleso A od okamžiku, kdy započalo měření (obr. 5).



obr. 5 Pohyb tělesa A

Nyní ověříme, je-li v každém okamžiku splněna podmínka (2.10). Znázorníme proto pravou stranu podmínky (2.10) v závislosti na čase od okamžiku, kdy se zastaví pohyb tělesa B (v grafu na obr. 3 okamžik  $t = 0,45$  s):

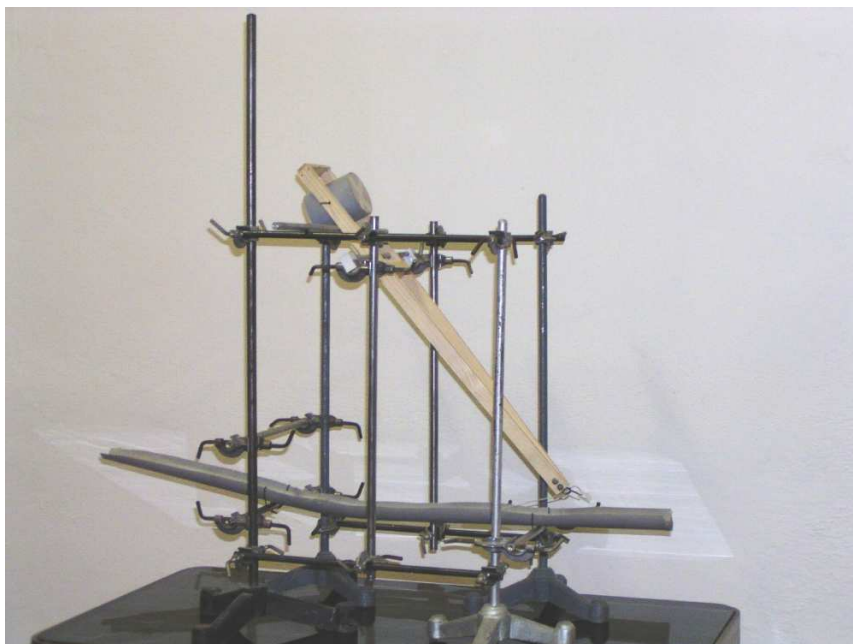
obr. 6 Ověření podmínky pro statické tření ( $T = T_1 e^{f_s(\frac{\pi}{2} + \varphi)}$ )

Z obr. 6 je vidět, že podmínka (2.10) je splněna po celou dobu děje.



## 2.2 Gravitační katapult

Katapulty různé konstrukce jsou známy již od starověku. Jejich největší sláva se podle historických filmů datuje do období existence Římské říše. Zdá se však, že Římané nepoužívali nejefektivnější druhy katapultů. Jejich stroje byly obvykle založeny na principu "přeměny" potenciální energie pružnosti v kinetickou energii katapultovaného tělesa. Z hlediska konstrukce i z hlediska nastavení na optimální výkon byly ovšem velice jednoduché a nedokonalé. V tomto příspěvku půjde o konstrukci poněkud složitější, ale zato efektivnější. Zvláštností této konstrukce je, že byla užívána k dobývání opevněných měst zdánlivě méně vyspělým národem, a to mongolskými kmeny při obsazování středního východu v 12. až 13. století. Přibližně v téže době se katapult objevoval jako bojový prostředek i v Evropě, zvláště ve Francii. Žádnému ze jmenovaných národů však nepatří prvenství v užití tohoto stroje. TREBUCHET, jak se tomuto katapultu ve světě říká, je vynálezem čínským z doby přibližně 300 let př.n.l.



obr. 1 Gravitační katapult

**Charakteristika:**

Sestavení pohybových rovnic a jejich řešení pro gravitační katapult. Určení jeho teoretické a reálné účinnosti. Návod, jak katapult snadno sestavit z běžných laboratorních pomůcek.

**Fyzikální zákony:**

Newtonovy zákony, momentová věta pro hmotný bod (vyjádření průmětu derivace momentu hybnosti hmotného bodu do směru osy rotace pomocí odpovídající složky výsledného momentu sil působících na tento hmotný bod)

**Pomůcky a zařízení:**

4 laboratorní stojany; 16 pravoúhlých laboratorních svorek; kovové tyče; vodící dráha (novodurová trubka rozříznutá podélně napůl); rameno katapultu se závažím a háčkem (viz obr. 1).

**Popis experimentu:**

Náš katapult je principiálně založen na "přeměně" potenciální tíhové energie těžkého tělesa v kinetickou energii tělesa lehčího. Velmi přesvědčivě tak dokumentuje zákon zachování mechanické energie. Poměr hmotností těles  $\frac{\text{těžké}}{\text{lehké}} = \frac{M}{m}$  se pohybuje v rozmezí 20 až 100. V našem případě se budeme zabývat zmenšeným modelem s poměrem hmotností 100 a hmotností těžkého závaží 1 kg.

Střed hmotnosti těžkého tělesa opisuje část kružnice se středem v bodě O. Pohyb katapultovaného tělesa rozdělíme do tří fází. V první fázi se toto těleso pohybuje po podložce směrem vzad vzhledem ke směru výstřelu, tj. pouze ve směru osy  $x$ . V druhé fázi se oddělí od podložky a spojené pomocí vlákna s koncem ramene vykonává pohyb po trajektorii, jejímž numerickým popisem se budeme později zabývat, a v jistém okamžiku se odpojí i s vláknem od ramene katapultu. Třetí fáze je pouze otázkou vnější balistiky, v našem případě šikmého vrhu.

**Číselné parametry experimentu:**

Rozměry katapultu (obr. 2):

$$a=0,093 \text{ m}; b=0,407 \text{ m}; l=0,301 \text{ m}; h=0,350 \text{ m}$$

Hmotnosti těles:

$$M = 1 \text{ kg}; m = 0,01 \text{ kg}$$

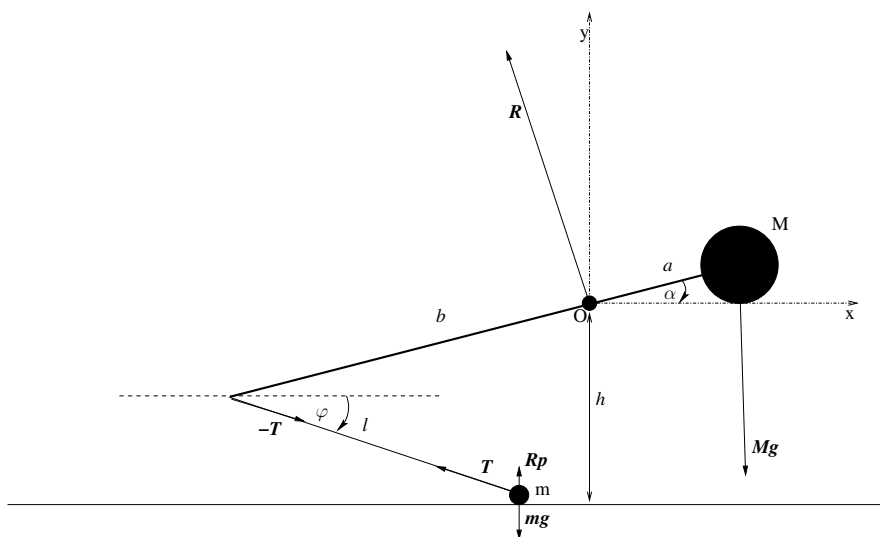
**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:**

Pro zjednodušení výpočtů přijmeme tyto předpoklady (viz obr. 2):

- $O$  ... pevná osa
- $M$  ... těžké závaží (olověné broky) spolu s nehmotnou tuhou tyčí
- $m$  ... katapultované těleso na vlákně (nepružném, nehmotném)
- $\vec{g}$  ... tíhové zrychlení
- $\varphi, \alpha$  ... zobecněné souřadnice
- $\vec{T}$  ... tahová síla ve vlákně
- $m\vec{g}$  ... tíhová síla působící na katapultované těleso
- $M\vec{g}$  ... tíhová síla působící na těžké těleso
- $\vec{R}$  ... síla působící na osu
- $\vec{R}_P$  ... síla, jíž působí na katapultované těleso podložka

Souřadnice těžkého tělesa budeme označovat  $X, Y$ , souřadnice katapultovaného tělesa  $x, y$ .

Sestavíme nyní pohybové rovnice pro tělesa katapultu v jednotlivých fázích pohybu.

**(a) První fáze:**

obr. 2 Schéma gravitačního katapultu – první fáze

Kartézské souřadnice těles  $x, y$ , a  $X, Y$  vyjádříme pomocí zobecněných souřadnic  $\alpha, \varphi$ .

$$\begin{aligned} X &= a \cos \alpha \\ Y &= -a \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} x &= -b \cos \alpha + l \cos \varphi \\ y &= b \sin \alpha - l \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zároveň platí vazební podmínka

$$b \sin \alpha - l \sin \varphi = -h,$$

neboť v první fázi se katapultované těleso pohybuje pouze v ose  $x$ . První a druhé derivace souřadnic  $x, y, X, Y$  zapíšeme pomocí zobecněných souřadnic a jejich derivací takto:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -a\dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{Y} &= -a\dot{\alpha} \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -a\ddot{\alpha} \sin \alpha - a\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ \ddot{Y} &= -a\ddot{\alpha} \cos \alpha + a\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= b\dot{\alpha} \sin \alpha - l\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= b\dot{\alpha} \cos \alpha - l\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= b\ddot{\alpha} \sin \alpha + b\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ \ddot{y} &= b\ddot{\alpha} \cos \alpha - b\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - l\ddot{\varphi} \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pohybové rovnice:

Druhý Newtonův zákon pro katapultované těleso:

$$m\ddot{x} = -T \cos \varphi$$

$$m\ddot{y} = -mg + T \sin \varphi + R_P$$

Vazební podmínka (v první fázi se katapultované těleso pohybuje podél osy  $x$ ):

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow R_P = mg - T \sin \varphi \quad (2.21)$$

Můžeme tedy psát:

$$T = -\frac{m}{\cos \varphi} (b\ddot{\alpha} \sin \alpha + b\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (2.22)$$

Momentová věta pro "těžké" těleso (vzhledem k ose rotace jdoucí bodem  $O$ ):

$$Ma^2\ddot{\alpha} = Mga \cos \alpha - Tb \sin(\varphi - \alpha) \quad (2.23)$$

Vazební podmínka pro úhly  $\alpha$  a  $\varphi$ :

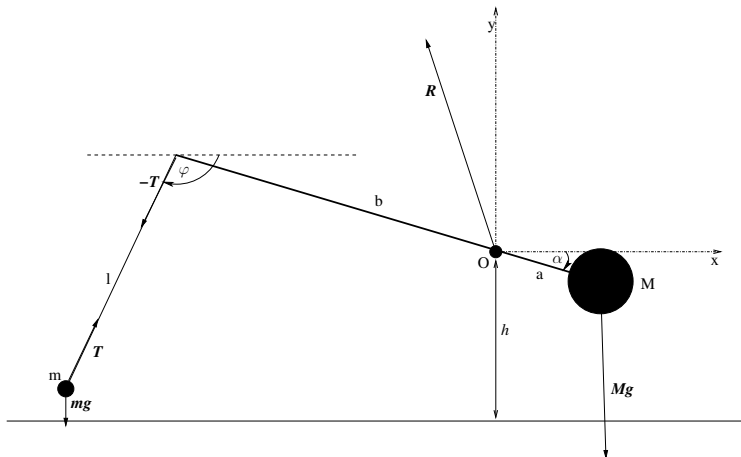
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{l}{b} \sin \varphi + \frac{h}{b} \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{l}{b} \sin \varphi - \frac{h}{b}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

V dalším se ukáže, že diskuse týkající se znaménka pod odmocninou ve vztazích (2.24) je zbytečná, neboť při našem experimentálním uspořádání nedojde k situaci, kdy je výraz pod odmocninou záporný.

Dosazením vztahu (2.22) do rovnice (2.23) a využitím vazebních podmínek (2.24) dostaneme pohybovou rovnici, jejímž numerickým řešením získáme všechny informace o pohybu katapultu v první fázi pohybu.

Využitím vazební podmínky (2.21) najdeme i okamžik, kdy se katapultované těleso oddělí od podložky ( $R_P = 0$ ), tj. konec první fáze pohybu katapultu.

**(b) Druhá fáze** (viz obr. 3):



obr. 3 Schéma gravitačního katapultu – druhá fáze

Druhý Newtonův zákon pro katapultované těleso:

$$m\ddot{x} = -T \cos \varphi$$

$$m\ddot{y} = -mg + T \sin \varphi$$

Postupně vynásobíme první rovnici  $\sin \varphi$ , druhou  $\cos \varphi$  a sečteme, poté první rovnici vynásobíme  $\cos \varphi$ , druhou  $\sin \varphi$  a odečteme. Výrazy  $\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi$  a  $\ddot{x} \cos \varphi - \ddot{y} \sin \varphi$  vyjádříme také ze vztahů (2.20). Dostaneme:

$$b\dot{\alpha}^2 \sin(\varphi - \alpha) + b\ddot{\alpha} \cos(\varphi - \alpha) - l\ddot{\varphi} + g \cos \varphi = 0 \quad (2.25)$$

$$m [b\dot{\alpha}^2 \cos(\varphi - \alpha) - b\ddot{\alpha} \sin(\varphi - \alpha) - l\dot{\varphi}^2] = -T + mg \sin \varphi. \quad (2.26)$$

Momentová věta pro "těžké" těleso (vzhledem k ose procházející bodem  $O$ ):

$$Ma^2\ddot{\alpha} = Mga \cos \alpha - Tb \sin(\varphi - \alpha) \quad (2.27)$$

Dosadíme-li za  $T$  z rovnice (2.26) do rovnice (2.27), dostaneme druhou rovnici, která spolu s (2.25) tvoří výslednou soustavu diferenciálních rovnic pro pohyb systému:

$$\begin{aligned} [Ma^2 + mb^2 \sin^2(\varphi - \alpha)] \ddot{\alpha} - mb^2 \dot{\alpha}^2 \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \alpha) + \\ + mlb\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \alpha) + mbg \sin \alpha \sin(\varphi - \alpha) - Mga \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

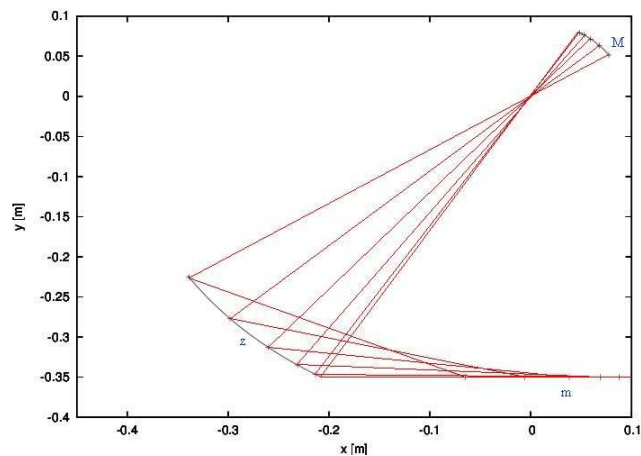
Numerickým řešením soustavy rovnic (2.25) a (2.28) získáme všechny informace o pohybu katapultu ve fázi 2.

### (c) Třetí fáze:

Třetí fázi letu lze, při zanedbání odporu vzduchu, popsat jako šikmý vrh. Jeho dolet je  $d = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$ , kde  $\theta$  je elevační úhel a  $v_0$  je počáteční rychlost.

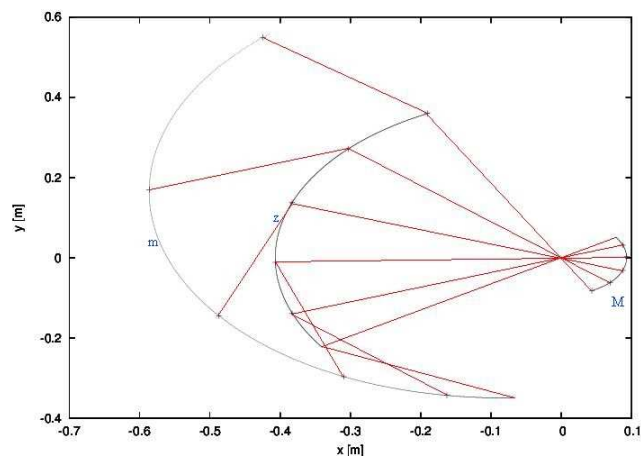
### Výsledky a závěry:

Obr. 4 představuje pohyb katapultu v první fázi. Vidíme na něm tři křivky, odpovídající postupně pohybu "těžkého" tělesa ( $M$ ), konce ramene ( $z$ ), na němž je uchyceno vlákno spojující rameno s katapultovaným tělesem, a katapultovaného tělesa ( $m$ ). Spojnice mezi křivkami, představující polohy ramena a vlákna, rozdělují pohyb katapultu na pět stejných časových intervalů.



obr. 4 Pohyb katapultu – první fáze

Na obr. 5 je znázorněn pohyb "těžkého" tělesa ( $M$ ), konce ramene ( $z$ ) a katapultovaného tělesa ( $m$ ) v druhé fázi pohybu. Spojnice mezi křivkami opět reprezentují polohy katapultu a rozdělují jeho pohyb na pět stejných časových intervalů.



obr. 5 Pohyb katapultu – druhá fáze

Pro číselné parametry našeho experimentu vychází z řešení pohybových rovnic pro druhou fázi počáteční rychlost katapultovaného tělesa ve fázi třetí  $v_0 = 14 \text{ ms}^{-1}$ . Dolet  $d = 20 \text{ m}$ . Důležitým parametrem je také výška výstupu, která činí  $q = 5,5 \text{ m}$ . Vypočtená účinnost katapultu je  $\eta = 71\%$ .

Reálné hodnoty se ovšem od vypočtených výrazně liší ( $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$ ;  $d = 10 \text{ m}$ ;  $q = 4 \text{ m}$ ;  $\eta = 35\%$ ). Je to způsobeno ztrátami v mechanismu. S katapultem těchto rozměrů je skutečně možné střílet v běžné přednáškové místnosti.



## Kapitola 3

# Mechanika tuhých těles

V této kapitole si všimneme jednoduchých, avšak typických experimentů demonstrujících valení tuhého tělesa. Základem většiny postupů při řešení úloh o valivém pohybu je předpoklad, že se těleso odvaluje bez prokluzování. Ne vždy je však tento předpoklad splněn a není jednoduché sestavit experiment tak, abychom se jeho splnění dobře přiblížili. V našich experimentech jsou, vždy na základě předchozího teoretického rozboru, voleny takové podmínky, aby byl předpoklad valení bez prokluzování realistický.

Řešení valivých pohybů pomocí impulzových vět bývá pro studenty poměrně obtížné a tam, kde je možné použít zákona zachování mechanické energie, se tomuto způsobu řešení vyhýbají. V této kapitole proto řešíme všechny úlohy důsledně i pomocí impulzových vět.

### 3.1 Cívka s nití

Jedná se o jednoduchý a oblíbený experiment, nazývaný také "poslušná a neposlušná cívka". Podle úhlu, který svírá napjatá nit s vodorovnou podložkou, se cívka valí požadovaným směrem.



obr. 1 Cívka s nití

**Charakteristika:**

Odvození pohybových rovnic cívky aplikací první a druhé impulzové věty se správným započtením statické třecí síly, formulace vazební podmínky charakterizující odvalování bez prokluzu, formulace podmínek pro navíjení a odvíjení nití a stanovení mezního úhlu pro smýkání.

**Fyzikální zákony:**

První a druhá impulzová věta, podmínka pro maximální přípustnou velikost statické třecí síly.

**Pomůcky a zařízení:**

Cívka s nití.

**Popis experimentu:**

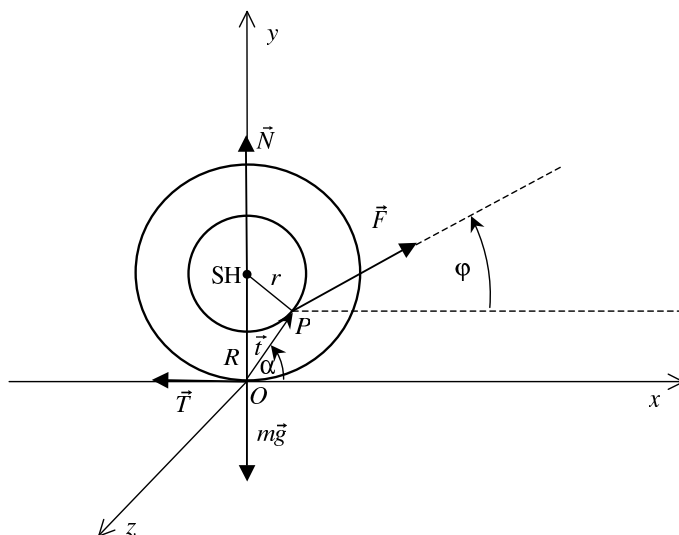
Cívka je tvořena dvěma kruhovými deskami o poloměru  $R$  spojenými souosým válcem o poloměru  $r$ , na kterém je navinuta nit. Hmotnost cívky je  $m$ . Cívku s nití položíme na vodorovnou podložku a odvineme část nitě, za jejíž konec budeme tahat. Zjistíme, že v určitém intervalu úhlů, který svírá nit s rovinou podložky, se nit na cívku navíjí (a), v jiném intervalu se z cívky odvíjí (b). Při určitém úhlu se cívka po podložce nevalí, je splněna podmínka pro smýkání.

**Číselné parametry experimentu:**

$$r = 5 \text{ cm}; R = 13 \text{ cm}; m = 1,2 \text{ kg}; J = 0,0077 \text{ kgm}^2; F = 10 \text{ N}$$

**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:**

- $m\vec{g}$  ... tíhová síla působící ve středu hmotnosti (SH)
- $\vec{F}$  ... tahová síla nití
- $\vec{N}$  ... tlaková síla podložky (působí v bodě O)
- $\vec{T}$  ... statická třecí síla (působí v bodě O)



obr. 2 Síly působící na valící se cívku

První impulzová věta:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{T}$$

Vazební podmínka pro zrychlení středu hmotnosti  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = (a_x, 0, 0)$$

Zvolíme soustavu souřadnic podle obr. 2. Pro jednotlivé složky dostáváme, již s uvážením vazební podmínky, tyto vztahy

$$ma_x = F \cos \varphi + T_x, \quad 0 = -mg + N + F \sin \varphi \quad (3.1)$$

Druhá impulzová věta:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_T$$

kde  $\vec{M}_F = \vec{r}_P \times \vec{F}$ , resp.  $\vec{M}_T = \vec{r}_O \times \vec{T}$ , je moment síly  $\vec{F}$ , resp.  $\vec{T}$  vzhledem ke středu hmotnosti cívky ( $SH$ ),  $\vec{r}_P$  a  $\vec{r}_O$  jsou polohové vektory působišť sil  $\vec{F}$  a  $\vec{T}$  vzhledem k  $SH$ . Ve složkách platí (při rovnoměrném rozložení hmotnosti cívky vzhledem k její ose)

$$\vec{\varepsilon} = (0, 0, \varepsilon_z), \quad \text{a tedy} \quad J\varepsilon_z = Fr + T_x R \quad (3.2)$$

Vazební podmínka (valení bez prokluzu):

$$a = \varepsilon R \Rightarrow a_x = -\varepsilon_z R \quad (3.3)$$

**(a) Nit se na cívku navíjí:**

$$a_x = a, \quad \varepsilon_z = -\varepsilon$$

Dosazením do (3.1) a (3.2) získáme:

$$m\varepsilon R = F \cos \varphi + T_x, \quad -J\varepsilon = Fr + T_x R \quad (3.4)$$

Řešením soustavy rovnic (3.4) dostáváme:

$$\varepsilon = \frac{F(R \cos \varphi - r)}{mR^2 + J} \quad (3.5)$$

$$a = \frac{FR(R \cos \varphi - r)}{mR^2 + J}$$

$$T_x = -F \frac{J \cos \varphi + mrR}{mR^2 + J}$$

Podmínky pro situaci (a) jsou splněny pro  $\varepsilon > 0$ , tj.

$$\cos \varphi > \frac{r}{R} \quad (3.6)$$

**(b) nit se z cívky odvíjí:**

$$a_x = -a, \quad \varepsilon_z = \varepsilon$$

Dosazením do (3.1) a (3.2) získáme:

$$-m\varepsilon R = F \cos \varphi + T_x, \quad J\varepsilon = Fr + T_x R \quad (3.7)$$

Řešením rovnic (3.7) dostaneme:

$$\varepsilon = \frac{F(r - R \cos \varphi)}{mR^2 + J} \quad (3.8)$$

$$a = \frac{FR(r - R \cos \varphi)}{mR^2 + J}$$

$$T_x = -F \frac{J \cos \varphi + mrR}{mR^2 + J}$$

Situace (b) nastává pro  $\varepsilon > 0$ , tj.

$$\cos \varphi < \frac{r}{R} \quad (3.9)$$

**(c) Mezní situace nastává pro:**

$$\cos \varphi = \frac{r}{R}, \quad \text{pak } \varepsilon = 0$$

Pro zrychlení středu hmotnosti  $\vec{a}$  a ani pro sílu  $\vec{T}$  již nemůžeme odvozených vzorců použít, neboť již není splněna podmínka valení bez prokluzování, na základě které byly odvozeny.

**Valení vzhledem k okamžité ose otáčení:**

Jednodušší možnost vysvětlení průběhu experimentu představuje formulace druhé impulzové věty vzhledem k okamžité ose otáčení dané spojnicí dvou bodů dotyku cívky s podložkou. Pro moment síly, kterou táhneme za nit, platí:

$$\vec{M} = \vec{t} \times \vec{F},$$

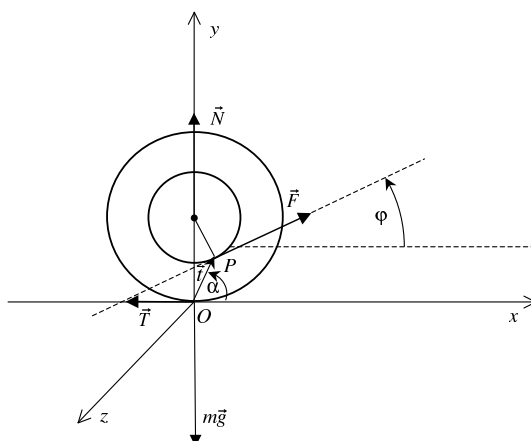
neboť momenty ostatních sil vzhledem k bodu O jsou nulové. Odtud:

$$J' \varepsilon = tF \sin(\alpha - \varphi), \quad \text{kde } J' = J + mR^2.$$

Pro vyjádření momentu setrvačnosti cívky vzhledem k okamžité ose otáčení jsme použili Steinerovy věty. Užitím vět o trojúhelnících dostáváme pro  $\varepsilon$  stejné výrazy jako v (3.5) a (3.8). Navíjení a odvíjení niti z cívky ukazují obr. 3 a 4. Pro  $\alpha > \varphi$  je moment  $\vec{M}$  nesouhlasně rovnoběžný s osou  $z$  a nit se na cívku navíjí. Pro  $\alpha < \varphi$  je  $\vec{M}$  souhlasně rovnoběžný s osou  $z$ , nit se odvíjí. Pro  $\alpha = \varphi$  prochází vektorová přímka síly  $\vec{F}$  vztahným bodem O a  $\vec{M} = \vec{0}$ . Nastává mezní situace. Podmínku pro mezní úhel získáme jednoduchou geometrickou úvahou pro případ, kdy  $\vec{t} \parallel \vec{F}$ . Dostaneme očekávaný vztah:

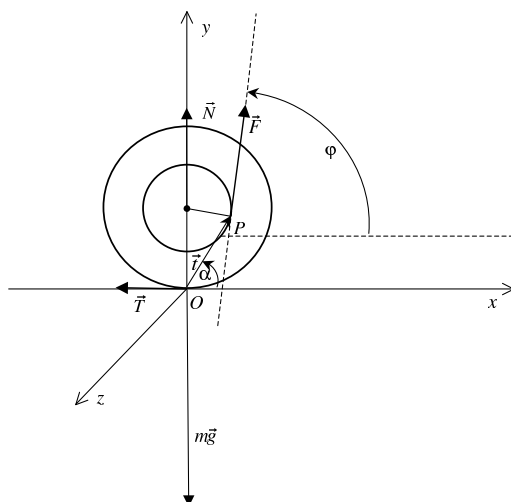
$$\cos \varphi = \frac{r}{R}$$

(a)



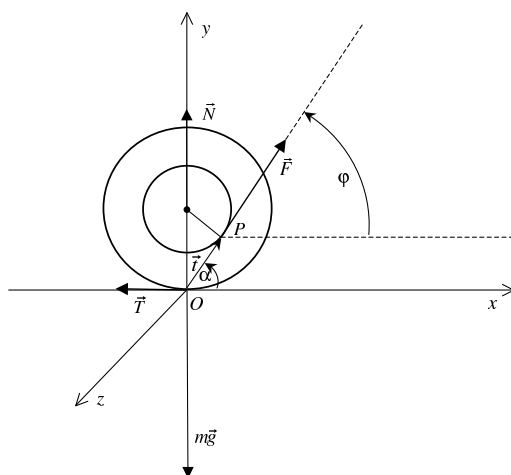
obr. 3 Navíjení niti na cívku

(b)



obr. 4 Odvíjení nití z cívky

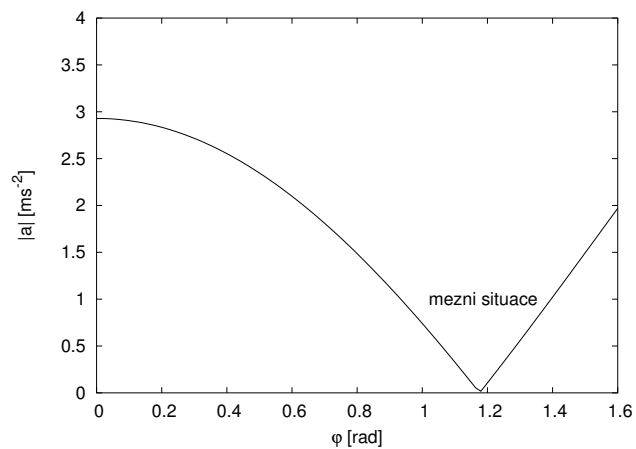
(c)



obr. 5 Mezní situace – podmínka pro smýkání

**Výsledky a závěry**

Na obr. 6 je pro číselné parametry experimentu uvedené výše znázorněn graf závislosti velikosti zrychlení středu hmotnosti cívky na úhlu  $\varphi$ , který svírá nit s vodorovnou podložkou. Zlom na křivce grafu odpovídá mezní situaci, tj. podmínce pro smýkání cívky. Podrobný, ale poněkud odlišný přístup nalezneme v [4].

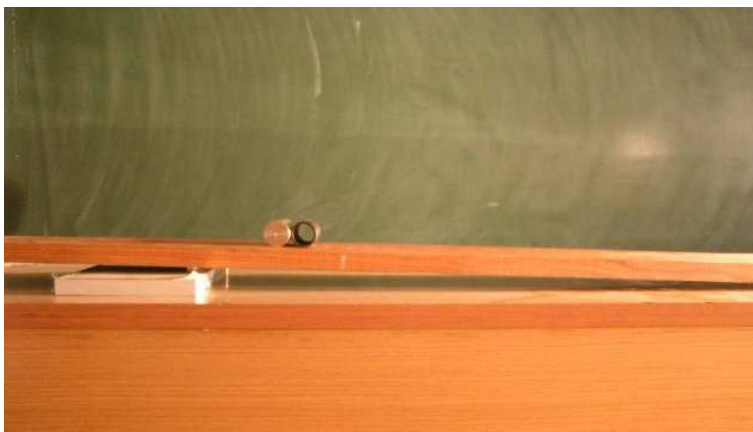


obr. 6 Graf závislosti zrychlení cívky na úhlu niti s vodorovnou rovinou



## 3.2 Válec na nakloněné rovině

Efektivním experimentem, vhodným pro vstupní motivační přednášku z mechaniky, jsou "závody" dvou válců stejné hmotnosti a stejných vnějších rozměrů, valících se bez klouzání po nakloněné rovině. Jeden z válců je dřevěný a plný, druhý je dutý a na jeho vnitřním obvodu je připevněn kovový prstenec. Podstavy obou válců jsou překryty různobarevným papírem, aby rozdílnost válců nebylo možno na první pohled objevit. Studenti očekávají, že oba válce se budou valit po nakloněné rovině stejně rychle.



obr. 1 Válce na nakloněné rovině

### Charakteristika:

Odvození pohybových rovnic užitím impulzových vět pro válec valící se po nakloněné rovině bez prokluzu. Správné zahrnutí statické třecí síly do výpočtu.

### Fyzikální zákony:

První a druhá impulzová věta, zákon zachování mechanické energie.

### Pomůcky a zařízení:

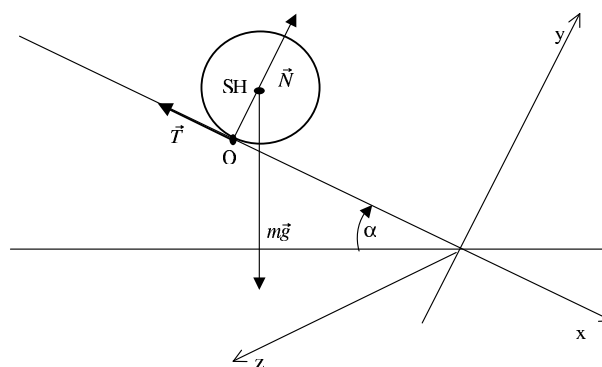
Plný dřevěný válec, dutý dřevěný válec s kovovým prstencem na vnitřním obvodu, deska realizující nakloněnou rovinu, váha, stopky.

**Popis experimentu:**

Válec o poloměru  $r$  se valí po nakloněné rovině v tíhovém poli Země. Zjistíme, že zrychlení jeho středu hmotnosti  $\vec{a}$  závisí nejen na sklonu nakloněné roviny  $\alpha$ , na hmotnosti válce  $m$  a jeho vnějším poloměru, ale i na momentu setrvačnosti  $J$  válce vzhledem k ose jeho geometrické symetrie, tj. na rozložení jeho hmotnosti.

**Číselné parametry experimentu**

Pro experiment byly použity válce se shodnými hmotnostmi  $m = 0,4$  kg a shodnými vnějšími poloměry  $r = 5$  cm. Pro úhel nakloněné roviny s vodorovou podložkou byla zvolena hodnota  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:**

obr. 2 Válec na nakloněné rovině – silový diagram

**(a) Řešení pomocí impulzových vět:**

Na válec působí Země tíhovou silou  $m\vec{g}$  a podložka normálovou tlakovou silou  $\vec{N}$  a statickou třecí silou  $\vec{T}$ . Síly  $\vec{N}$  a  $\vec{T}$  působí v bodě  $O$  styku válce s podložkou (viz obr. 2). Podle první impulzové věty platí:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$$

V soustavě souřadnic zvolené podle obr. 2 platí pro zrychlení středu hmotnosti  $\vec{a}$  vazební podmínka:

$$\vec{a} = (a, 0, 0)$$

Ve složkách má první impulzová věta tvar

$$x: \quad ma = mg \sin \alpha - T \quad y: \quad 0 = -mg \cos \alpha + N \quad (3.10)$$

Formulace druhé impulzové věty vzhledem ke středu hmotnosti válce (předpokládáme, že hmotnost válce je vzhledem k jeho geometrické ose, procházející středem hmotnosti, rozložena symetricky) má tvar

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_T \Rightarrow J\varepsilon = rT, \quad (3.11)$$

neboť úhlové zrychlení  $\varepsilon$  má směr osy  $z$ , tj.  $\vec{\varepsilon} = (0, 0, -\varepsilon)$ .

Vzhledem k tomu, že se válec valí bez prokluzu, platí vazební podmínka ve tvaru rovnosti obvodového zrychlení  $a_{\text{obv}} = r\varepsilon$  a velikosti zrychlení středu hmotnosti, tj.

$$a = r\varepsilon.$$

Její dosazení do první z rovnic (3.10) a vztah (3.11) vedou k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} m\varepsilon r &= mg \sin \alpha - T \\ J\varepsilon &= rT \end{aligned} \quad (3.12)$$

pro neznámé  $\varepsilon$  a  $T$ . Jejím řešením dostáváme

$$\begin{aligned} T &= mg \frac{J \sin \alpha}{mr^2 + J} \\ \varepsilon &= \frac{mgr \sin \alpha}{mr^2 + J} \Rightarrow a = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{mr^2 + J} \end{aligned}$$

**(b) Řešení pomocí zákona zachování mechanické energie:**

Za nulovou hladinu tíhové potenciální energie zvolme vodorovnou rovinu jdoucí středem hmotnosti válce na počátku pohybu ( $t = 0$ ), kdy je válec v klidu. Označme  $h$  okamžitou vzdálenost středu hmotnosti válce od této hladiny. Pak platí:

Potenciální energie vzhledem k nulové hladině tíhové potenciální energie:

$$E_p = -mgh$$

Kinetická energie translačního pohybu:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Kinetická energie rotačního pohybu:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Zákon zachování mechanické energie:

$$E_p + E_k + E_{rot} = 0$$

(Vzhledem k volbě nulové hladiny tíhové potenciální energie je celková mechanická energie soustavy nulová.)

Můžeme tedy psát:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3.13)$$

Vazební podmínka pro valení bez prokluzu:

$$v = \omega r \Rightarrow a = \varepsilon r \quad (3.14)$$

Využitím podmínky (3.14) můžeme (3.13) přepsat do tvaru

$$mgh = \frac{1}{2}\omega^2(mr^2 + J) \quad (3.15)$$

Dále platí

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi},$$

kde  $\phi = \phi(t)$  je celkový úhel otočení válce od okamžiku  $t = 0$ .

Hloubku  $h$  pod nulovou hladinou tíhové potenciální energie vyjádříme ve tvaru:

$$h = r\phi \sin \alpha$$

Rovnici (3.15) můžeme přepsat do tvaru

$$2mgr\phi \sin \alpha = \dot{\phi}^2(mr^2 + J) \quad (3.16)$$

Řešením diferenciální rovnice (3.16) při počátečních podmínkách  $\phi(0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \omega(0) = 0$  dostaneme úhel otočení  $\phi$  válce jako funkci času:

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \frac{mgr \sin \alpha}{mr^2 + J} t^2 \quad (3.17)$$

Je vidět, že otáčivý pohyb válce je rovnoměrně zrychlený s úhlovým zrychlením

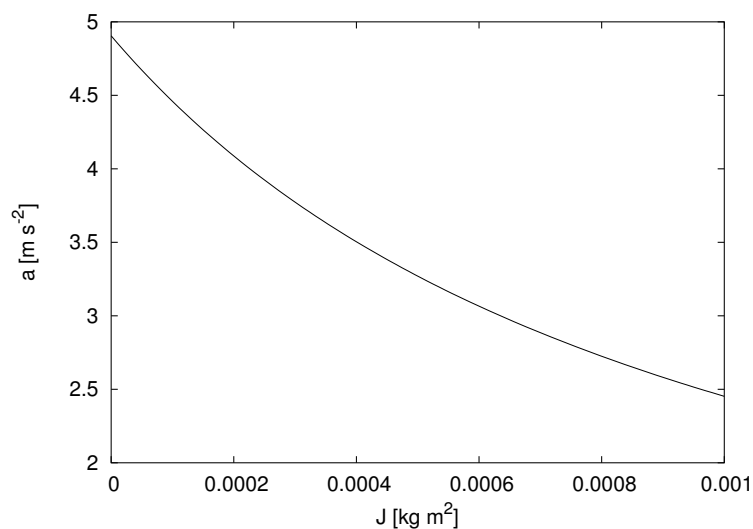
$$\varepsilon = \frac{mgr \sin \alpha}{mr^2 + J}$$

Pohyb středu hmotnosti válce je rovněž rovnoměrně zrychlený a platí

$$a = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{mr^2 + J}$$

### Výsledky a závěry

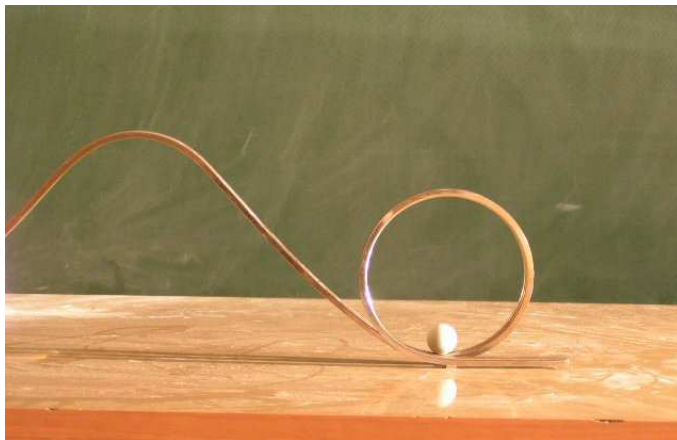
Jestliže necháme po nakloněné rovině valit válce stejných vnějších rozměrů a stejných hmotností a různým (vzhledem k ose jdoucí středem hmotnosti symetrickým) rozložením hmoty, bude jejich translační i úhlové zrychlení záviset na hodnotě momentu setrvačnosti. Jako příklad uvádíme graf závislosti translačního zrychlení na hodnotě momentu setrvačnosti pro válec a nakloněnou rovinu v tíhovém poli s parametry uvedenými v odstavci Číselné parametry experimentu.



obr. 3 Graf závislosti zrychlení válce na hodnotě momentu setrvačnosti válce

### 3.3 Závít s kuličkou - model smyčky smrti

Tento demonstrační experiment je jednoduchým modelem známé a působivé varietní atrakce – jízdy motocyklu tzv. smyčkou smrti. Jezdec se při této jízdě ocitá hlavou dolů. Je tato situace paradoxní? Nakolik je taková jízda nebezpečná?



obr. 1 Model smyčky smrti

**Charakteristika:**

Odvození podmínek nutných k tomu, aby kulička projela celou smyčkou, aniž by ztratila kontakt s vodící dráhou. Určení minimální výšky, z jaké musí být kulička vypuštěna.

**Fyzikální zákony:**

První a druhá impulzová věta, zákon zachování mechanické energie.

**Pomůcky a zařízení:**

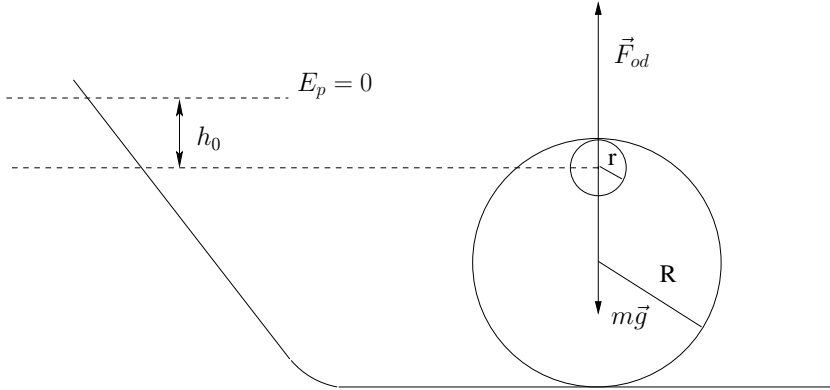
Kulička, vodící dráha se závitem.

**Popis experimentu:**

Závít s rozběhovou částí je vyroben z kovového profilu tvaru U s šířkou menší než průměr  $2r$  kuličky, kterou necháme závitem probíhat.

**Číselné parametry experimentu:**

$$r = 0,02 \text{ m}; R = 0,13 \text{ m}$$

**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:**

obr. 2 Schéma smyčky smrti, silový diagram

Budeme-li předpokládat, že se kulička pohybuje po vodící dráze bez prokluzu a zároveň zanedbáme odpor prostředí a valivý odpor, můžeme postupovat takto:

Vazební podmínka pro valení kuličky po vodící dráze:

$$v = \omega r \quad (3.18)$$

Pro zrychlení středu hmotnosti kuličky  $\vec{a}$  v neinerciální soustavě spojené s kuličkou platí  $\vec{a} = \vec{0}$ . Proto je

$$m\vec{g} + \vec{F}_{od}^* + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_t^* = \vec{0},$$

kde  $\vec{N}$  je tlaková síla, jíž působí vodící dráha na kuličku,  $\vec{T}$  je statická třecí síla bránící prokluzu kuličky,  $\vec{F}_t^*$  je tečná setrvačná síla,  $\vec{F}_{od}^*$  je setrvačná odstředivá síla. Je-li kulička v nejvyšším bodě smyčky, jsou síly  $\vec{T}$  a  $\vec{F}_t^*$  vodorovné a ostatní síly jsou svislé. Aby kulička neztratila kontakt s dráhou, musí platit:

$$N \geq 0 \Rightarrow mg \leq F_{od}^*$$

$$mg \leq \frac{mv^2}{R - r} \quad (3.19)$$

Z podmínky (3.19) získáme omezení velikosti rychlosti středu hmotnosti kuličky a využitím zákona zachování mechanické energie výšky  $h_0$ , ze které je nutné kuličku vypustit, aby prošla celou dráhou. Nulovou hladinu tíhové potenciální energie klademe do výšky  $h_0$  nad úroveň roviny, v níž se nachází střed hmotnosti kuličky v okamžiku, kdy je v nejvyšším bodě závitů. V tomto bodě platí

$$E_p = -mgh_0$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Zákon zachování mechanické energie:

$$E_p + E_k + E_{rot} = 0$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3.20)$$

Využitím podmínek (3.18), (3.19) a vztahu (3.20) dostaneme minimální hodnotu výšky  $h_0$ :

$$h_0 = \frac{(R-r)(m + \frac{J}{r^2})}{2m} \quad (3.21)$$

Užijeme-li v experimentu homogenní kuličku, jejíž moment setrvačnosti vyjádříme vztahem

$$J = \frac{2}{5}mr^2$$

získáme hodnotu výšky  $h_0$  jako funkci poloměru  $R$  závitů vodící dráhy:

$$h_0 = \frac{7}{10}(R-r)$$

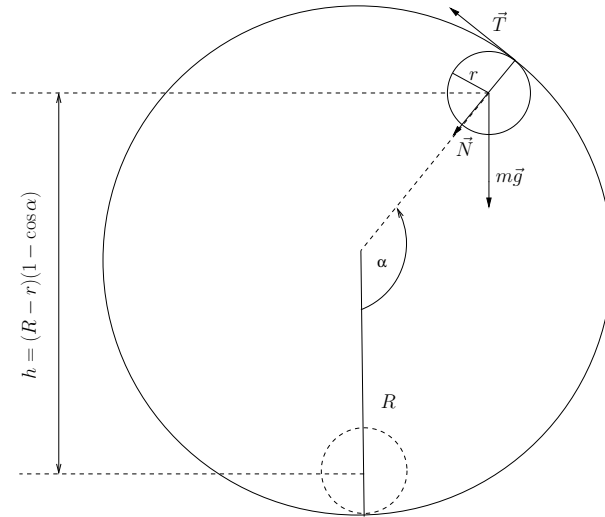
Tento výsledek je platný pouze pro případ, že se v experimentu neuplatní valivý odpor. Hodnota  $h_0$  zjištěná při provedení experimentu však je:

$$h_0 \doteq R$$

Naměřená a vypočtená hodnota výšky  $h_0$  se liší. Tento nesoulad je způsoben tím, že vodící dráha není hladká a kulička ve skutečnosti není v neustálém kontaktu s dráhou. Vazební podmínka (3.18) není tedy splněna nepřetržitě.



V předchozím jsme ukázali, jak stanovit výchozí polohu kuličky, abychom dosáhli toho, že kulička projde celou dráhou, aniž by ztratila kontakt s vodící dráhou. Nyní využijeme impulzových vět k sestavení pohybových rovnic kuličky a budeme řešit její pohyb v obecnosti. Dále již budeme za  $h$  považovat výšku nad nejnižším bodem trajektorie kuličky.



obr.3 Pohyb kuličky v závitu

Rozdělíme řešení úlohy na dvě části:

- (a) Pohyb kuličky po nakloněné rovině o úhlu sklonu  $\beta$ .
- (b) Pohyb kuličky po kruhové dráze v závitu.

**(a) Pohyb kuličky po nakloněné rovině:**

Sestavíme pohybové rovnice pro pohyb kuličky na nakloněné rovině v libovolné inerciální vztažné soustavě. Soustava souřadnic je zvolena orientována tak, že osa  $x$  je rovnoběžná s nakloněnou rovinou a má směr pohybu kuličky, osa  $y$  je k nakloněné rovině kolmá a směřuje nahoru, osa  $z$  je orientována tak, aby soustava byla pravotočivá.

Na kuličku působí tíhová síla  $m\vec{g}$ , tlaková síla podložky  $\vec{N}$  a statická třecí síla  $\vec{T}$ , která zabraňuje prokluzu. Zrychlení středu hmotnosti kuličky označíme  $\vec{a}$ . První impulzová věta pro kuličku má tvar

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$$

a pro zrychlení platí vazební podmínka

$$\vec{a} = (a, 0, 0).$$

Ve složkách

$$x: \quad ma = mg \sin \beta - T, \quad y: \quad 0 = -mg \cos \beta + N \quad (3.22)$$

Druhou impulzovou větu formulujeme vzhledem ke středu hmotnosti kuličky:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_T \Rightarrow J\varepsilon = rT, \quad (3.23)$$

kde  $\vec{M}_T$  je moment statické třecí síly vzhledem ke středu hmotnosti kuličky. Valení bez prokluzu charakterizuje vazební podmínka:

$$\vec{\varepsilon} = (0, 0, -\frac{a}{r})$$

Dosazením do první z rovnic (3.22) dostaneme

$$m\varepsilon r = mg \sin \beta - T \quad (3.24)$$

Řešením soustavy rovnic (3.24) a (3.23) máme

$$T = mg \frac{J \sin \beta}{mr^2 + J}, \quad \varepsilon = \frac{mgr \sin \beta}{mr^2 + J}, \quad a = \frac{mgr^2 \sin \beta}{mr^2 + J}$$

**(b) Pohyb kuličky v závitě:**

Sestavíme pohybové rovnice pro pohyb kuličky po kruhové dráze v závitě. První impulzová věta (význam symbolů pro síly je stejný jako v případě (a)):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

Rozepsáním do tečné a normálové složky dostaneme:

$$ma_t = -mg \sin \alpha + T_t, \quad (3.25)$$

$$ma_n = -mg \cos \alpha + N \quad (3.26)$$

Pro tečné normálové zrychlení platí

$$a_t = (R - r)\ddot{\alpha}, \quad a_n = (R - r)\dot{\alpha}^2$$

Druhá impulzová věta vzhledem ke středu hmotnosti:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_T$$

$$J\varepsilon_z = rT_t \quad (3.27)$$

Vazební podmínky:

$$\varepsilon_z = -\ddot{\varphi}$$

$$\alpha(R - r) = \varphi r \Rightarrow \varphi = \alpha \frac{R - r}{r}$$

Rovnice (3.25), (3.26) a (3.27) přepíšeme do tvaru:

$$m(R - r)\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha + T_t,$$

$$m(R - r)\dot{\alpha}^2 = -mg \cos \alpha + N,$$

$$-J\ddot{\alpha} = \frac{r^2}{R}T_t.$$

Řešením získané soustavy dostaneme pohybovou rovnici pro kuličku v kruhové dráze a vztahy pro třecí a normálovou sílu:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgr^2}{mr^2(R - r) + JR} \sin \alpha = 0 \quad (3.28)$$

$$N = m(R - r)\dot{\alpha}^2 + mg \cos \alpha \quad (3.29)$$

$$T_t = -\frac{JR}{r^2}\ddot{\alpha} \quad (3.30)$$

Poznámka: Pomocí zákona zachování mechanické energie lze snadno odvodit závislost  $N(\alpha)$ : Označme  $\vec{v}_0$  rychlost středu hmotnosti v nejnižším bodě závitů,  $\vec{v}$  v obecném bodě. Platí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J\frac{v_0^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2} + mg(R - r)(1 - \cos \alpha)$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{mg(R - r)(1 - \cos \alpha)}{mr^2 + J}2r^2$$

Rovnici (3.29) přepíšeme do tvaru

$$N = \frac{mv^2}{R-r} + mg \cos \alpha, \quad \text{tj.}$$

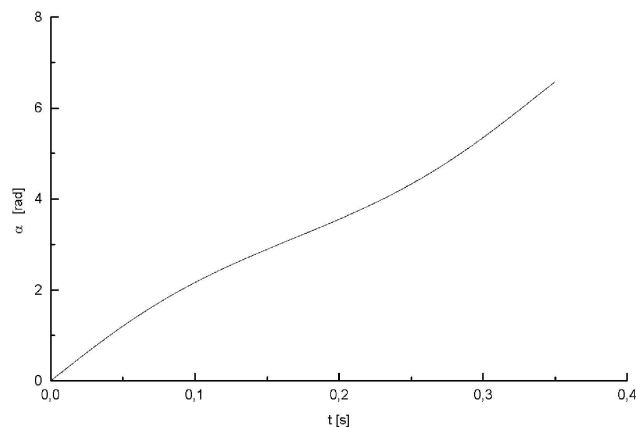
$$N = \left( \frac{mv_0^2}{R-r} - \frac{2m^2r^2g}{mr^2+J} \right) + \frac{3m^2r^2+mJ}{mr^2+J}g \cos \alpha \quad (3.31)$$

Z podmínky pro průchod kuličky horním bodem dráhy stanovíme rychlost kuličky  $v_0$  v nejnižším bodě dráhy:

$$\begin{aligned} N(\pi) &\geq 0 \\ \frac{mv_0^2}{R-r} - \frac{5m^2r^2+mJ}{mr^2+mJ}g &\geq 0 \\ v_0^2 &\geq \frac{5mr^2+J}{mr^2+J}g(R-r) \end{aligned} \quad (3.32)$$

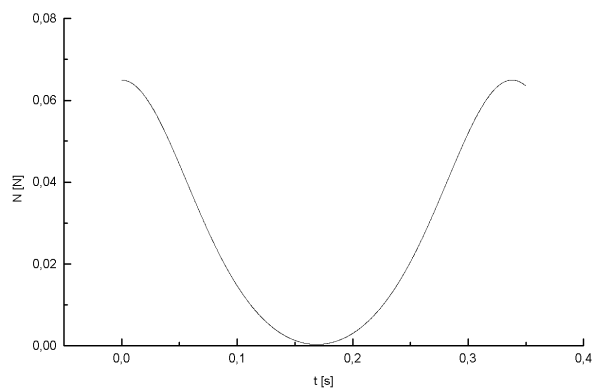
### Výsledky a závěry:

Řešením rovnice (3.28) získáme závislost úhlu  $\alpha$  na čase. Počáteční podmínky volíme ve tvaru  $\alpha(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = \frac{v_0}{R-r}$ . Tuto závislost ukazuje obr. 4.



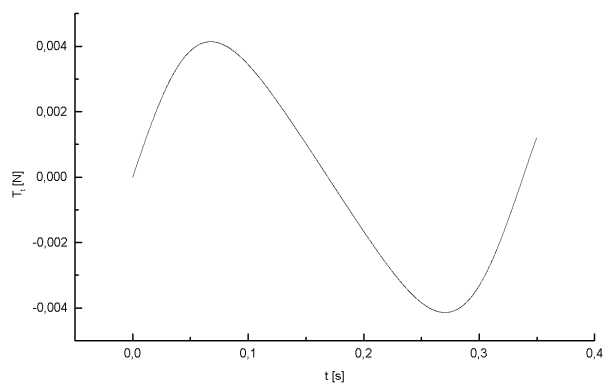
obr. 4 Časová závislost úhlové polohy kuličky v závitě

Rovnice (3.29) pak využijeme ke znázornění grafické závislosti velikosti síly  $N$  na čase:



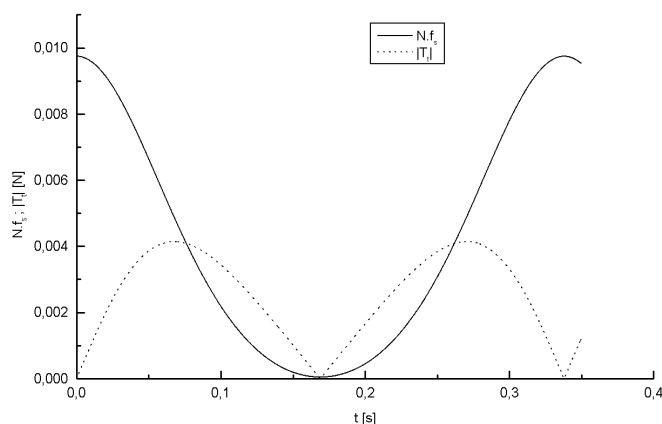
obr. 5 Časová závislost velikosti tlakové síly působící na kuličku v závitě

Obdobně získáme ze rovnice (3.30) velikost tečné síly  $T_t$  (statická třecí síla) v závislosti na čase:



obr. 6 Časová závislost statické třecí síly působící na kuličku v závitě

V případě, že kuličku vypustíme z dostatečné výšky, takže projde celou dráhu, aniž by s ní ztratila kontakt, můžeme zjistit, zda kulička v některém okamžiku proklouzne, nebo ne. Pro tento účel vykreslíme do jednoho grafu závislosti absolutní hodnoty velikosti třecí síly na čase a velikosti normálové síly vynásobené koeficientem statického tření pro použité materiály (v našem případě ocel-ocel:  $f_s = 0.15$ ). Jestliže nastane situace, kdy  $|T_t| > Nf_s$ , pak kulička proklouzne. Situaci ukazuje graf na obr. 7.



obr. 7 Časové závislosti velikostí sil  $\vec{N}$  a  $\vec{T}$  pro kovovou kuličku

Jak je vidět z grafu na obr. 7, k prokluzu v našem případě dojde. Je-li splněna podmínka pro prokluz, dojde k němu v místech před a za horní úvratí kuličky (viz obr. 7).

Jestliže nastane případ, kdy bude kulička vypuštěna z výšky menší, než je nutné k jejímu průchodu celým závitem (velikost rychlosti  $v_0$  v dolním bodě závitu nebude splňovat podmínku (3.32), můžeme ze vztahu (3.31) určit, v kterém bodě se kulička oddělí od dráhy.

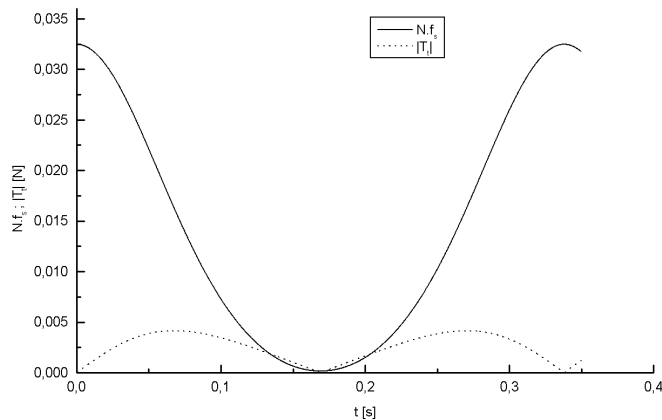
$$N(\alpha) = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{2r^2 g(R - r) - v_0^2 (mr^2 + J)}{g(3mr^2 + J)} \quad (3.33)$$

Ještě se vrátíme k vysvětlení ztrát energie při pohybu kuličky po vodící dráze při reálném experimentu. Nejvýraznější efekty, které se projeví, jsou tyto:

- a) Ztráty při prokluzu, tj. energie se ztrácí třením.
- b) Ztráty kmitáním soustavy, tj. kulička po dráze skáče, čímž předává energii dráze, ta se rozechvívá a ztráty jsou způsobeny útlumem.

Při provedení experimentu se samozřejmě neprojeví pouze jeden z efektů, ale jejich kombinace. Prokluz můžeme eliminovat použitím kuličky z tvrdé gumy, kdy výrazně zvýšíme koeficient statického tření. Jak se změní podoba grafu na obr. 7 při použití kuličky z tvrdé gumy ukazuje obr. 8 (k prokluzu dojde ve výrazně kratším časovém intervalu).



obr. 8 Časové závislosti velikostí sil  $\vec{N}$  a  $\vec{T}$  pro gumovou kuličku

Jestliže experiment provedeme tak, že zamezíme prokluzu kuličky na dráze, ukáže se, že výpočet je ve velmi dobré shodě s experimentem. Prokluzu zamezíme tím, že kulička bude mít dostatečnou počáteční energii k tomu, aby byla ve všech bodech dráhy splněna podmínka:  $|T| \leq N \cdot f_s$ , tj. v každém okamžiku se uplatňuje mezi kuličkou a vodící drahou pouze statické tření (v grafu na obr. 7 budou mít křivky nejvýše dva společné body).

Naladíme-li experiment tak, aby byla splněna tato podmínka, zjistíme, že výška  $h$  nad úrovní nejnižšího bodu trajektorie je  $h = 3,18(R - r)$ , tj.

$h_0 = 1,18R$ . To velmi dobře odpovídá experimentu, kde jsme stanovili měřením hodnotu  $h \doteq 3R$ . Použijeme-li v experimentu gumovou kuličku, hodnota  $h$  se mnohem více přiblíží k hodnotě vypočtené pro ideální případ pomocí zákona zachování mechanické energie.

Zbylé ztráty energie během děje jsme již popsali výše v bodě (b).



## Kapitola 4

# Pohyb těles v odporujícím prostředí

Cvičení a úlohy v základním kurzu obecné fyziky, konkrétně v mechanice, se v převážné většině případů řeší za předpokladu, že odpor okolního prostředí (typicky vzduchu) proti pohybu tělesa je zanedbatelný. Tentýž předpoklad se používá při interpretaci demonstračních experimentů. Studenti tak mohou mít dojem, že odporující síly lze zanedbat vždy. Uvedených zjednodušujících předpokladů pak automaticky používají i v situacích, kdy odporující (brzdící) síly mají na pohyb tělesa podstatný vliv.

Nejjednodušší závislost brzdící síly na rychlosti je lineární. Bohužel, v případě pohybu tělesa ve vzduchu není takový model vhodný. Tuto skutečnost ilustrujeme v této kapitole pomocí dvou experimentů – pád tělesa ve vzduchu a tlumené kmity tělesa na pružině. V obou případech je závislost odporu vzduchu na rychlosti kvadratická. Lineárnímu modelu naopak odpovídá brzdění pohybu kovového nemagnetického pásku v magnetickém poli Foucaultovými proudy, což rovněž dokážeme výsledky demonstračního experimentu.

## 4.1 Měření koeficientu odporu vzduchu

K běžným metodám pro měření koeficientu odporu  $C$  patří měření mezní rychlosti pádu nebo měření na speciálním siloměru v aerodynamickém tunelu. Obě tyto metody mají značná úskalí při realizaci. Při měření mezní rychlosti nemáme obvykle dostatek prostoru, druhý způsob se neobejde bez nákladného aerodynamického tunelu. Následující jednoduchý experiment umožňuje změřit koeficient  $C$  pomocí digitálního záznamu pádu tělesa ve vzduchu.

### Charakteristika:

Bezrozměrná fyzikální veličina, koeficient odporu  $C$ , vystupuje v Newtonově vztahu pro odporovou sílu jako konstanta úměrnosti zahrnující vliv tvaru tělesa a jeho orientaci vzhledem ke směru pohybu.

### Fyzikální zákony:

Druhý Newtonův zákon, Newtonův vztah pro odporovou sílu, Stokesův vztah pro odporovou sílu.

### Pomůcky a zařízení:

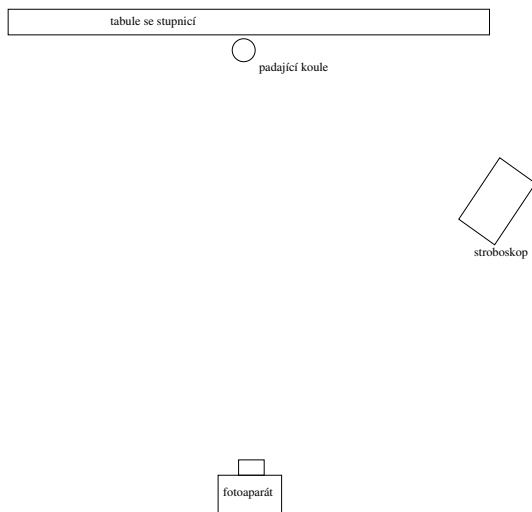
Polystyrenová koule, digitální fotoaparát, stroboskop.

### Popis experimentu:

Měření koeficientu  $C$  provedeme přímou metodou, která se vyhýbá oběma výše uvedeným obtížím. Použijeme měření poloh tělesa při pádu v odporujícím prostředí a proložení řešení pohybové rovnice naměřenými hodnotami.

### Číselné parametry experimentu:

$m = 6,87 \times 10^{-3}$  kg;  $r = 0,04$  m;  $g = 9,81$  ms<sup>-2</sup>;  $\rho = 1,17$  kg.m<sup>-3</sup>  
( $T = 300$  K)

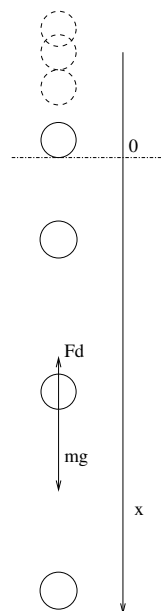
**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:**

obr. 1 Uspořádání experimentu (půdorys)

Stroboskop je záměrně umístěn mimo osu "fotoaparát-koule", aby světlo odražené od tabule nepřexponovalo snímek.



Obr. 2 Záznam pádu tělesa



Obr. 3

Na obr. 2 vidíme fotografii, která vznikne záznamem pomocí digitálního fotoaparátu a stroboskopu.

Na obr. 3 vidíme schematický obrázek pádu koule s vyznačenými silami působícími na kouli a se zvolenou souřadnicovou soustavou. Počátek souřadnicové soustavy umístíme do místa první "dobře" rozlišitelné koule. Tato poloha odpovídá okamžiku  $t = 0$  s. V našem experimentu začíná pohyb koule v čase  $t < 0$  v bodě  $x(t_0) = x_0 = -0,15$  m. Rychlost v čase  $t_0$  je  $v(t_0) = 0$  ms<sup>-1</sup>.

#### Parametry záznamu:

Ekvivalent ISO 400; clonové číslo 3,3; čas expozice 1 s; frekvence záblesků stroboskopu 25 Hz; vzdálenost značek na tabuli 10 cm

Fotografii zpracujeme tak, že vytvoříme dvousloupcovou tabulku závislosti polohy na čase  $(t, x)$ , kde značky na tabuli použijeme pouze jako orientační a skutečné měření polohy provedeme v pixelech a přepočteme pomocí známého poměru  $\frac{\text{pixel}}{\text{metr}}$  na metry.

Pohybová rovnice koule:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_d, \quad (4.1)$$

kde  $m$  je hmotnost koule,  $\vec{g}$  je tíhové zrychlení a  $\vec{F}_d$  odporová síla vzduchu.

Budeme testovat dva modely odporové síly, a to lineární (Stokesův) a kvadratický (Newtonův).

$$F_{d,Stokes} = -6\pi\eta r v, \quad F_{d,Newton} = -\frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

kde  $v$  je rychlost koule,  $\eta$  dynamická viskozita vzduchu,  $r$  poloměr koule,  $C$  empirický koeficient,  $S$  průřez koule a  $\rho$  hustota vzduchu.

Porovnáním numerického řešení rovnice (4.1) pro lineární (Stokesův) model odporové síly s naměřenými daty zjistíme, že tento model neodpovídá realitě. Jestliže použijeme  $\eta$  jako volný parametr, dostaneme hodnotu 230–krát větší než je skutečná hodnota dynamické viskozity pro vzduch, jejíž hodnota je  $\eta_{300K} = 17,1 \times 10^{-6}$  Pa.s. Pro správnou hodnotu  $\eta_{300K}$  dostaneme pravou čárkovanou čáru v obr. 4.

Tento výsledek je v souladu s naším očekáváním, Stokesův model totiž není správný pro hodnoty Reynoldsova čísla větší než 34 [9]. Pro parametry našeho experimentu je tato hodnota překročena již při rychlosti kolem  $5 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ , která odpovídá velmi krátkému časovému intervalu po začátku pádu.

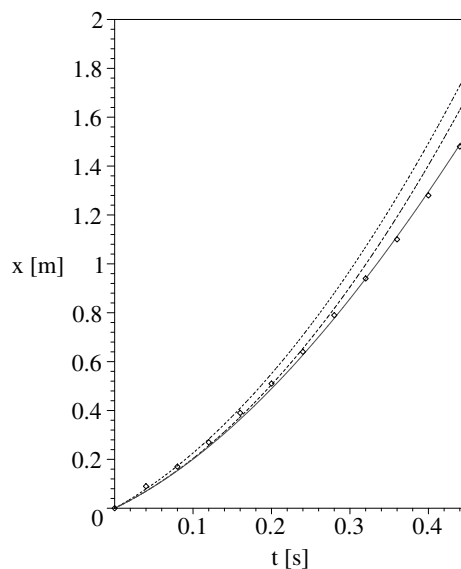
Nyní se soustředíme na možnost určení empirického koeficientu  $C$ , vystupujícího v Newtonově vztahu pro odporovou sílu.

Pohybová rovnice:

$$m\ddot{x} + \frac{1}{2}CS\rho v^2 = mg \quad (4.2)$$

Rovnici (4.2) budeme řešit numericky s počátečními podmínkami  $v(0) = 0 \text{ ms}^{-1}$  a  $x(0) = -0.15 \text{ m}$ . Proložení řešení  $x(t, C)$  naměřenými hodnotami  $x(t)$  provedeme metodou nejmenších čtverců a získáme koeficient  $C$ .

## Výsledky a závěry:



obr.4

Plnou čarou je vyznačeno nejlepší proložení numerického řešení rovnice (4.2) naměřenými daty metodou nejmenších čtverců, pravá čárkovaná křivka odpovídá Stokesovu modelu a levá křivka volnému pádu.

Nejlepší shoda řešení rovnice (4.2) s naměřenými daty dává hodnotu:

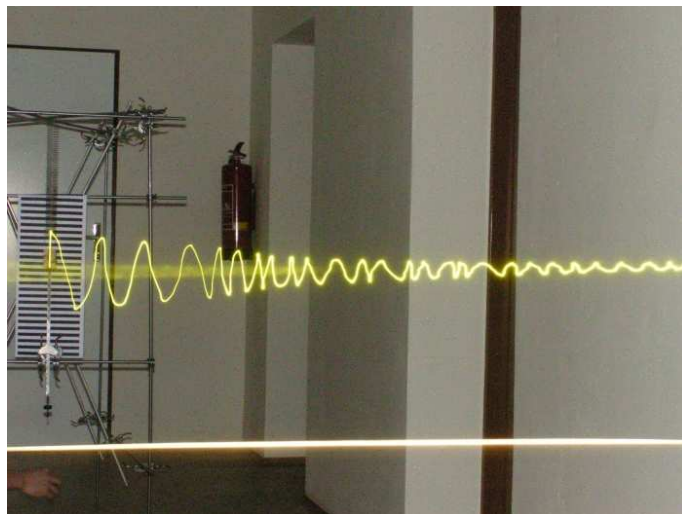
$$C = 0.42 \pm 0.03$$

Tato hodnota je ve velmi dobrém souladu s tabelovanými údaji.

Pro preciznější analýzu pádu tělesa v odporujícím prostředí by bylo nutné uvážit ještě vliv vztlakové síly působící na těleso, tj. na pravé straně rovnice (4.2) by se objevil člen  $F_v = V\rho g$ . Pro správné započtení této síly je třeba si uvědomit, že  $V$  nemusí být nutně vnější objem tělesa, zejména je-li materiál pórovitý. Je proto třeba uvážit vnitřní strukturu materiálu.

## 4.2 Mechanický oscilátor s lineárním tlumením

Brzdící sílu lineárně závislou na rychlosti pohybu tělesa lze realizovat pomocí nemagnetického kovového pásu kmitajícího na pružině a tlumeného Foucaultovými proudy.



obr. 1 Kmity oscilátoru tlumeného Foucaultovými proudy

### Charakteristika:

Pružinový mechanický oscilátor tlumený Foucaultovými proudy, sestavení pohybových rovnic, odvození a experimentální prokázání lineárního charakteru tlumení.

### Fyzikální zákony:

První impulzová věta, závislost brzdící síly způsobené Foucaultovými proudy na rychlosti pohybu.

### Pomůcky a zařízení:

Pružina, závaží, svítivá dioda, proužek hliníkového nebo měděného plechu, magnety.

**Popis experimentu:**

V levé části obr. 1 vidíme zavěšený pružinový oscilátor, který je navíc osazen svítivou diodou a hliníkovým páskem, který se může volně pohybovat mezi póly magnetů. Fotografie vznikne tak, že pohyb svítící diody zaznamenáme digitálním fotoaparátem umístěným na otočném stativu v tmavé místnosti.

**Číselné parametry experimentu:**

úhlová frekvence netlumeného oscilátoru  $\omega_0 = 7.17 \text{ s}^{-1}$ ; čas závěrky 30 s; ekvivalent citlivosti filmu ISO 400; clonové číslo 5; synchronizace blesku s dlouhými časy závěrky, záblesk na začátku expozice

Expozice: Fotoaparát nastavíme tak, že oscilátor máme v levé části zorného pole, zahájíme expozici (v tento okamžik nám blesk osvítí pozadí s měřítkem), začneme otáčet fotoaparátem na stativu (tímto pohybem rozvineme pohyb oscilátoru z úsečky do roviny). Nerovnoměrnost rotačního pohybu fotoaparátu způsobí "rozřesenost" výsledné fotografie. To však nepředstavuje žádnou komplikaci, neboť periodu známe z jednoduchého měření se stopkami. Tato "nerovnoměrnost" způsobená ruční rotací nijak neovlivní přesnost našeho měření a zároveň nám ušetří náklady za přídatná zařízení.

**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:**

Pohybuje-li se nemagnetický kovový pásek v magnetickém poli o indukci  $\vec{B}$  a jeho rychlost  $\vec{v}$  je kolmá ke směru vektoru magnetické indukce, pak podle [6] a [11] je brzdící síla způsobená Foucaultovými proudy dána vztahem

$$\vec{F}_B = -K\sigma\vec{v}B^2 \quad K > 0 \quad \text{je konstanta} \quad (4.3)$$

Je-li hliníkový pásek z homogenního materiálu, jeho vodivost  $\sigma$  konstatní a magnetická indukce mezi póly magnetu se nemění, pak je "brzdná" síla  $F_B$ , která způsobuje tlumení oscilátoru, závislá pouze na první mocnině rychlosti a má vždy opačný směr než rychlost.

K experimentálnímu ověření "lineárnosti" tlumení popsaného oscilátoru využijeme fotografii na obr. 1.

Lineární oscilátor s Hookovou pružnou silou tlumený odporovou silou typu  $\vec{F}_B = -b\vec{v}$  má pohybovou rovnici:

$$m\ddot{z} = -kz - b\dot{z},$$



kterou v našem případě přepíšeme do tvaru:

$$m\ddot{z} = -kz - K\sigma B^2\dot{z} \quad (4.4)$$

Rovnici (4.4) upravíme:

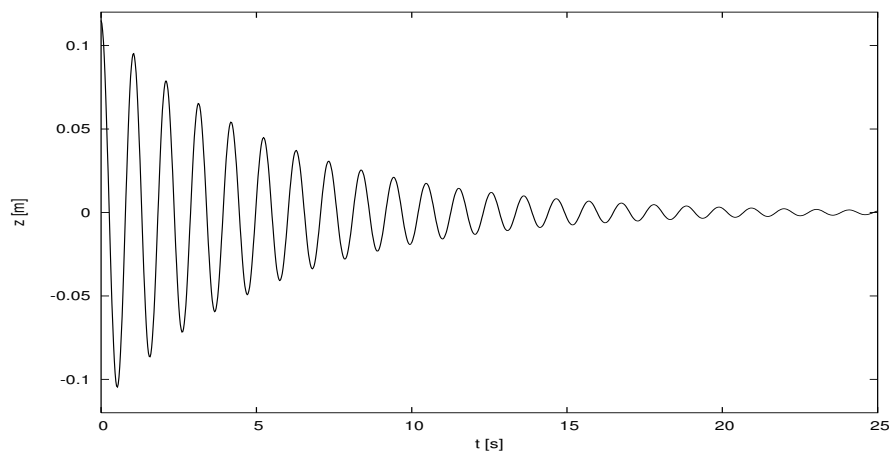
$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad (4.5)$$

kde  $\gamma = \frac{2m}{b}$  a  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $b = K\sigma B^2$ .

Řešení této rovnice má při vhodné volbě počátečních podmínek tvar:

$$z = A e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad (4.6)$$

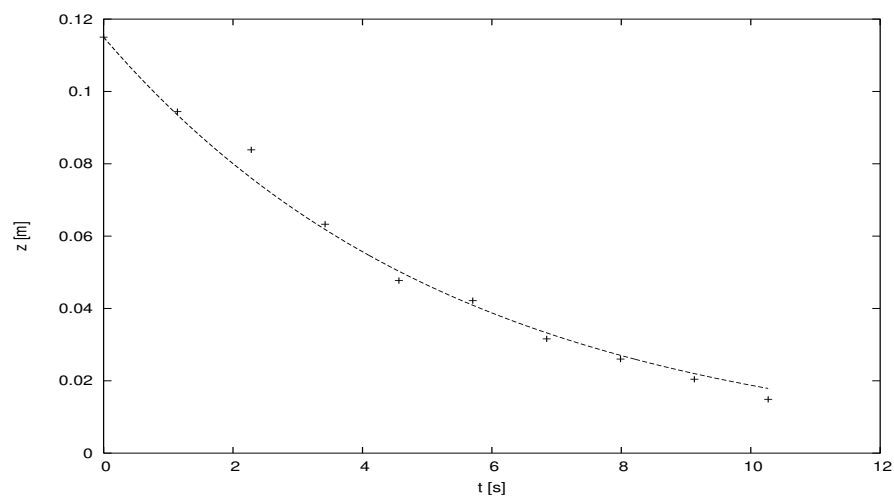
kde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ .



obr.4 Grafické znázornění funkce (4.6)

### Výsledky a závěry:

Jestliže proložíme naměřené body trajektorie reprezentující jednotlivé maximální výchylky oscilátoru obálkou funkce (4.6), zobrazené na obr. 4 s jediným volným parametrem  $\gamma$ , ověříme současně platnost našeho modelu a zjistíme číselnou hodnotu koeficientu útlumu  $\gamma$ .



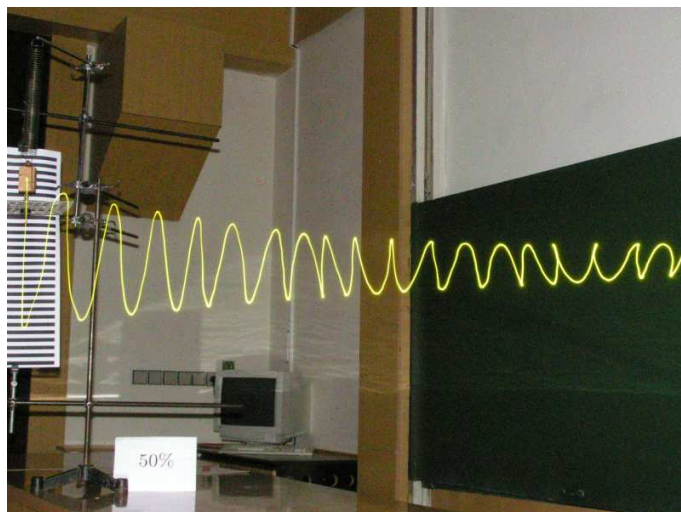
obr.5

Zjištěná velikost koeficientu útlumu  $\gamma$  pomocí jednoparametrického fitu metodou nejmenších čtverců je  $\gamma = (0.181 \pm 0.005) \text{ s}^{-1}$ . Tomuto odpovídá velikost relativní chyby  $\delta = 2.85\%$ .

Tento výsledek je potvrzením správnosti lineárního modelu.

### 4.3 Mechanický oscilátor tlumený odporem vzduchu

Většina mechanických úloh a demonstračních experimentů se řeší a interpretuje za předpokladu, že odpor prostředí při pohybu těles ve vzduchu lze zanedbat. Tento předpoklad však není realistický a zejména při interpretaci experimentů je třeba odpor vzduchu započíst.



obr. 1 Kmity oscilátoru ve vzduchu

#### **Charakteristika:**

Demonstrační experiment, pomocí něhož testujeme vhodnost různých modelů závislosti odporové síly vzduchu na rychlosti tělesa. Je jednoduchý, efektní a nepříliš nákladný a na rozdíl od experimentů nevyužívajících kmitání nevyžaduje ani příliš prostoru.

#### **Fyzikální zákony:**

Druhý Newtonův zákon, Newtonův vztah pro odporovou sílu, Stokesův vztah pro odporovou sílu.

**Pomůcky a zařízení:**

Pružina, závaží, svítivá dioda, digitální fotoaparát, karton.

**Popis experimentu:**

V levé části obr. 1 je vidět obyčejný pružinový mechanický oscilátor, který je osazen svítivou diodou. Oscilátor může kmitat téměř jako netlumený, nebo k němu může být přidán tlumící prvek, v našem případě čtvercová kartónová deska. Fotografie vznikne užitím digitálního fotoaparátu umístěného na otočném stativu v tmavé místnosti, s těmito parametry:

**Číselné parametry experimentu:**

Čas závěrky 30 s; ekvivalent citlivosti filmu ISO 400; clonové číslo 5; synchronizace blesku s dlouhými časy závěrky, záblesk na začátku expozice

Expozice:

Fotoaparát nastavíme tak, abychom viděli oscilátor v levé části zorného pole, zahájíme expozici (v tomto okamžiku blesk osvítí pozadí s měřítkem), začneme otáčet fotoaparátem na stativu (tímto pohybem rozvineme pohyb oscilátoru z úsečky do roviny).

**Fyzikální rozbor, matematická formulace a řešení:****Lineární model odporové síly**

Nejčastěji užívaným typem závislosti odporové síly prostředí na rychlosti pohybu tělesa je závislost lineární (například pro kouli jde o obvyklý Stokesův vzorec  $F_{od} = 6\pi\eta r v$ , kde  $r$  je poloměr koule a  $\eta$  dynamická viskozita prostředí). Motivem této volby je většinou možnost snadno získat analytické řešení problému. Lineární oscilátor s Hookovou pružnou silou tlumený odporovou silou tohoto typu má pohybovou rovnici:

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y}, \quad (4.7)$$

kde  $k$  je tuhost pružiny a  $m$  hmotnost tělesa.

Rovnici (4.7) lze přepsat do tvaru

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (4.8)$$

kde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  a  $\gamma = \frac{b}{2m}$ .

Řešení této rovnice má při vhodné volbě počátečních podmínek tvar:

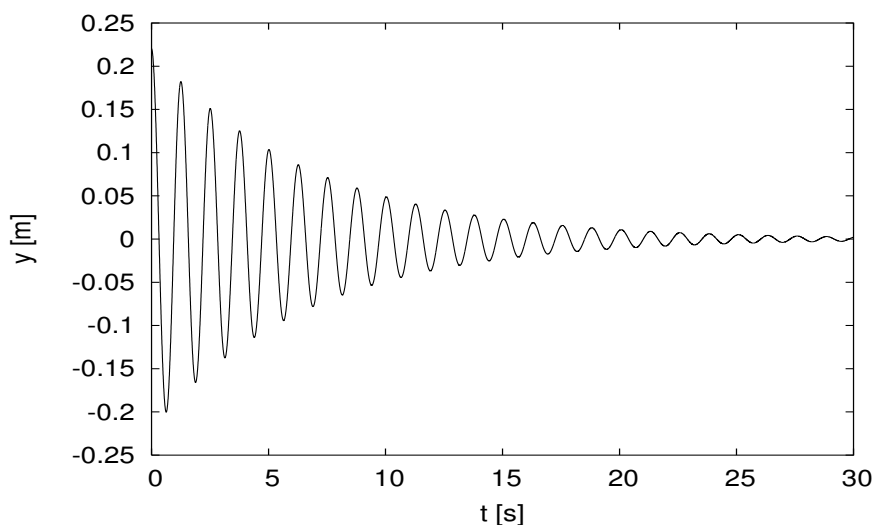
$$y = Ae^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad (4.9)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (4.10)$$

a  $Ae^{-\gamma t}$  je časově proměnná amplituda, která určuje křivku, jíž se dotýká graf závislosti výchylky oscilátoru na čase (tzv. obálka grafu).

Zvolíme-li ve vztahu (4.9) počáteční amplitudu, periodu kmitu a celkovou dobu, po kterou sledujeme kmitání, shodně s experimentem a znázorníme-li řešení (4.9) graficky (viz obr. 2), můžeme přímo porovnat útlum modelového oscilátoru se skutečným (například srovnáním výšek prvních několika odpovídajících si maxim).



obr. 2 Výchylka oscilátoru při lineárním tlumení

Při pokusu o docílení nejlepší shody experimentálních údajů s teoretickou křivkou v oblasti prvních deseti kmitů však zjišťujeme, že po uplynutí delší doby je teoretický útlum výrazně vyšší než útlum naměřený (viz obr. 1 a 2). Pro oscilátor, kde tlumícím prvkem je deska kmitající spolu s oscilátorem ve vzduchu, je tedy lineární model tlumení nevyhovující.

**Kvadratický model odporové síly**

Typickým příkladem tohoto modelu je Newtonův vztah pro velikost odporové síly  $F_{od} = \frac{1}{2}CS\rho v^2$ , kde  $\rho$  je hustota vzduchu,  $S$  je obsah příčného řezu vzhledem ke směru pohybu a  $C$  je empirická konstanta, závisící mimo jiné na tvaru tělesa a jeho orientaci vzhledem ke směru pohybu. Obecný vztah pro odporovou sílu tohoto typu má tvar  $\vec{F}_{od} = -B|\vec{v}|\vec{v}$ , kde  $|\vec{v}|$  je velikost rychlosti a  $B = \frac{1}{2}CS\rho$ .

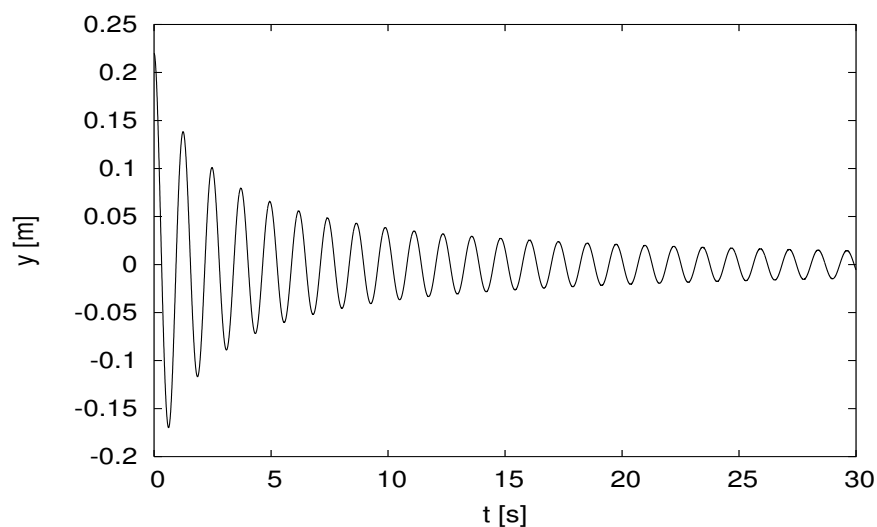
Oscilátor s Hookovou pružnou silou tlumený odporovou silou tohoto typu má pohybovou rovnici:

$$m\ddot{y} = -ky - B|\dot{y}|\dot{y},$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$\ddot{y} + \beta\dot{y}|\dot{y}| + \omega_0^2 y = 0 \quad (4.11)$$

Řešení rovnice (4.11) nedokážeme získat v analytickém tvaru, umíme ji však snadno řešit numericky. Graf řešení odpovídajícího počátečním podmínkám při experimentu je na obr. 3.



obr. 3 Výchylka oscilátoru při kvadratickém tlumení

Srovnáme-li obr. 1 s obr. 3, vidíme, že obě křivky jsou si již na první pohled výrazně podobné (a odlišné od grafu na obr. 2). Z pouhého dojmu však nemůžeme usuzovat na korektnost modelu s "kvadratickým tlumením". Oprávněnost užití tohoto modelu budeme muset ještě ověřit.

Předpokládáme, že periodu řešení na obr. 3 lze považovat za konstantu danou intervaly mezi sousedními maximy nebo minimy. Oprávněnost tohoto předpokladu potvrzuje určení počtu kmitů v různých, avšak stejně dlouhých časových intervalech. V dalším budeme k zpracování měření používat pouze naměřená maxima a minima, čímž zcela odstraníme problém s "roztřeseností" fotografie na obr. 1, způsobenou ručním otáčením fotoaparátu na stativu.

Pro porovnání vypočtených a naměřených hodnot využijeme přibližný výpočet založený na energetické úvaze, abychom získali pokles amplitudy oscilací jako funkci času. Z proložení naměřených dat touto funkcí získáme parametr  $\beta$  a úhlovou frekvenci kmitů  $\omega$ .

Uvažujme časové intervaly  $[t_n, t_n + t_0]$  mezi libovolně zvoleným  $n$ -tým maximem a bezprostředně následujícím minimem oscilátoru. Délku těchto intervalů můžeme v rámci našeho měření  $[0, 30]$  s považovat za konstantní, neboť rozdíl mezi první a poslední studovanou periodou je pouze 0,2% (zjištěno přímým měřením).

Můžeme tedy považovat pohyb za oscilace s konstantní periodou  $\omega_0 = \frac{\pi}{t_0}$ , ale s pomalu se měnící amplitudou  $A(t)$  a fázovým posuvem  $\varphi(t)$ , podrobněji viz [5].

$$y(t) = A(t) \cos \psi(t), \quad \psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) \quad (4.12)$$

$$\dot{y} = -\omega_0 A(t) \sin \psi(t) + [\dot{A}(t) \cos \psi(t) - A(t) \sin \psi(t) \dot{\varphi}(t)] \quad (4.13)$$

Mějme na paměti, že  $\omega_0$  je vlastní frekvence netlumeného oscilátoru. Uvážíme-li, že  $A(t)$  a  $\varphi(t)$  jsou pomalu se měnící funkce času, pak můžeme zanedbat výraz v hranatých závorkách ve vztahu (4.13) a můžeme psát:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y^2 \right) = -m \beta \omega_0^3 A^3 |\sin^3 \omega_0 t|, \quad (4.14)$$

kde  $E$  je energie harmonického oscilátoru daná vztahem

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2(t) \quad (4.15)$$

Diferencováním vztahu (4.15) a aproximací výrazu  $\frac{dE}{dt}$  jeho střední hodnotou

$$\langle |\sin^3 \omega_0 t| \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \sin^3 \omega_0 t \, dt = \frac{4}{3\pi}, \quad (4.16)$$

dostaneme:

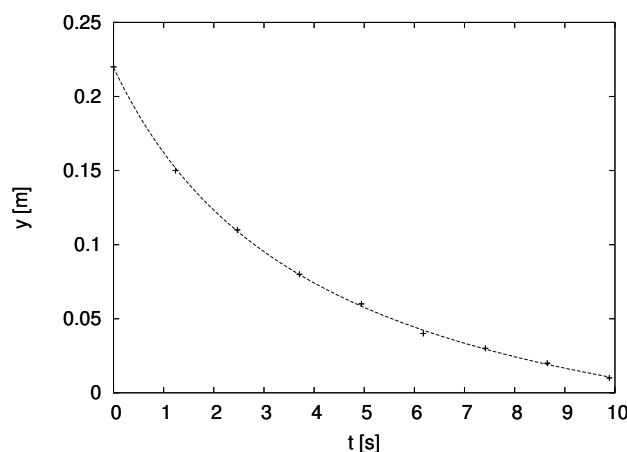
$$m\omega_0^2 A \frac{dA}{dt} = -\frac{4}{3\pi} m\beta\omega_0^3 A^3 \implies \frac{dA}{dt} = -\frac{4\beta\omega_0}{3\pi} A^2 \quad (4.17)$$

Řešení rovnice (4.17):

$$A = \frac{A_0}{1 + \Omega t}, \quad \Omega = \frac{4\beta A_0}{3\pi} \omega_0 \quad (4.18)$$

### Výsledky a závěry:

Proložení naměřených maxim nebo minim řešení (4.18) ověříme model s "kvadratickým" tlumením.



obr. 4 Pokles amplitudy  $A(t)$  oscilátoru s kvadratickým tlumením

Perioda je dána intervalem mezi sousedními maximy nebo minimy  $t \doteq 1,24$  s, což odpovídá úhlové frekvenci  $\omega_0 \doteq 5,08$  s<sup>-1</sup>. Hodnota parametru  $\beta \doteq 0,38$  m<sup>-1</sup>.

Nyní se vrátíme k tomu, proč jsme v textu upozorňovali na fakt, že  $\omega_0$  je úhlová frekvence příslušná netlumenému oscilátoru. Hmotnost oscilátoru je  $m = 8,75 \times 10^{-2}$  kg a měření jsme dostali tuhost pružiny  $k = 3,0$  Nm<sup>-1</sup>,



což dává  $\omega_{0, \text{vypočtená}} = 5,9 \text{ s}^{-1}$ . Tento nesoulad s naměřenou hodnotou můžeme snížit tím, že započteme hmotnost pružiny  $m_p = 4,89 \times 10^{-2} \text{ kg}$ . Hmotnost oscilátoru je tedy  $m_0 = m + \frac{1}{3}m_p$  a odpovídající úhlová frekvence  $\omega'_0 = 5,4 \text{ s}^{-1}$ . Je tedy zřejmé, že tato korekce je stále nedostatečná. Můžeme tedy předpokládat, že rozdíl mezi vypočtenou a měřenou úhlovou frekvencí způsobuje větší "efektivní" hmotnost oscilátoru  $\tilde{m} > m_0$ .

Tedy

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{k}{m_0 + \tilde{m}}, \quad (4.19)$$

kde  $\tilde{m}$  je přídavná hmotnost, kterou můžeme přisoudit vzduchu nesenému oscilátorem.

Hodnoty přídavné hmotnosti zjistíme pomocí numerického řešení rovnice (4.11) naměřenými daty  $[t_n, x_n]$ . Zároveň určíme hodnotu koeficientu  $C$ , který vystupuje v Newtonově vztahu pro odporovou sílu.



$\tilde{m} = 5,1 \text{ g}$



$\tilde{m} = 1,5 \text{ g}$

obr.5 dvě tlumící desky s odpovídajícími přidanými hmotnostmi "neseného" vzduchu.

Tato hodnota je  $C \doteq 1,3$  a velmi dobře koresponduje s tabelovanými hodnotami. Volbu Newtonova modelu potvrzuje i to, že při našem experimentu dosahuje Reynoldsovo číslo velkých hodnot.



## Kapitola 5

# Závěr

V práci bylo zpracováno osm konkrétních demonstračních experimentů zabývajících se mechanikou hmotných bodů, mechanikou tuhých těles a pohybu těles v odporujícím prostředí. Popis jednotlivých experimentů byl sestaven do formy "karet", které mají jednotnou strukturu zaměřenou tak, aby experimentátor, který tuto kartu použije, dostal do rukou jasný popis provedení, zpracování a vyhodnocení daného demonstračního experimentu, včetně upozornění na nástrahy, kterým je výhodné se vyhnout a nejsou na první pohled patrné.

Každý demonstrační experiment uvedený v této práci byl sestaven s důrazem na maximální jednoduchost a dostupnost zařízení a zároveň s požadavkem minimálních finančních nákladů.

Značný důraz je v práci kladen na korektní a důkladné matematické zpracování výpočtů a měření a jejich následnou fyzikální interpretaci. Demonstrační experiment zde nebyl pouze efektní podívánou, ale důležitým zdrojem informací pro následnou fyzikální a matematickou analýzu problému.

Tato práce je pouze výběrem několika zajímavých úloh z nepřeberného množství demonstračních experimentů, které ukazují, že důsledným zpracováním lze získat velké množství přidáných informací o zkoumaném fyzikálním systému.



# Literatura

- [1] <http://www.physics.umd.edu/lecDEM/services/demos/demosd3/d3-32.htm>
- [2] program OCTAVE <http://www.octave.org>
- [3] Bartoš J.: *Interpretační problémy demonstračních experimentů*. Diplomová práce, Masarykova Univerzita Brno, Brno, 2002.  
<http://physics.muni.cz/bartos/kuzel/kuzel.htm>
- [4] Mungan Ch.: *Acceleration of a Pulled Spool*. Phys. Teacher **39** (2001), 481-485.
- [5] Bogolyubov N. N., Mitropolskij Yu. A.: *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*. Gordon & Breach Science Publishers, New York 1961.
- [6] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics, Volume II*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts; Menlo Park, California; London; Amsterdam; Don Mills, Ontario; Sydney, 1977.
- [7] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Fundamentals of physics. Part II: Mechanics, Thermodynamics*. Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1997.
- [8] Jiménez J. L., del Valle G., Campos I.: *A canonical treatment of some systems with friction*. Eur. J. Phys. **26** (2005), 711-725.
- [9] Landau L. D., Lifchitz E. M.: *Physique théorique, tome VI, Mécanique des fluides*. Éditions Mir, Moscou 1971. In French.

- [10] Program documentation of MAPLE version 7. Waterloo Maple Software, 2001. <http://www.maplesoft.com/>
- [11] McCarthy L.: *On the electromagnetically damped mechanical harmonic oscillator*. Am. J. Phys. **64** (1996), 7, 885-891.
- [12] Nelson R. A., Olsson M. G.: *The pendulum – Rich physics from a simple system*. Am. J. Phys. **54** (1986), 2, 112 - 121.
- [13] Wang X., Schmitt Ch., Payne M.: *Oscillations with three damping effects*. Eur. J. Phys. **23** (2002), 155-164.