Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta

Dvakrát speciální relativita

diplomová práce

Brno, 2006

Jiří Vohánka

Anotace

Dvojitá speciální teorie relativity se zabývá možností modifikovat speciální teorii relativity tak, aby byla při Lorentzových transformacích invariantní nejen rychlost světla, ale také Planckova délka, popřípadě Planckova energie.

Asi nejjednodušším přístupem k tomuto problému je uvažovat pouze algebru generátorů symetrie, to jest algebru tvořenou pouze hybnostmi, generátory rotace a boosty. Pro malé energie/hybnosti by tato algebra měla být totožná s algebrou generátorů symetrie popisující speciální teorii relativity a Planckova hybnost/energie by měla být invariantní při transformacích hybnostního prostoru. Jedna z možností jak lze tuto algebru doplnit na algebru popisující celý časoprostor, která obsahuje také operátory polohy, využívá struktury Hopfovy algebry. V tomto přístupu nahradíme algebru generátorů symetrie Hopfovou algebrou, která má bohatší strukturu, a umožňuje nám vytvořit algebru popisující celý časoprostor.

Tato práce se zabývá tím, jak lze využit Hopfovu algebru při konstrukci speciální teorie relativity a dvojité speciální teorie relativity. V práci je uvažován pouze model s jednou časovou a jednou prostorovou dimenzí.

Annotation

Doubly special relativity deals with the possibility of modifications of special relativity in a way that not only the speed of light but also the Planck length/energy is invariant with respect to Lorentz transformations.

Probably the easiest way how to deal with the problem is to take just the algebra of symmetries, i.e. the algebra consisting of momenta, generators of rotation and boosts. The algebra of symmetries should be identical to the algebra of symmetries of the special theory of relativity when momentum/energy is small and the Planck energy/momentum should be invariant with respect to transformations of momentum space. One of the possibilities how to extend the algebra of symmetries to an algebra describing the whole space-time which also contains the operators of position is based on the use of Hopf algebra. In this approach we substitute the algebra of symmetries with the Hopf algebra which has a richer structure. This allows us to construct the algebra describing the whole space-time.

The work explores the use of Hopf algebra in the construction of special relativity and doubly special relativity. Only a model with one space and one time dimension is taken into consideration in this work.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně jen s použitím uvedené literatury.

Obsah

Úvod

Dvojitá speciální teorie relativity se zabývá možností modifikovat speciální teorii relativity tak, aby byla při Lorentzových transformacích invariantní nejen rychlost světla, ale také Planckova délka, popřípadě Planckova energie, tedy tak, aby pozorovatelé v různých inerciálních soustavách určili stejné hodnoty těchto veličin. Přívlastek „dvojitá" značí to, že teorie má dva parametry, které zůstávají nezměněny při transformacích mezi různými inerciálními soustavami. Požadavek invariantní délky je ve sporu s Fitzgerald-Lorentzovou kontrakcí délek, platnou ve speciální teorii relativity. Lze očekávat, že Lorentzovy transformace budou ve dvojité speciální teorii relativity pozměněny.

Motivace pro zavedení požadavku invariantní Planckovy délky vychází z očekávání toho, že tato veličina bude hrát významnou roli ve struktuře časoprostoru, pokud ho budeme zkoumat na velmi malých rozměrech (srovnatelných s Planckovou délkou). Například smyčková kvantová gravitace předpovídá diskrétní spektrum vlastních hodnot operátoru plochy a objemu, přičemž velikost těchto vlastních hodnot je vyjádřena právě pomocí Planckovy délky.

Na existenci Planckovy délky, to jest na existenci konstanty s rozměrem délky, lze nahlížet jako na důsledek existence rychlosti světla c, gravitační konstanty G a Planckovy délky $\hbar$, protože Planckova délka $L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ je kombinací těchto konstant a musí tedy být také konstantou. Planckově délce můžeme rovněž přisoudit význam délky, která vymezuje hranici, za níž se uplatňují kvantové i gravitační efekty.

Význam Planckovy délky lze ozřejmit, podíváme-li se na charakteristické velikosti délky a hmotnosti, pro které se uplatňují jak efekty obecné teorie relativity, tak efekty kvantové mechaniky. V obecné teorii relativity můžeme uvažovat například Schwarzschildovo řešení popisující gravitační pole sféricky symetrického zdroje

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2).$$

Význačnou veličinou s rozměrem délky je zde gravitační poloměr zdroje $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$. Za podmínku vymezující hranici, od které se začínají uplatňovat gravitační efekty můžeme vzít

$$\frac{r}{M} \sim \frac{G}{c^2}.$$

V kvantové mechanice můžeme uvažovat relace neurčitosti

$$\frac{\hbar}{2} \leq \Delta E \Delta t = \Delta(mc^2)\Delta\left(\frac{x}{c}\right) = c\Delta m \Delta x.$$

Za podmínku určující hranici, od které se začínají uplatňovat kvantové efekty můžeme vzít

$$\Delta m \Delta x \sim \frac{\hbar}{c}.$$

Budeme-li hledat charakteristickou velikost délky a hmotnosti, které vymezují hranici, od níž se uplatňují gravitační i kvantové efekty, to jest tehdy, když $\Delta m = M$ a $\Delta x = r$, tak zjistíme, že touto hranicí je právě Planckova hmotnost a Planckova délka

$$\Delta m = M \sim m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \doteq 2,2 \cdot 10^{-8} kg,$$

$$\Delta x = r \sim L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \doteq 1,6 \cdot 10^{-35} m.$$

Asi nejjednodušším přístupem k problému dvojité speciální teorie relativity je uvažovat pouze algebru generátorů symetrie, to jest algebru tvořenou pouze hybnostmi, generátory rotace a boosty. Cílem takového přístupu je vytvořit tuto algebru tak, aby byla v limitě pro malé energie/hybnosti totožná s algebrou generátorů symetrie popisující speciální teorii relativity a aby Planckova hybnost/energie byla invariantní při transformacích hybnostního prostoru. První práce [1], [2] pojednávající o dvojité speciální teorii relativity se zabývaly právě tímto přístupem.

Příkladem takové teorie je teorie označovaná jako DSR1 [3]. Generátory rotace a boosty jsou zde zavedeny na komutujícím prostoru hybností pomocí vztahů

$$
\begin{aligned}
M_i &= -i\epsilon_{ijk} P_j \frac{\partial}{\partial P_k}, \\
N_i &= i P_i \frac{\partial}{\partial P_0} + i \left(\frac{\lambda}{2} \vec{P}^2 + \frac{1 - e^{-2\lambda P_0}}{2\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial P_i} - i\lambda P_i P_j \frac{\partial}{\partial P_j},
\end{aligned}
$$

kde předpokládáme jednotky, ve kterých platí $\hbar = c = 1$, a kde λ je parametr této teorie, který má rozměr délky. Za hodnotu tohoto parametru můžeme zvolit právě Planckovu délku. Tyto výrazy vedou ke komutátorům

$$
\begin{aligned}
&[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k, && [N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijk} M_k, && [M_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k, \\
&[P_\mu, P_\nu] = 0, && && \\
&[M_i, P_0] = 0, && [M_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k, && \\
&[N_i, P_0] = i P_i, && [N_i, P_j] = i\delta_{ij} \left(\frac{\lambda}{2} \vec{P}^2 + \frac{1 - e^{-2\lambda P_0}}{2\lambda} \right) - i\lambda P_i P_j, &&
\end{aligned}
$$

Casimirem této algebry je

$$
C = \frac{2}{\lambda^2} \cosh \lambda P_0 - \vec{P}^2 e^{\lambda P_0}.
$$

Lze ukázat, že hybnost je v této teorii shora omezena hodnotou $\frac{1}{\lambda}$ v tom smyslu, že je-li hybnost v nějaké inerciální soustavě menší než $\frac{1}{\lambda}$, pak je menší než $\frac{1}{\lambda}$ také ve všech ostatních inerciálních soustavách. Lze očekávat, že existence maximální hybnosti bude mít za důsledek existenci minimální vlnové délky s velikostí řádově rovnou λ. Energie není v této teorii, narozdíl od hybnosti, shora omezena.

Dvojitá speciální teorie relativity zavedená v hybnostním sektoru nám neříká nic o tom, jak tuto teorii zavést na konfiguračním prostoru, to jest o tom, jak doplnit algebru generátorů symetrie o operátory reprezentující polohu.

Jedna z možností [4], [5], [6], [7], [8], jak je možné rozšířit algebru generátorů symetrie (popisujících hybnostní sektor) o operátory reprezentující polohy, využívá struktury Hopfovy algebry. Tento přístup využívá toho, že namísto abychom začali s algebrou generátorů symetrie, začínáme s Hopfovou algebrou, která má bohatší strukturu a obsahuje více informací než algebra. Tato bohatší struktura nám umožňuje vytvořit takzvanou duální Hopfovu algebru, kterou můžeme užít k definici algebry operátorů poloh a navíc nám umožňuje vytvořit z algebry generátorů symetrie a vzniklé algebry operátorů poloh jedinou algebru, která obsahuje obě tyto algebry jako podalgebry. Lze ukázat, že takto vytvořená algebra splňuje přinejmenším některé z požadavků kladených na algebru operátorů popisujících dvojitou speciální teorii relativity, jako je například existence maximální hybnosti a to, že limitou pro velké vzdálenosti, to jest limitou $L_p \to 0$, získáme algebru operátorů popisující speciální teorii relativity. Taková algebra je vhodným kandidátem na algebru operátorů popisující dvojitou speciální teorii relativity.

Tato práce se zabývá možností využití struktury Hopfovy algebry při konstrukci algebry operátorů speciální teorie relativity a možností zobecnění tohoto postupu na případ konstrukce algebry operátorů dvojité speciální teorie relativity. Aby nebyly výpočty příliš komplikované, uvažuje se pouze model s jednou časovou a jednou prostorovou dimenzí. V celé práci budeme navíc předpokládat jednotky, ve kterých je rychlost světla a Planckova konstanta rovna jedné.

Práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola je věnována stručnému popisu matematického aparátu Hopfových algeber potřebného v dalším textu.

Druhá kapitola se zabývá využitím Hopfovy algebry při konstrukci algebry operátorů popisující speciální teorii relativity. V této kapitole sestrojíme z Hopfovy algebry zavedené na algebře generátorů symetrie speciální teorie relativity algebru operátorů zahrnující jak tyto generátory symetrie, tak operátory polohy. Tuto algebru navíc doplníme o operaci $*$, která bude operátoru přiřazovat operátor k němu adjungovaný, a dále sestrojíme souřadnicovou reprezentaci této algebry (zavedenou na polynomech v souřadnicích). Hopfova algebra $U(p(1,1))$, která je Hopfovou algebrou zavedenou na algebře generátorů symetrie, je v této kapitole vytvořena kontrakcí Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ zavedené na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $so(2,1)$.

Ve třetí kapitole užijeme analogického postupu jako v druhé kapitole, a z Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$, která je Hopfovou algebrou zavedenou na algebře generátorů symetrie dvojité speciální teorie relativity, vytvoříme algebru operátorů popisující dvojitou speciální teorii relativity. Stejným způsobem, jako ve druhé kapitole zavedeme také operaci $*$ a naznačíme, jakým způsobem lze definovat reprezentaci této algebry, která bude analogií souřadnicové reprezentace zavedené ve druhé kapitole. Hopfova algebra $U_q(p(1,1))$ je vytvořena kontrakcí Hopfovy algebry $U_q(so(2,1))$, která je q-deformovanou Hopfovou algebrou získanou z Lieovy algebry $so(2,1)$ postupem, který zavedl Drinfeld a Jimbo.

Struktura druhé a třetí kapitoly byla volena tak, aby si byly postupy a výpočty užité při konstrukci speciální teorie relativity v kapitole II a postupy a výpočty užité při konstrukci dvojité speciální teorie relativity v kapitole III co nejpodobnější.

I Hopfova algebra

V této kapitole se pokusíme stručně vyložit definici Hopfovy algebry, některé její vlastnosti a také se zmíníme o některých souvisejících matematických strukturách, které jsou užity v textu diplomové práce. Budeme pracovat výhradně s vektorovými prostory zavedenými nad tělesem komplexních čísel, ačkoliv většinu z definic lze zobecnit i pro jiná tělesa. Při výkladu bude kladen důraz na některé postupy, které budeme později užívat.

I.1 Algebra

(Asociativní) algebra (s jednotkou) je vektorový prostor H, v našem případě nad tělesem komplexních čísel, na kterém je zavedeno násobení dvou prvků, a ve kterém existuje jednotkový prvek. Jednotkový prvek $\mathbf{1}$ budeme reprezentovat s pomocí lineárního zobrazení η, nazývaného jednotka, z komplexních čísel do algebry H, pro které platí $\eta(\alpha) = \alpha\mathbf{1}$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$. Algebra H je tedy vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$, spolu se dvěma lineárními zobrazeními

$$\cdot : H \otimes H \to H, \qquad\qquad \eta : \mathbb{C} \to H. \tag{I.1}$$

Je vhodné zdůraznit, že tenzorový součin v definici násobení spolu s linearitou tohoto zobrazení říká, že toto zobrazení je bilineární. Tato zobrazení musí splňovat axiomy

$$\begin{aligned} \cdot(id \otimes \cdot) &= \cdot(\cdot \otimes id), \\ \cdot(\eta \otimes id) = id &= \cdot(id \otimes \eta), \end{aligned} \tag{I.2}$$

kde jsme symbolem id označili identickou operaci. V druhém z axiomů jsme s užitím násobení vektoru skalárem ztotožnili vektorový prostor $\mathbb{C} \otimes H$ vystupující nalevo s prostorem H uprostřed a s prostorem $H \otimes \mathbb{C}$ vystupujícím napravo. Význam prvního z axiomů je zřejmý, aplikujeme-li ho na prvky h, k, l z algebry H, čímž dostaneme

$$\cdot(id \otimes \cdot)(h \otimes k \otimes l) = \cdot(h \otimes k \cdot l) = h \cdot (k \cdot l) = (h \cdot k) \cdot l = \cdot(h \cdot k \otimes l) = \cdot(\cdot \otimes id)(h \otimes k \otimes l).$$

Tento axiom tedy vyjadřuje asociativitu násobení. Pro zestručnění zápisu budeme někdy tečku označující násobení vynechávat, stejně tak, jako budeme vynechávat závorky určující pořadí ve kterém máme prvky násobit, které jsou vzhledem k asociativitě násobení nadbytečné. Můžeme tedy psát

$$h \cdot (k \cdot l) = h(kl) = hkl = (hk)l = (h \cdot k) \cdot l.$$

Význam druhého z axiomů bude zřejmý, aplikujeme-li ho na prvek $1 \otimes h = h = h \otimes 1$, $h \in H$, čímž dostaneme

$$\mathbf{1}h = h = h\mathbf{1}.$$

Tento axiom tedy vyjadřuje vlastnosti jednotkového prvku.

Axiomy algebry (I.2) lze přehledně znázornit pomocí komutativních diagramů

$$\begin{tikzcd} & H \otimes H \otimes H \arrow[dl, "\cdot \otimes id"'] \arrow[dr, "id \otimes \cdot"] & \\ H \otimes H \arrow[dr, "\cdot"'] & & H \otimes H \arrow[dl, "\cdot"] \\ & H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{C} \otimes H \arrow[r, "\eta \otimes id"'] & H \otimes H \arrow[u, "\cdot"] & H \otimes \mathbb{C} \arrow[l, "id \otimes \eta"] \end{tikzcd}$$

kde diagram nalevo vyjadřuje asociativitu násobení a diagram napravo vyjadřuje vlastnosti jednotky.

Strukturu algebry můžeme zavést také na tenzorovém součinu této algebry, to jest na prostoru $H \otimes H$. Na tomto prostoru zavedeme násobení tak, že definujeme

$$(h_1 \otimes h_2)(k_1 \otimes k_2) = h_1k_1 \otimes h_2k_2, \tag{I.3}$$

kde $h_1 \otimes h_2$, $k_1 \otimes k_2 \in H \otimes H$, přičemž výrazy h_1k_1 a h_2k_2 mají význam násobení prvků v algebře H. Pro $h_1 \otimes h_2$, $k_1 \otimes k_2$, $l_1 \otimes l_2 \in H \otimes H$ dostáváme $[(h_1 \otimes h_2)(k_1 \otimes k_2)](l_1 \otimes l_2) = (h_1k_1 \otimes h_2k_2)(l_1 \otimes l_2) = (h_1k_1l_1 \otimes h_2k_2l_2) = (h_1 \otimes h_2)(k_1l_1 \otimes k_2l_2) = (h_1 \otimes h_2)[(k_1 \otimes k_2)(l_1 \otimes l_2)]$, asociativita tohoto násobení je tedy důsledkem asociativity násobení v algebře H. Jednotkovým prvkem této algebry je $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \in H \otimes H$, požadované vlastnosti tohoto jednotkového prvku $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})(h_1 \otimes h_2) = (h_1 \otimes h_2) = (h_1 \otimes h_2)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$, $h_1 \otimes h_2 \in H \otimes H$, plynou z vlastností jednotkového prvku algebry H.

Analogicky k tomu, jak jsme zavedli strukturu algebry na tenzorovém součinu $H \otimes H$, můžeme zavést strukturu algebry také na tenzorovém součinu $H^n = H \otimes H \otimes \cdots \otimes H$, to jest na n kopiích algebry H. Násobení v této algebře zavedeme předpisem

$$(h_1 \otimes h_2 \otimes \cdots \otimes h_n)(k_1 \otimes k_2 \otimes \cdots \otimes k_n) = h_1k_1 \otimes h_2k_2 \otimes \cdots \otimes h_nk_n,$$

kde $h_1 \otimes \cdots \otimes h_n$, $k_1 \otimes \cdots \otimes k_n \in H^n$. Jednotkovým prvkem bude pochopitelně prvek $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}$, tvořený n kopiemi jednotkového prvku algebry H.

Na několika místech budeme definovat algebry s jednotkou tak, že zadáme nějakou množinu generujících prvků. Aby byla zřejmá struktura a způsob zadání této algebry, vyložíme stručně obecný postup, který lze užít ke konstrukci takové algebry. Budeme uvažovat algebru s jednotkou zadanou pomocí n generujících prvků $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (generovanou n prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$). V prvním kroku konstrukce této algebry vytvoříme n-dimenzionální vektorový prostor V nad komplexními čísly, jehož bázové vektory označíme jako $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$, to znamená, že každému z generujících prvků přiřadíme jeden bázový vektor prostoru V. V dalším kroku vytvoříme vektorový prostor T, který definujeme předpisem

$$T = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots .$$

Ze způsobu definice tohoto vektorového prostoru je zřejmé, že se jedná o nekonečnědimenzionální vektorový prostor. Jako bázi v tomto vektorovém prostoru můžeme zvolit vektory $1 \in \mathbb{C}$; $\mathbf{e}_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$; $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \in V \otimes V$, $i, j = 1, \ldots, n$; $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \in V \otimes V \otimes V$, $i, j, k = 1, \ldots, n$; atd. Na vektorovém prostoru T můžeme zavést strukturu algebry tak, že za násobení v algebře budeme považovat tenzorový součin. Takto definované násobení, to jest zobrazení

$$\cdot : T \otimes T \ni (a, b) \rightarrow ab = a \otimes b \in T$$

je lineárním zobrazením, a je zřejmé, že je i asociativní, protože tenzorový součin je asociativní operací. Jednotkovým prvkem této algebry je prvek $\mathbf{1} \equiv 1 \in \mathbb{C}$, který splňuje $1 \otimes a = a = a \otimes 1$ pro všechna $a \in T$. Takto zavedenou algebru nazýváme tenzorovou algebrou. Tenzorový součin $\otimes$ můžeme v zápisu nahrazovat symbolem $\cdot$ značícím násobení v algebře, nebo ho můžeme zcela vynechávat. Bází této algebry, to jest algebry s jednotkou generovanou prvky $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$, jsou vektory $\mathbf{1}$; $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$; $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $i, j = 1, \ldots, n$; $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$, $i, j, k = 1, \ldots, n$; atd. Násobení těchto bázových prvků lze chápat jako jejich spojování, například vynásobením prvku $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ prvkem $\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5$ dostaneme $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5$.

Další trik, který budeme užívat při konstrukci algeber, bude vytváření takzvaných faktor algeber. Uvažujme, že máme algebru H. Oboustranný ideál I v této algebře je vektorový podprostor této algebry, který splňuje podmínky $HI \subset I$ a $IH \subset I$, to jest

$$h \cdot i \in I, \quad i \cdot h \in I \qquad \text{pro všechna } h \in H,\, i \in I. \tag{I.4}$$

Máme-li zadán oboustranný ideál I v algebře H, můžeme vytvořit novou algebru H', zavedenou na faktor prostoru H/I, to jest na množině tříd ekvivalence, které jsou určeny relací ekvivalence definovanou vztahem

$$h \sim k \Leftrightarrow h - k \in I,$$

kde $h,\, k \in H$. Označíme-li třídu ekvivalence příslušnou prvku $h \in H$ jako $[h]$, pak násobení prvků $[h]$, $[k]$ z algebry $H' = H/I$ definujeme vztahem

$$[h] \cdot [k] = [h \cdot k]. \tag{I.5}$$

Podmínka, že I musí být oboustranným ideálem je zavedena pro to, aby byla zajištěna nezávislost této definice na výběru prvku z třídy ekvivalence. Abychom prokázali tuto nezávislost, uvažujme prvky h, k z algebry H. Libovolné prvky $h' \in [h]$, $k' \in [k]$ se mohou od prvků h, k lišit pouze o prvky i_h, i_k z oboustranného ideálu I, můžeme tedy psát $h' = h + i_h$, $k' = k + i_k$, a pro součin těchto prvků dostaneme

$$h'k' = (h + i_h)(k + i_k) = hk + i_h k + h i_k + i_h i_k = hk + i,$$

kde jsme označili $i = i_h k + h i_k + i_h i_k$. Z definice oboustranného ideálu (I.4) plyne $i \in I$, $h'k'$ tedy patří do stejné třídy ekvivalence jako hk. Asociativita násobení zavedeného ve faktor algebře vztahem (I.5) je důsledkem asociativity násobení v algebře H, protože platí $([h][k])[l] = [hkl] = [h]([k][l])$. Jednotkovým prvkem je samozřejmě prvek $[\mathbf{1}]$.

Výše uvedeného postupu budeme užívat především v následujících situacích. Představme si, že máme algebru H, v níž vybereme m prvků $f_1, \ldots f_m$, o kterých prohlásíme, že jsou rovny nule. Předpokládáme tedy, že máme algebru, v níž platí

$$f_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{I.6}$$

Například můžeme uvažovat algebru (s jednotkou) generovanou třemi prvky a, b, c, ve které položíme

$$ab - ba - c = 0. \tag{I.7}$$

Exaktní matematický postup, kterým vytvoříme z algebry H novou algebru H', v níž platí podmínky (I.6) je následující. Vytvoříme oboustranný ideál generovaný prvky f_i, $i = 1, \ldots, n$, který je definován jako množina

$$I = HBH = \{h \cdot \beta^i f_i \cdot h';\, h,\, h' \in H,\, \beta^i \in \mathbb{C},\, i = 1, \ldots, m\}, \tag{I.8}$$

kde B je vektorový prostor získaný jako lineární obal vektorů f_i, $i = 1, \ldots, m$. Takto zavedená množina je opravdu oboustranným ideálem, protože platí $HI = HHBH \subset HBH = I$ a podobně můžeme ukázat i to, že $IH \subset I$. Požadovaná algebra H', ve které platí podmínky (I.6) je pak faktor algebrou algebry H a vytvořeného oboustranného ideálu I. Prvky f_i, $i = 1, \ldots, m$ jsou v této algebře rovny nule, protože jsou prvky oboustranného ideálu I, a patří tudíž do třídy ekvivalence přiřazené nulovému vektoru v algebře H', tj. $[f_i] = [0]$. Nule jsou samozřejmě rovny také všechny prvky tvaru hf_ih', h, $h' \in H$, protože jsou taktéž prvky ideálu I, a je to vidět také z toho, že $[hf_ih'] = [h][f_i][h'] = [h][0][h'] = [0]$.

Uvedené postupy, to jest vytváření algeber generovaných určitou množinou prvků, ze kterých můžeme vytvořit další faktor algebry tak, že některé z prvků položíme rovny nule, pro nás budou mocným nástrojem při dalších výpočtech. O tom, jak lze tyto postupy užít v případě dalších algebraických struktur, popřípadě o tom, jak je třeba omezit tvar podmínek (I.6), se ještě na patřičných místech zmíníme.

I.2 Koalgebra

Koalgebra H je vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel spolu se zobrazením Δ, nazývaným konásobení, a se zobrazením ϵ, nazývaným kojednotka. Tyto zobrazení jsou lineárními zobrazeními

$$\Delta : H \to H \otimes H, \qquad\qquad \epsilon : H \to \mathbb{C}, \tag{I.9}$$

které splňují axiomy

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta &= (id \otimes \Delta)\Delta,\\ (\epsilon \otimes id)\Delta = id &= (id \otimes \epsilon)\Delta,\end{aligned} \tag{I.10}$$

přičemž v druhém z axiomů je třeba ztotožnit $\mathbb{C} \otimes H = H = H \otimes \mathbb{C}$ stejným způsobem, jak jsme učinili v druhém z axiomů (I.2) algebry.

Protože je zobrazení Δ lineární, lze prvek $\Delta h \in H \otimes H$, $h \in H$ vyjádřit jako součet prvků tvaru $h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, kde $h_{(1)}$, $h_{(2)} \in H$, čehož využijeme k tomu, abychom konásobení aplikované na prvek h koalgebry H zapsali jako

$$\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)} = h_{(1)} \otimes h_{(2)},$$

přičemž znaménko sumace budeme obvykle, z důvodu zestručnění zápisu, vynechávat, tak jak jsme učinili ve výrazu úplně napravo. S užitím této konvence přepíšeme první z axiomů (I.10) do tvaru

$$\begin{aligned}h_{(1)(1)} \otimes h_{(1)(2)} \otimes h_{(2)} &= (\Delta \otimes id)(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) = (\Delta \otimes id)\Delta h\\ &= (id \otimes \Delta)\Delta h = (id \otimes \Delta)(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) = h_{(1)} \otimes h_{(2)(1)} \otimes h_{(2)(2)},\end{aligned}$$

kde $h \in H$. Tento axiom vyjadřuje to, že v případě opakované aplikace konásobení na prvek h nezáleží na tom, na kterou z pozic v tenzorovém součinu toto konásobení aplikujeme. Tuto vlastnost nazýváme koasociativitou konásobení a umožňuje nám zavést značení

$$\Delta^2 h = (\Delta\otimes id)\Delta h = (id\otimes\Delta)\Delta h = h_{(1)(1)}\otimes h_{(1)(2)}\otimes h_{(2)} = h_{(1)}\otimes h_{(2)(1)}\otimes h_{(2)(2)} = h_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes h_{(3)},$$

kde $h \in H$. Tento způsob značení rozšíříme i na případ $(n-1)$-násobné aplikace konásobení, které budeme rozepisovat jako

$$\Delta^{(n-1)} h = h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes \cdots \otimes h_{(n)},$$

kde $h \in H$. Druhý z axiomů (I.10) koalgebry, zapsaný pomocí této konvence, je

$$\begin{aligned}\epsilon(h_{(1)})h_{(2)} &= \epsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = (\epsilon \otimes id)(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) = (\epsilon \otimes id)\Delta h = h\\ &= (id \otimes \epsilon)\Delta h = (id \otimes \epsilon)(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) = h_{(1)} \otimes \epsilon(h_{(2)}) = h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}),\end{aligned}$$

kde $h \in H$.

Stejně, jako v případě axiomů algebry, lze axiomy (I.10) koalgebry znázornit pomocí komutativních diagramů

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H\otimes H\otimes H & \\ H\otimes H \arrow[ur, "\Delta\otimes id"] & & H\otimes H \arrow[ul, "id\otimes\Delta"'] \\ & H \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & H \arrow[d, "\Delta"] & \\ \mathbb{C}\otimes H \arrow[ur] & H\otimes H \arrow[l, "\epsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\epsilon"'] & H\otimes\mathbb{C} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

přičemž diagram nalevo vyjadřuje koasociativitu konásobení a diagram napravo vyjadřuje vlastnosti kojednotky. Mezi výrazy (I.1) a diagramy definujícími algebru a výrazy (I.9) a diagramy definujícími koalgebru je zřejmý určitý druh symetrie. Pro tyto výrazy a diagramy platí to, že záměnou $\cdot \leftrightarrow \Delta$, $\eta \leftrightarrow \epsilon$ a otočením směru všech šipek, a to jak ve výrazech (I.1), (I.9) tak v komutativních diagramech, získáme z výrazů definujících algebru výrazy definující koalgebru a z výrazů definujících koalgebru získáme výrazy definující algebru. Z tohoto pohledu lze na algebru a koalgebru nahlížet jako na struktury, které jsou v jistém smyslu duální.

I.3 Bialgebra

Bialgebra H je vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel, který je zároveň algebrou a koalgebrou. Struktura algebry a koalgebry musí navíc splňovat určité podmínky kompatibility. Podmínkou kompatibility algebry s koalgebrou je to, že zobrazení konásobení Δ a kojednotka ϵ jsou homomorfismy algebry. To znamená, že tato zobrazení musí splňovat

$$\begin{aligned} \Delta(hk) &= (\Delta h)(\Delta k), \\ \epsilon(hk) &= \epsilon(h)\epsilon(k), \end{aligned} \tag{I.11}$$

pro všechna h, $k \in H$. Násobení v algebře $H \otimes H$, užité na pravé straně u první z podmínek, je násobením definovaným vztahem (I.3), násobení na pravé straně druhé z podmínek je násobením komplexních čísel. Aby byly konásobení a kojednotka homomorfismy algebry, musí být samozřejmě splněny také podmínky

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{1}) &= \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}, \\ \epsilon(\mathbf{1}) &= 1, \end{aligned} \tag{I.12}$$

určující chování těchto zobrazení na jednotkovém prvku algebry.

To, že konásobení a kojednotka jsou homomorfismy algebry, můžeme využít při zavádění struktury bialgebry na již známe struktuře algebry. V tomto případě totiž nemusíme konásobení a kojednotku definovat pro všechny prvky algebry, ale stačí, když tyto zobrazení určíme na vhodné podmnožině této algebry, a na zbývající prvky je pak rozšíříme jako homomorfismy algebry. Důležitým příkladem, ve kterém užijeme tohoto postupu, je právě tenzorová algebra popsaná v odstavci I.1. Uvažujme případ algebry H, generované n prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Strukturu bialgebry na této algebře můžeme zadat tak, že určíme konásobení a kojednotku na prvcích $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, to znamená, že zadáme výrazy

$$\Delta\mathbf{e}_i, \quad \epsilon(\mathbf{e}_i), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{I.13}$$

Tyto výrazy spolu s výrazy (I.12), určujícími konásobení a kojednotku pro jednotkový prvek, poskytují dostatečné množství informací pro to, abychom mohli konásobení a kojednotku vyčíslit na libovolném prvku algebry H. Navíc z platnosti axiomů (I.10) pro prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ plyne platnost těchto axiomů i pro všechny zbývající prvky algebry H. Abychom ukázali, že tomu tak opravdu je, ukážeme, že konásobení a kojednotku můžeme vyčíslit na všech bázových vektorech, a že axiomy (I.10) jsou pro tyto bázové vektory splněny, což je vzhledem k linearitě konásobení a kojednotky dostatečnou podmínkou pro to, abychom je mohli vyčíslit na všech prvcích algebry, popřípadě pro to, aby byly axiomy koalgebry platné pro celou algebru. Pro jednotkový prvek je konásobení a kojednotka určena vztahy (I.12) a axiomy (I.10) jsou také splněny. Pro vektory $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ je konásobení a kojednotka zadána vztahy (I.13), platnost axiomů (I.10) pro tyto prvky je výchozím předpokladem. Zbývající bázové vektory algebry H mají tvar $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots$. Konásobení a kojednotku pro tyto vektory vypočteme jako

$$\begin{aligned}&\Delta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}) = (\Delta\mathbf{e}_{i_1})(\Delta\mathbf{e}_{i_2})\cdots(\Delta\mathbf{e}_{i_k}) = \mathbf{e}_{i_1(1)}\mathbf{e}_{i_2(1)}\cdots\mathbf{e}_{i_k(1)} \otimes \mathbf{e}_{i_1(2)}\mathbf{e}_{i_2(2)}\cdots\mathbf{e}_{i_k(2)}\\ &\epsilon(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}) = \epsilon(\mathbf{e}_{i_1})\epsilon(\mathbf{e}_{i_2})\cdots\epsilon(\mathbf{e}_{i_k}).\end{aligned} \tag{I.14}$$

Pro první z axiomů (I.10) dostáváme

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes id)\Delta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}) &= [(\Delta\otimes id)\Delta\mathbf{e}_{i_1}][(\Delta\otimes id)\Delta\mathbf{e}_{i_2}]\cdots[(\Delta\otimes id)\Delta\mathbf{e}_{i_k}]\\ &= [(id\otimes\Delta)\Delta\mathbf{e}_{i_1}][(id\otimes\Delta)\Delta\mathbf{e}_{i_2}]\cdots[(id\otimes\Delta)\Delta\mathbf{e}_{i_k}] = (id\otimes\Delta)\Delta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}),\end{aligned}$$

a podobně bychom mohli ukázat i platnost druhého z axiomů. Axiomy koalgebry jsou tedy splněny pro všechny bázové vektory, a tudíž i pro celou algebru H.

Nyní se podíváme, jak to bude vypadat, pokud se pokusíme vytvořit z bialgebry faktor algebru. Jak víme z odstavce I.1, faktor algebra H' je algebra $H' = H/I$, kde H je nějaká algebra a I je oboustranný ideál v této algebře. Uvažujme algebru zavedenou na tenzorovém součinu této faktor algebry, to jest algebru $H' \otimes H'$, s násobením (I.3). Tuto algebru můžeme vytvořit také jako faktor algebru algebry $H \otimes H$ a nějakého oboustranného ideálu I', to jest jako algebru $(H\otimes H)/I'$. Prvek $h\otimes i$, $h \in H$, $i \in I$ z algebry $H\otimes H$ patří v algebře $H'\otimes H'$ do třídy ekvivalence $[h] \otimes [i] = [h] \otimes [0] = [0 \otimes 0]$. Prvky tvaru $h \otimes i \in H \otimes I$ tedy musí ležet v ideálu I', platí tedy $H \otimes I \subset I'$. Stejným způsobem bychom mohli ukázat i to, že $I \otimes H \subset I'$. Nyní uvažujme třídy ekvivalence $[h]$ a $[k]$ z algebry H' a vyberme z každé třídy ekvivalence dva prvky h, $h' \in [h]$ a k, $k' \in [k]$. Prvky h, h' a k, k' se od sebe mohou lišit pouze o nějaký prvek oboustranného ideálu I, můžeme tedy psát $h' = h + i_h$, $k' = k + i_k$, $i_h, i_k \in I$. Pomocí těchto výrazů rozepíšeme prvek $h' \otimes k'$ jako

$$h' \otimes k' = (h + i_h) \otimes (k + i_k) = h \otimes k + h \otimes i_k + i_h \otimes k + i_h \otimes i_k = h \otimes k + i',$$

kde jsme označili $i' = h\otimes i_k + i_h\otimes k + i_h\otimes i_k \in H\otimes I + I\otimes H$. Nejmenším vektorovým podprostorem I', který indukuje ekvivalenci $h' \otimes k' \sim h \otimes k$, a který obsahuje jak $H \otimes I$ tak $I \otimes H$, je právě $I' = H \otimes I + I \otimes H$. Podmínka $(H \otimes H)I' = (H \otimes H)(H \otimes I + I \otimes H) = HH \otimes HI + HI \otimes HH \subset H\otimes I + I\otimes H = I'$ a stejně tak podmínka $I'(H \otimes H) \subset I'$ je splněna, vektorový podprostor I' tedy splňuje i to, že je oboustranným ideálem v algebře $H \otimes H$. I' je tedy hledaným oboustranným ideálem, a můžeme tudíž psát $H' \otimes H' = H/I \otimes H/I = (H \otimes H)/(H \otimes I + I \otimes H)$. Aby byla kojednotka dobře definována na faktor algebře, nesmí její hodnota záviset na výběru prvku z třídy ekvivalence příslušné nějakému prvku $[h] \in H'$. Proto pro prvky $h \in H$ a $h + i \in H$, $i \in I$ ze stejné třídy ekvivalence musí platit $\epsilon(h + i) = \epsilon(h) + \epsilon(i) = \epsilon(h)$, což vede k podmínce

$$\epsilon(i) = 0 \qquad \text{pro všechna } i \in I. \tag{I.15}$$

Podobně můžeme vyšetřit, jaká podmínka musí být splněna pro to, aby bylo konásobení, které na faktor algebře H' zavedeme vztahem

$$\Delta[h] = [\Delta h] = [h_{(1)} \otimes h_{(2)}] = [h_{(1)}] \otimes [h_{(2)}],$$

kde $h \in H$, dobře definováno. Pro prvky h, $h+i \in [h]$, $i \in I$ musí být splněno $\Delta(h+i) = \Delta h + \Delta i \sim \Delta h$. Je tedy zřejmé, že Δi musí být prvkem oboustranného ideálu I', musí tedy být splněna podmínka

$$\Delta i \in H \otimes I + I \otimes H \qquad \text{pro všechna } i \in I. \tag{I.16}$$

V případě faktor algebry získané zavedením podmínek (I.6), to jest v případě, kdy je oboustranný ideál zadán jako (I.8), je možno podmínky (I.15), (I.16) přepsat do podoby podmínek omezujících tvar zadávajících podmínek (I.6). Místo podmínek (I.15), (I.16) můžeme uvažovat podmínky

$$\begin{aligned} &\epsilon(f_i) = 0 \qquad \text{pro všechna } i = 1, \ldots, m, \\ &f_i = 0 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, m \quad \Rightarrow \quad \Delta f_i = 0 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{I.17}$$

První z podmínek je nutná pro to, aby platilo (I.15), druhá podmínka, která je ekvivalentem (I.16), říká, že pokud jsou prvky f_i v algebře H' rovny nule, platí-li tedy $f_i \in [0]$, pak musí být nule rovny také všechny prvky Δf_i v algebře $H' \otimes H'$, musí tedy platit $\Delta f_i \in [0 \otimes 0] = H \otimes I + I \otimes H$.

Například v algebře (I.7) můžeme zavést konásobení a kojednotku

$$\epsilon(a) = \epsilon(b) = \epsilon(c) = 0, \quad \Delta a = a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a, \quad \Delta b = b \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes b, \quad \Delta c = c \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes c. \tag{I.18}$$

Pro prvky a, b, c jsou axiomy (I.10) splněny, například vyčíslíme-li je na prvku a, tak dostaneme

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta a &= (\Delta \otimes id)(a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a) = a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes a \\ &= (id \otimes \Delta)(a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a) = (id \otimes \Delta)\Delta a, \\ (\epsilon \otimes id)\Delta a &= (\epsilon \otimes id)(a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a) = \epsilon(a)\mathbf{1} + \epsilon(\mathbf{1})a = a \\ &= a\epsilon(\mathbf{1}) + \mathbf{1}\epsilon(a) = (id \otimes \epsilon)(a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a) = (id \otimes \epsilon)\Delta a. \end{aligned}$$

Z toho, co bylo v tomto odstavci zmíněno o zavádění konásobení a kojednotky na algebry generované nějakými prvky, plyne, že výrazy (I.18) definují strukturu bialgebry na celé algebře generované prvky a, b, c. Abychom mohli zavést (I.7), musíme ověřit, že jsou podmínky (I.17) splněny, musíme tedy ověřit nulovost výrazů

$$\begin{aligned} &\epsilon(ab - ba - c) = \epsilon(a)\epsilon(b) - \epsilon(b)\epsilon(a) - \epsilon(c) = 0, \\ &\Delta(ab - ba - c) = (\Delta a)(\Delta b) - (\Delta b)(\Delta a) - \Delta c \\ &\quad = (a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a)(b \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes b) - (b \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes b)(a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a) - (c \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes c) \\ &\quad = ab \otimes \mathbf{1} + a \otimes b + b \otimes a + \mathbf{1} \otimes ab - ba \otimes \mathbf{1} - b \otimes a - a \otimes b - \mathbf{1} \otimes ba - c \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes c \\ &\quad = (\underbrace{ab - ba - c}_{=0}) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (\underbrace{ab - ba - c}_{=0}) = 0. \end{aligned}$$

Podmínky (I.17) jsou v tomto případě splněny, vztahy (I.7) a (I.18) tudíž definují bialgebru.

I.4 Hopfova algebra

Hopfova algebra H je bialgebra, na které je zavedeno zobrazení nazývané antipode. Toto zobrazení, které budeme značit S, je lineárním zobrazením

$$S : H \to H, \tag{I.19}$$

které splňuje axiom

$$\cdot(S \otimes id)\Delta = \eta \circ \epsilon = \cdot(id \otimes S)\Delta, \tag{I.20}$$

Výraz $\eta \circ \epsilon(h)$, $h \in H$, vystupující v této definici, bychom mohli zapsat také ve tvaru $\mathbf{1}\epsilon(h)$. S užitím konvence, kterou jsme přijali pro značení konásobení, tento axiom zapíšeme jako

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = \mathbf{1}\epsilon(h) = h_{(1)}S(h_{(2)}),$$

kde $h \in H$. Lze ukázat, že z axiomů Hopfovy algebry (I.2), (I.10) a (I.20) plyne to, že pokud k bialgebře existuje antipode, můžeme-li z ní tedy vytvořit Hopfovu algebru, pak je tento antipode určen jednoznačně. Navíc lze ukázat, že antipode splňuje

$$S(hk) = S(k)S(h), \qquad \tau\Delta S = (S \otimes S)\Delta, \qquad S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \qquad \epsilon(S(h)) = \epsilon(h), \tag{I.21}$$

kde h, $k \in H$, a kde τ značí lineární zobrazení přehazující členy v tenzorovém součinu, to jest $\tau(h \otimes k) = k \otimes h$. První z výrazů říká, že antipode je antihomomorfismem algebry, druhý z výrazů zapíšeme, s užitím přijaté konvence, jako $S(h)_{(2)} \otimes S(h)_{(1)} = S(h_{(1)}) \otimes S(h_{(2)})$, $h \in H$, a říká, že aplikace antipodu následovaná aplikací konásobení je ekvivalentní aplikaci konásobení následované aplikaci antipodu na každou z pozic tenzorového součinu v algebře $H \otimes H$, s tím, že tyto složky přehodíme. Poslední dva z výrazů vyjadřují chování antipodu pro jednotkový prvek a pro kojednotku.

Podobně jako jsme v případě, kdy jsme zaváděli strukturu bialgebry na již existující struktuře algebry, využili toho, že konásobení a kojednotka jsou homomorfismy algebry, můžeme při zavádění struktury Hopfovy algebry na již existující struktuře bialgebry využít toho, že antipode je antihomomorfismem algebry. Většinou tedy bude stačit, pokud zadáme antipode na vhodné podmnožině algebry, a na zbývající prvky ho pak zavedeme jako antihomomorfismus algebry. Důležitým příkladem, kdy využijeme tohoto postupu, bude bialgebra H generovaná n prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, s konásobením a kojednotkou zadanou vztahy (I.13), (I.14). Stejně tak, jak bylo postačující zadat konásobení a kojednotku pouze na prvcích $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, bude stačit zadat výrazy pro antipode pouze pro tyto prvky, bude tedy stačit, zadáme-li výrazy

$$S(\mathbf{e}_i), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{I.22}$$

Taktéž lze ukázat, že jsou-li splněny axiomy (I.20) pro prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, pak jsou tyto axiomy splněny v celé bialgebře H. Aby tomu tak opravdu bylo, musíme, stejně tak jako v případě konásobení a kojednotky, ukázat, že antipode můžeme vyčíslit na všech bázových vektorech, a že axiomy (I.20) jsou pro tyto bázové vektory splněny. Pro prvek $\mathbf{1}$ je antipode určen třetím z výrazů (I.21), a axiom (I.20) je taktéž splněn. Pro prvky $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ je antipode zadán výrazy (I.22), a platnost axiomů (I.20) je výchozím předpokladem. Pro zbývající bázové vektory, které jsou tvaru $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \cdots \mathbf{e}_{i_k}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots$, vyčíslíme antipode pomocí vztahu

$$S(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \cdots \mathbf{e}_{i_k}) = S(\mathbf{e}_{i_k}) \cdots S(\mathbf{e}_{i_2})S(\mathbf{e}_{i_1}). \tag{I.23}$$

Pro první polovinu axiomu (I.20), aplikovanou na tyto vektory, dostaneme

$$\begin{aligned}\cdot(S \otimes id)\Delta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \cdots \mathbf{e}_{i_k}) &= S(\mathbf{e}_{i_k(1)}) \cdots S(\mathbf{e}_{i_2(1)})S(\mathbf{e}_{i_1(1)})\mathbf{e}_{i_1(2)}\mathbf{e}_{i_2(2)} \cdots \mathbf{e}_{i_k(2)} \\ &= \mathbf{1}\epsilon(\mathbf{e}_{i_1})\epsilon(\mathbf{e}_{i_2}) \cdots \epsilon(\mathbf{e}_{i_k}) = \mathbf{1}\epsilon(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \cdots \mathbf{e}_{i_k}),\end{aligned}$$

a podobně bychom mohli dokázat i platnost druhé poloviny axiomu. Antipod je tedy zadán na celé bialgebře H a axiom (I.20) je platný pro celou bialgebru.

Užijeme-li Hopfovu algebru H k tomu, abychom z ní vytvořili bialgebru H', vzniklou jako faktor algebra bialgebry H a oboustranného ideálu I pomocí postupu uvedeného v odstavcích I.1 a I.3, a budeme-li navíc požadovat to, aby byla vzniklá bialgebra také Hopfovou algebrou, musíme dát pozor na to, aby byl antipode na takto vzniklé bialgebře dobře definován. Pro prvky $[h]$ z bialgebry $H' = H/I$ zavedeme antipode vztahem

$$S([h]) = [S(h)],$$

kde $h \in H$. Tato definice musí být nezávislá na výběru prvku v dané třídě ekvivalence, pro dva prvky h, $h + i \in H$, $i \in I$ ze stejné třídy ekvivalence tedy musíme dostat stejný výsledek, což znamená, že musí platit $S(h + i) = S(h) + S(i) \sim S(h)$, z čehož plyne požadavek

$$S(i) \in I \qquad \text{pro všechna } i \in I. \tag{I.24}$$

V případě faktor algebry získané zavedením podmínek (I.6), to jest tehdy, kdy je oboustranný ideál určen vztahem (I.8), budeme místo podmínky (I.24) uvažovat podmínku

$$f_i = 0 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, m \quad \Rightarrow \quad S(f_i) = 0 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, m, \tag{I.25}$$

omezující tvar zadávajících podmínek (I.6). Splnění (I.24) je pak důsledkem této podmínky a způsobu konstrukce oboustranného ideálu (I.8).

Například v bialgebře (I.7), (I.18) můžeme zavést antipode

$$S(a) = -a, \qquad S(b) = -b, \qquad S(c) = -c. \tag{I.26}$$

Takto zavedený antipode splňuje axiom (I.20) pro prvky a, b, c, například pro prvek a dostáváme

$$\begin{aligned} \cdot(S \otimes id)\Delta a &= \cdot(S \otimes id)(a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a) = S(a)\mathbf{1} + S(\mathbf{1})a = -a + a = 0 = \epsilon(a) \\ &= a - a = aS(\mathbf{1}) + \mathbf{1}S(a) = \cdot(id \otimes S)(a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a) = \cdot(id \otimes S)\Delta a, \end{aligned}$$

a vzhledem k tomu, co jsme uvedli v této kapitole, je tento axiom splněn pro celou tenzorovou algebru generovanou prvky a, b, c. Abychom mohli zavést podmínku (I.7), musíme ověřit platnost (I.25), to jest nulovost výrazu

$$S(ab - ba - c) = S(b)S(a) - S(a)S(b) - S(c) = (-b)(-a) - (-a)(-b) - (-c) = -(ab - ba - c) = 0.$$

Tento výraz je nulový, výrazy (I.7), (I.18) a (I.26) tedy definují Hopfovu algebru.

I.5 $*$-Hopfova algebra

Další struktura, o kterou můžeme rozšířit Hopfovu algebru, je $*$-struktura. Hopfovu algebru, na které je zavedena tato struktura, budeme značit jako $*$-Hopfovu algebru. $*$-struktura, na Hopfově algebře H, je zobrazení

$$* : H \to H, \tag{I.27}$$

které budeme nazývat operace $*$. Místo toho, abychom toto zobrazení aplikované na prvek $h \in H$ psali tak, že ho napíšeme před tento prvek, to jest místo toho abychom psali $*h$, budeme někdy toto zobrazení psát do exponentu, budeme tedy psát $*h = h^*$. Toto zobrazení je antilineární antihomomorfismus algebry, což znamená, že pro h, $k \in H$, α, $\beta \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} (\alpha h + \beta k)^* &= \overline{\alpha} h^* + \overline{\beta} k^*, \\ (hk)^* &= k^* h^*, \end{aligned} \tag{I.28}$$

kde pruh nad α a β značí komplexní sdružení. Dále musí operace $*$ splňovat axiomy

$$\begin{aligned}
*^2 &= ** = id, \\
(S \circ *)^2 &= S * S* = id, \\
\epsilon(h^*) &= \overline{\epsilon(h)}, \\
\Delta h^* &= (\Delta h)^{*\otimes *},
\end{aligned} \tag{I.29}$$

kde $h \in H$. První axiom říká, že dvojnásobným užitím operace $*$ na nějaký prvek získáme opět původní prvek. Jeden z důsledků druhého axiomu je například to, že lineární zobrazení antipode S je invertibilní s inverzí $S^{-1} = *S*$. Poslední dva axiomy určují chování operace $*$ na struktuře koalgebry, přičemž pruh nad $\epsilon(h)$ značí komplexní sdružení a $(\Delta h)^{*\otimes *}$ je jiný zápis pro $(* \otimes *)\Delta h = h^*_{(1)} \otimes h^*_{(2)}$, to jest pro to, že operaci $*$ aplikujeme na každou ze složek v tenzorovém součinu. Lze ukázat, že pro jednotkový prvek musí platit $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$.

Je-li H pouze algebrou a operace $*$, zavedená na této algebře, splňuje (I.28) a první z axiomů (I.29), pak budeme tuto algebru nazývat $*$-algebrou. Lze ukázat, že pokud je H $*$-algebrou, pak operace $* \otimes *$, užitá v posledním z axiomů (I.29), zavádí strukturu $*$-algebry také na algebře $H \otimes H$, pro níž jsme násobení definovali vztahem (I.3).

Operace $*$ je antihomomorfismem algebry, čehož můžeme využít při jejím zavádění na již existující struktuře Hopfovy algebry. Myšlenka, kterou užijeme, bude stejná jako v případě, kdy jsme zaváděli strukturu bialgebry na již existující struktuře algebry, nebo v případě, kdy jsme zaváděli strukturu Hopfovy algebry na již existující struktuře bialgebry. Většinou tedy bude stačit, zadáme-li operaci $*$ na vhodné podmnožině Hopfovy algebry, a na zbývající prvky ji pak rozšíříme s užitím toho, že je antihomomorfismem algebry, stejně tak jako antipode, a toho, že je antilineárním zobrazením. Tento postup můžeme využít v případě Hopfovy algebry H generované n prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, s konásobením, kojednotkou a antipodem zadaným vztahy (I.13), (I.14), (I.22), (I.23). V tomto případě bude stačit, zadáme-li operaci $*$ pouze na prvcích $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, zadáme-li tedy výrazy

$$\mathbf{e}_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{I.30}$$

takové, že axiomy (I.29) jsou pro ně splněny. Hodnotu operace $*$, stejně tak jako splnění axiomů (I.29), pro zbývající prvky Hopfovy algebry jsou pak důsledkem (I.30) a vlastností operace $*$. Abychom ukázali, že tomu tak opravdu je, vyčíslíme operaci $*$ pro všechny bázové vektory Hopfovy algebry, a ukážeme, že axiomy (I.29) jsou pro tyto vektory splněny, což vzhledem k antilinearitě operace $*$ určuje její hodnotu a zajišťuje platnost axiomů na všech prvcích Hopfovy algebry. Pro jednotkový prvek platí $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ a axiomy můžeme ověřit dosazením, pro $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ je operace $*$ zadána vztahy (I.30) a splnění axiomů je výchozím předpokladem. Pro zbývající bázové prvky, které jsou tvaru $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots$, vyčíslíme operaci $*$ pomocí vztahu

$$(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k})^* = \mathbf{e}_{i_k}^* \cdots \mathbf{e}_{i_2}^*\mathbf{e}_{i_1}^*. \tag{I.31}$$

To, že je takto definovaná operace $*$ opravdu antihomomorfismem, je zřejmé z této definice, axiomy (I.29) vyčíslené na bázových vektorech jsou

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k})^{**} &= (\mathbf{e}^*_{i_k}\cdots\mathbf{e}^*_{i_2}\mathbf{e}^*_{i_1})^* = \mathbf{e}^{**}_{i_1}\mathbf{e}^{**}_{i_2}\cdots\mathbf{e}^{**}_{i_k} = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k},\\
S*S*(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}) &= S*S(\mathbf{e}^*_{i_k}\cdots\mathbf{e}^*_{i_2}\mathbf{e}^*_{i_1}) = S*[S(\mathbf{e}^*_{i_1})S(\mathbf{e}^*_{i_2})\cdots S(\mathbf{e}^*_{i_k})]\\
&= S[S(\mathbf{e}^*_{i_k})^*\cdots S(\mathbf{e}^*_{i_2})^*S(\mathbf{e}^*_{i_1})^*] = (S*S*\mathbf{e}_{i_1})(S*S*\mathbf{e}_{i_2})\cdots(S*S*\mathbf{e}_{i_k})\\
&= \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k},\\
\epsilon[(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k})^*] &= \epsilon(\mathbf{e}^*_{i_k}\cdots\mathbf{e}^*_{i_2}\mathbf{e}^*_{i_1}) = \overline{\epsilon(\mathbf{e}_{i_k})}\cdots\overline{\epsilon(\mathbf{e}_{i_2})}\,\overline{\epsilon(\mathbf{e}_{i_1})} = \overline{\epsilon(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k})},\\
\Delta[(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k})^*] &= \Delta(\mathbf{e}^*_{i_k}\cdots\mathbf{e}^*_{i_2}\mathbf{e}^*_{i_1}) = (\Delta\mathbf{e}^*_{i_k})\cdots\Delta(\mathbf{e}^*_{i_2})\Delta(\mathbf{e}^*_{i_1})\\
&= (\Delta\mathbf{e}_{i_k})^{*\otimes*}\cdots(\Delta\mathbf{e}_{i_2})^{*\otimes*}(\Delta\mathbf{e}_{i_1})^{*\otimes*} = [(\Delta\mathbf{e}_{i_1})(\Delta\mathbf{e}_{i_2})\cdots(\Delta\mathbf{e}_{i_k})]^{*\otimes*}.
\end{aligned}
$$

Operaci $*$ tedy můžeme vyčíslit na celé Hopfově algebře a axiomy (I.29) jsou rovněž splněny, vztahy (I.30) a (I.31) tedy definují strukturu $*$-Hopfovy algebry.

Nyní se podíváme, co musí být splněno pro to, abychom mohli postup vytváření faktor algeber, popsaný pro Hopfovy algebry v odstavcích I.1, I.3 a I.4, rozšířit i na případ $*$-Hopfovy algebry. Uvažujme Hopfovu algebru $H' = H/I$ vzniklou jako faktor algebra $*$-Hopfovy algebry H a oboustranného ideálu I. Na této Hopfově algebře zavedeme operaci $*$ pomocí vztahu

$$[h]^* = [h^*],$$

kde $h \in H$, $[h] \in H'$. Aby byla tato operace dobře definována, musíme pro dva prvky h, $h+i \in H$, $i \in I$ ze stejné třídy ekvivalence dostat ekvivalentní výsledky, musí tedy být splněno $(h+i)^* = h^* + i^* \sim h^*$, z čehož plyne podmínka

$$i^* \in I \qquad \text{pro všechna } i \in I. \tag{I.32}$$

V případě faktor algebry získané zavedením podmínek (I.6), kdy je oboustranný ideál určen vztahem (I.8), můžeme místo podmínky (I.32) uvažovat podmínku

$$f_i = 0 \text{ pro všechna } i = 1,\dots,m \quad \Rightarrow \quad f_i^* = 0 \text{ pro všechna } i = 1,\dots,m, \tag{I.33}$$

omezující tvar podmínek (I.6). Splnění (I.32) je pak důsledkem této podmínky, která říká, že pokud jsou všechna f_i rovna nule, pak musí být rovny nule také všechna f_i^*.

Například pro Hopfovu algebru (I.7), (I.18), (I.26) je možno operaci $*$ zavést vztahy

$$a^* = -a, \qquad\qquad b^* = -b, \qquad\qquad c^* = -c. \tag{I.34}$$

Axiomy (I.29) vyčíslené na prvku a jsou

$$
\begin{aligned}
**a &= *(-a) = a,\\
S*S*a &= S*S(-a) = S*a = S(-a) = a,\\
\epsilon(a^*) &= \epsilon(-a) = 0 = \overline{\epsilon(a)},\\
\Delta a^* &= \Delta(-a) = -a\otimes\mathbf{1} - \mathbf{1}\otimes a = a^*\otimes\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\otimes a^* = (\Delta a)^{*\otimes*},
\end{aligned}
$$

a podobně bychom mohli ukázat platnost těchto axiomů i pro zbývající prvky b a c. Jak bylo v tomto odstavci ukázáno, splnění axiomů (I.29) pro prvky a, b, c je dostatečnou podmínkou k tomu, aby byla operace $*$ definována ne celé Hopfově algebře generované prvky a, b, c. Abychom mohli zavést (I.7), musíme ověřit podmínku (I.33), to jest nulovost výrazu

$$(ab - ba - c)^* = b^*a^* - a^*b^* - c^* = (-b)(-a) - (-a)(-b) - (-c) = -(ab - ba - c) = 0.$$

Tento výraz je nulový, výrazy (I.7), (I.18), (I.26) a (I.34) tedy definují $*$-Hopfovu algebru.

I.6 Dualita Hopfových algeber

Důležitým pojmem v teorii Hopfových algeber je takzvaná dualita Hopfových algeber. Uvažujme dvě $*$-Hopfovy algebry H_A a H_B. Dále budeme předpokládat, že máme bilineární formu

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_A \otimes H_B \to \mathbb{C}, \tag{I.35}$$

to jest bilineární zobrazení, které každé dvojici prvků $a \in H_A$ a $b \in H_B$ přiřadí komplexní číslo $\langle a, b\rangle$. Pomocí této bilineární formy zavedeme i bilineární formu, která bude přiřazovat komplexní číslo každé dvojici prvků z prostorů $H_A^n = H_A \otimes H_A \otimes \cdots \otimes H_A$ a $H_B^n = H_B \otimes H_B \otimes \cdots \otimes H_B$, kde $n = 1, 2, \ldots$. Pro prvky z H_A^n a H_B^n ve tvaru $(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) \in H_A^n$ a $(b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_n) \in H_B^n$ definujeme

$$\langle a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n, b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_n\rangle = \langle a_1, b_1\rangle\langle a_2, b_2\rangle \cdots \langle a_n, b_n\rangle. \tag{I.36}$$

Protože libovolný prvek z H_A^n můžeme zapsat jako součet prvků tvaru $(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) \in H_A^n$, a taktéž libovolný prvek z H_B^n můžeme zapsat jako součet prvků tvaru $(b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_n) \in H_B^n$, můžeme, zobrazení (I.36) rozšířit na celé prostory H_A^n a H_B^n tak, že užijme bilinearity zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_A^n \otimes H_B^n \to \mathbb{C}$.

O $*$-Hopfových algebrách H_A a H_B řekneme, že jsou vzájemně duální, pokud bude bilineární forma (I.35) splňovat podmínky

$$\begin{aligned}
\langle a_1 a_2, b\rangle &= \langle a_1 \otimes a_2, \Delta b\rangle = \langle a_1, b_{(1)}\rangle\langle a_2, b_{(2)}\rangle, \\
\langle \Delta a, b_1 \otimes b_2\rangle &= \langle a_{(1)}, b_1\rangle\langle a_{(2)}, b_2\rangle = \langle a, b_1 b_2\rangle, \\
\epsilon(a) &= \langle a, \mathbf{1}\rangle, \\
\langle \mathbf{1}, b\rangle &= \epsilon(b), \\
\langle S(a), b\rangle &= \langle a, S(b)\rangle, \\
\langle a^*, b\rangle &= \overline{\langle a, S(b)^*\rangle},
\end{aligned} \tag{I.37}$$

pro všechna a, a_1, $a_2 \in H_A$ a b, b_1, $b_2 \in H_B$, přičemž jsme užili zavedeného značení $\Delta a = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$, $\Delta b = b_{(1)} \otimes b_{(2)}$, pruh nad poslední z podmínek má význam komplexního sdružení a v prvních dvou podmínkách jsme bilineární formu rozšířili na prostory $H_A \otimes H_A$ a $H_B \otimes H_B$ pomocí vztahu (I.36). Pokud budou H_A a H_B pouze bialgebrami a první čtyři podmínky z (I.37) budou splněny, pak budeme mluvit o dualitě bialgeber, podobně pokud budou H_A a H_B pouze Hopfovými algebrami a prvních pět podmínek z (I.37) bude splněno, pak budeme mluvit o dualitě Hopfových algeber.

Protože pro jednotkový prvek platí $\epsilon(\mathbf{1}) = 1$, dostáváme z třetí a čtvrté podmínky z (I.37) požadavek $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = 1$. Místo poslední z podmínek (I.37), která určuje dualitu $*$-struktury, můžeme užít podmínku $\langle a, b^*\rangle = \overline{\langle S(a)^*, b\rangle}$, jenž je ekvivalentní s původní podmínkou.

Dualita $*$-Hopfových algeber, popsaná uvedeným způsobem, není příliš zajímavou vlastností, protože v její definici není nic řečeno o tom, zda může být tato bilineární forma degenerovaná. Abychom získali smysluplnější definici duality $*$-Hopfových algeber, budeme požadovat, aby byla bilineární forma (I.35) nedegenerovaná, což znamená, že $\langle a, b\rangle = 0$ pro všechna $b \in H_B$ jen tehdy, když $a = 0$, a $\langle a, b\rangle = 0$ pro všechna $a \in H_A$ jen tehdy, když $b = 0$. Budeme-li uvažovat dualitu $*$-Hopfových algeber zahrnující tento požadavek, budeme říkat, že $*$-Hopfovy algebry jsou nedegenerovaně duální. Řekneme-li tedy, že $*$-Hopfovy algebry H_A a H_B jsou nedegenerovaně duální, tak to bude znamenat, že existuje nedegenerovaná bilineární forma (I.35), která splňuje požadavky (I.37).

Nyní předpokládejme, že máme $*$-Hopfovy algebry H_A, H_B a bilineární formu (I.35), která sice splňuje požadavky (I.37), ale která není nedegenerovaná. V tomto případě je možné sestrojit z $*$-Hopfových algeber H_A, H_B nové $*$-Hopfovy algebry H'_A a H'_B takové, že bilineární forma zúžená na tyto $*$-Hopfovy algebry je nedegenerovaná a splňuje podmínky (I.37). Získané $*$-Hopfovy algebry H'_A a H'_B tedy budou nedegenerovaně duální. Tyto nové $*$-Hopfovy algebry vytvoříme následujícím způsobem. Vezmeme jádra bilineární formy, to jest množiny

$$\begin{aligned} I_A &= \{a \in H_A; \langle a, b\rangle = 0 \text{ pro všechna } b \in H_B\}, \\ I_B &= \{b \in H_B; \langle a, b\rangle = 0 \text{ pro všechna } a \in H_A\}. \end{aligned} \tag{I.38}$$

Je zřejmé, že v případě, kdy je bilineární forma nedegenerovaná, obsahují množiny I_A a I_B pouze nulový vektor. Pro libovolné dva prvky i_1, $i_2 \in I_A$, dvě libovolná komplexní čísla α, $\beta \in \mathbb{C}$ platí

$$\langle \alpha i_1 + \beta i_2, b\rangle = \alpha\langle i_1, b\rangle + \beta\langle i_2, b\rangle = 0 \qquad \text{pro všechna } b \in H_B,$$

kde jsme užili vlastností plynoucích z definice (I.38) množiny I_A, to jest toho, že $\langle i_1, b\rangle = \langle i_2, b\rangle = 0$. Z tohoto vztahu je zřejmé, že prvek $\alpha i_1 + \beta i_2$ musí být prvkem I_A. Množina I_A je tedy vektorovým prostorem a tvoří vektorový podprostor v $*$-Hopfově algebře H_A. Pro libovolný prvek $i \in I_A$ a libovolný prvek $a \in H_A$ dále platí

$$\begin{aligned} \langle ai, b\rangle &= \langle a \otimes i, \Delta b\rangle = \langle a, b_{(1)}\rangle\langle i, b_{(2)}\rangle = 0 \qquad \text{pro všechna } b \in H_B, \\ \langle ia, b\rangle &= \langle i \otimes a, \Delta b\rangle = \langle i, b_{(1)}\rangle\langle a, b_{(2)}\rangle = 0 \qquad \text{pro všechna } b \in H_B, \end{aligned}$$

kde jsme užili první z axiomů (I.37) a definice (I.38). Prvky ai a ia tedy musí ležet v množině I_A. Vektorový podprostor I_A splňuje podmínku (I.4) a je tedy oboustranným ideálem v algebře H_A. Pro libovolný prvek $i \in I_A$ platí

$$\langle \Delta i, b_1 \otimes b_2\rangle = \langle i_{(1)}, b_1\rangle\langle i_{(2)}, b_2\rangle = \langle i, b_1 b_2\rangle = 0 \qquad \text{pro všechna } b_1,\, b_2 \in H_B,$$

kde jsme užili druhý z axiomů (I.37) a definice (I.38). Aby mohla být tato podmínka splněna, musí být v součinu $\langle i_{(1)}, b_1\rangle\langle i_{(2)}, b_2\rangle$ alespoň jeden z členů nulový, což vzhledem k tomu, že b_1 i b_2 jsou libovolné, vede k podmínce $\Delta i = i_{(1)} \otimes i_{(2)} \in H_A \otimes I + I \otimes H_A$. Navíc je splněna podmínka $\epsilon(i) = \langle i, \mathbf{1}\rangle = 0$, která plyne přímo z definice (I.38) množiny I_A. Oboustranný ideál I_A tedy splňuje podmínky (I.15) a (I.16). Pro libovolný prvek $i \in I_A$ dále platí

$$\begin{aligned} \langle S(i), b\rangle &= \langle i, S(b)\rangle = 0 \qquad \text{pro všechna } b \in H_B, \\ \langle i^*, b\rangle &= \overline{\langle i, S(b)^*\rangle} = 0 \qquad \text{pro všechna } b \in H_B, \end{aligned}$$

přičemž jsme užili poslední dva z axiomů (I.37) a definice (I.38). Prvky $S(i)$ a i^* tedy musí ležet v oboustranném ideálu I_A a podmínky (I.24) a (I.32) jsou tudíž splněny. Ukázali jsme, že podmínky (I.4), (I.15), (I.16), (I.24) a (I.32) jsou pro vektorový prostor I_A splněny, a z toho, co bylo napsáno v předešlých odstavcích, plyne, že na faktor prostoru $H'_A = H_A/I_A$ je možno zavést strukturu $*$-Hopfovy algebry. Podobným způsobem, jakým jsme postupovali v případě $*$-Hopfovy algebry H_A a množiny I_A, můžeme postupovat i v případě $*$-Hopfovy algebry H_B a množiny I_B, což by nás dovedlo k závěru, že také na faktor prostoru $H'_B = H_B/I_B$ lze zavést strukturu $*$-Hopfovy algebry. Aby byla bilineární forma zúžená na tyto faktor $*$-Hopfovy algebry dobře definovaná, nesmí její hodnota záviset na výběru prvků patřících do stejné třídy ekvivalence. Pro dva prvky a, $a + i_A$, $i_A \in I_A$ ze stejné třídy ekvivalence $[a] \in H'_A$ a pro dva prvky b, $b + i_B$, $i_B \in I_B$ ze stejné třídy ekvivalence $[b] \in H'_B$ dostáváme

$$\langle a + i_A, b + i_B\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, i_B\rangle + \langle i_A, b\rangle + \langle i_A, i_B\rangle = \langle a, b\rangle, \tag{I.39}$$

kde jsme užili definice (I.38). Bilineární forma tedy nezávisí na výběru prvků z tříd ekvivalence a je tudíž pro $*$-Hopfovy algebry H'_A a H'_B dobře definována. Protože $*$-Hopfovy algebry H'_A a H'_B jsme z $*$-Hopfových algeber H_A a H_B vytvořili tak, že jsme odstranili všechny prvky, na kterých byla bilineární forma degenerovaná, je bilineární forma zúžená na $*$-Hopfovy algebry H'_A, H'_B nedegenerovaná. Postup, kterým jsme z $*$-Hopfových algeber H_A, H_B a degenerované bilineární formy splňující podmínky (I.37), vytvořili nové $*$-Hopfovy algebry H'_A a H'_B, které jsou nedegenerovaně duální, je samozřejmě možno zobecnit i na případ, kdy H_A a H_B jsou pouze Hopfovy algebry nebo bialgebry.

V případě $*$-Hopfových algeber jsme s výhodou užili toho, že jsme místo toho, abychom určili oboustranný ideál splňující podmínky (I.4), (I.15), (I.16), (I.24) a (I.32), zadali podmínky (I.6) splňující (I.17), (I.25) a (I.33), které určují oboustranný ideál (I.8) s požadovanými vlastnostmi. Nyní se pokusíme vyšetřit, jak by to vypadalo, pokud bychom se pokusili zadat ideály I_A a I_B tímto způsobem. V tomto případě budeme předpokládat, že máme zadánu bilineární formu a $*$-Hopfovy algebry, a budeme se ptát, co musí podmínky (I.6), zavedené v těchto $*$-Hopfových algebrách, splňovat pro to, aby byla bilineární forma zúžená na vzniklé faktor $*$-Hopfovy algebry dobře definována. Budeme tedy předpokládat, že máme $*$-Hopfovy algebry H_A, H_B a bilineární formu splňující podmínky (I.37). Dále budeme předpokládat, že v $*$-Hopfově algebře H_A máme zadáno m_A podmínek $f_{Ai} = 0$, $i = 1, \ldots, m_A$, které určují oboustranný ideál I_A, a že v $*$-Hopfově algebře H_B máme zadáno m_B podmínek $f_{Bi} = 0$, $i = 1, \ldots, m_B$, které určují oboustranný ideál I_B, a navíc budeme předpokládat, že tyto podmínky splňují požadavky (I.17), (I.25) a (I.33). Aby byla bilineární forma, zúžená na faktor $*$-Hopfovy algebry $H'_A = H_A/I_A$ a $H'_B = H_B/I_B$, dobře definována, nesmí její hodnota záviset na výběru prvků z daných tříd ekvivalence. Tato podmínka je zapsána vztahem (I.39), z něhož plyne, že prvky i_A z ideálu I_A a prvky i_B z ideálu I_B musí ležet v jádrech bilineární formy, musí tedy platit

$$\langle i_A, b\rangle = 0 \quad \text{pro všechna } b \in H_B, \qquad\qquad \langle a, i_B\rangle = 0 \quad \text{pro všechna } a \in H_A.$$

Z tvaru ideálu (I.8) plyne, že tyto podmínky jsou splněny právě tehdy, když jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} \langle f_{Ai}, b\rangle &= 0 \quad \text{pro všechna } b \in B,\ i = 1, \ldots, m_A, \\ \langle a, f_{Bi}\rangle &= 0 \quad \text{pro všechna } a \in A,\ i = 1, \ldots, m_B, \end{aligned} \tag{I.40}$$

Podmínky $f_{Ai} = 0$, $f_{Bi} = 0$, které splňují tyto požadavky, tedy definují nové $*$-Hopfovy algebry, na kterých je bilineární forma dobře definována. Zavedení takových podmínek nám dává způsob, kterým můžeme snížit degeneraci bilineární formy (I.35).

I.7 Komodul algebra

Předpokládejme, že máme bialgebru H a vektorový prostor V. O vektorovém prostoru V řekneme, že je pravým H-komodulem, pokud existuje lineární zobrazení β

$$\beta : V \to V \otimes H, \tag{I.41}$$

nazývané koakce, splňující axiomy

$$\begin{aligned} (\beta \otimes id)\beta &= (id \otimes \Delta)\beta, \\ (id \otimes \epsilon)\beta &= id, \end{aligned} \tag{I.42}$$

přičemž v druhém z axiomů jsme s užitím násobení vektoru skalárem ztotožnili prostor $V \otimes \mathbb{C}$ vystupující na levé straně s prostorem V vystupujícím na pravé straně. Protože je zobrazení β

lineární, můžeme, stejně jako jsme učinili v případě konásobení v odstavci I.2, vyjádřit prvek $\beta(v)$, $v \in V$ jako součet prvků tvaru $v^{(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{2})}$, kde $v^{(\bar{1})} \in V$ a $v^{(\bar{2})} \in H$. Můžeme tedy psát

$$\beta(v) = \sum v^{(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{2})} = v^{(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{2})},$$

kde $v \in V$, přičemž ve výrazu úplně napravo jsme, z důvodu zestručnění zápisu, znaménko sumace vynechali. S užitím této konvence a konvence pro zápis konásobení můžeme axiomy (I.42) zapsat jako

$$\begin{gathered} v^{(\bar{1})(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{1})(\bar{2})} \otimes v^{(\bar{2})} = v^{(\bar{1})} \otimes {v^{(\bar{2})}}_{(1)} \otimes {v^{(\bar{2})}}_{(2)}, \\ v^{(\bar{1})} \otimes \epsilon(v^{(\bar{2})}) = v^{(\bar{1})} \epsilon(v^{(\bar{2})}) = v, \end{gathered}$$

kde $v \in V$.

Stejně, jako v případě algebry a koalgebry, lze axiomy (I.42) znázornit pomocí komutativních diagramů

$$\begin{tikzcd} & V \otimes H \otimes H & \\ V \otimes H \arrow[ur, "\beta \otimes id"] & & V \otimes H \arrow[ul, "id \otimes \Delta"'] \\ & V \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "\beta"] & \\ V \otimes H \arrow[r, "id \otimes \epsilon"'] & V \otimes \mathbb{C} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

kde diagram nalevo je vyjádřením prvního z axiomů a diagram napravo je vyjádřením druhého z axiomů. Porovnáme-li tyto diagramy s diagramy popisujícími axiomy koalgebry, uvedené v odstavci I.2, tak uvidíme, že jsou s nimi velmi podobné a liší se pouze tím, že je do nich zaveden určitý druh asymetrie.

Bude-li vektorový prostor V algebrou a zobrazení β bude splňovat nejen axiomy (I.42), ale i axiomy

$$\begin{aligned} \beta(uv) &= \beta(u)\beta(v) = u^{(\bar{1})} v^{(\bar{1})} \otimes u^{(\bar{2})} v^{(\bar{2})}, \\ \beta(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{I.43}$$

kde u, $v \in V$, pak budeme algebru V nazývat pravou H-komodul algebrou. Násobení v algebře $V \otimes H$ v prvním z axiomů je zavedeno způsobem analogickým k tomu, jak jsme zavedli násobení v algebře $H \otimes H$, což je podrobně popsáno v odstavci I.1. Pro prvky $v_1 \otimes h_1$, $v_2 \otimes h_2$ z algebry $V \otimes H$, tedy definujeme násobení vztahem $(v_1 \otimes h_1)(v_2 \otimes h_2) = v_1 v_2 \otimes h_1 h_2$ a na ostatní prvky algebry $V \otimes H$ toto násobení rozšíříme pomocí jeho bilinearity. Jednotkovým prvkem této algebry je prvek $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Axiomy (I.43) tedy říkají, že zobrazení β je homomorfismem z algebry V do algebry $V \otimes H$.

Bude-li navíc bialgebra H také $*$-Hopfovou algebrou a algebra V bude $*$-algebrou, to jest algebrou, na které je zavedena $*$-struktura, pak budeme navíc požadovat, aby byl splněn axiom

$$\beta(v^*) = \beta(v)^{*\otimes*} = v^{(\bar{1})*} \otimes v^{(\bar{2})*}, \tag{I.44}$$

kde $v \in V$, a $* \otimes *$ značí to, že operaci $*$ musíme aplikovat na oba členy v tenzorovém součinu.

Axiomy (I.43) říkají, že zobrazení β je homomorfismem algebry V. Tuto vlastnost můžeme využít k tomu, že zobrazení β určíme jen na vhodné podmnožině algebry V, a na zbývající prvky ho pak rozšíříme s využitím jeho linearity a toho, že je homomorfismem algebry. Pro nás zajímavým případem, ve kterém užijeme tento postup, bude algebra V s jednotkou, generovaná n prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. V tomto případě bude stačit, určíme-li výrazy

$$\beta(\mathbf{e}_i), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{I.45}$$

Navíc z platnosti axiomů (I.42) a (I.44) pro prvky $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ plyne platnost těchto axiomů pro všechny prvky algebry V. Abychom ukázali, že je tomu tak, vyčíslíme zobrazení β na všech bázových vektorech algebry V, a ukážeme, že axiomy (I.42), (I.44) jsou pro všechny bázové vektory splněny. Vzhledem k linearitě zobrazení β, to bude dostačující podmínkou pro to, abychom mohli toto zobrazení vyčíslit na libovolném prvku, a pro to, aby byly axiomy (I.42), (I.44) splněny pro celou algebru. Pro prvek $\mathbf{1}$ máme v souladu s definicí (I.43) $\beta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ a axiomy (I.42) a (I.44) jsou rovněž splněny, pro prvky $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ je zobrazení β určeno vztahy (I.45) a splnění axiomů (I.42) a (I.44) je výchozím předpokladem. Pro zbývající bázové vektory, které jsou tvaru $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots$, vyčíslíme zobrazení β pomocí vztahu

$$\beta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}) = \beta(\mathbf{e}_{i_1})\beta(\mathbf{e}_{i_2})\cdots\beta(\mathbf{e}_{i_k}).$$

Zobrazení β, zavedené tímto vztahem, zajišťuje spolu s tím, jak jsme ho zavedli pro jednotkový prvek, platnost axiomů (I.43). Zbývá ověřit, že axiomy (I.42) a (I.44) vyčíslené na těchto bázových vektorech jsou splněny

$$\begin{aligned}
(\beta \otimes id)\beta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}) &= [(\beta \otimes id)\beta(\mathbf{e}_{i_1})][(\beta \otimes id)\beta(\mathbf{e}_{i_2})]\cdots[(\beta \otimes id)\beta(\mathbf{e}_{i_k})] \\
&= [(id \otimes \Delta)\beta(\mathbf{e}_{i_1})][(id \otimes \Delta)\beta(\mathbf{e}_{i_2})]\cdots[(id \otimes \Delta)\beta(\mathbf{e}_{i_k})] \\
&= (id \otimes \Delta)\beta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}), \\
(id \otimes \epsilon)\beta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}) &= [(id \otimes \epsilon)\beta(\mathbf{e}_{i_1})][(id \otimes \epsilon)\beta(\mathbf{e}_{i_2})]\cdots[(id \otimes \epsilon)\beta(\mathbf{e}_{i_k})] = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k}, \\
\beta[(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k})^*] &= \beta(\mathbf{e}^*_{i_k}\cdots\mathbf{e}^*_{i_2}\mathbf{e}^*_{i_1}) = \beta(\mathbf{e}^*_{i_k})\cdots\beta(\mathbf{e}^*_{i_2})\beta(\mathbf{e}^*_{i_1}) = \beta(\mathbf{e}_{i_k})^*\cdots\beta(\mathbf{e}_{i_2})^*\beta(\mathbf{e}_{i_1})^* \\
&= [\beta(\mathbf{e}_{i_1})\beta(\mathbf{e}_{i_2})\cdots\beta(\mathbf{e}_{i_k})]^* = \beta(\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\cdots\mathbf{e}_{i_k})^{*\otimes *}.
\end{aligned}$$

Zobrazení β je tedy možno vyčíslit na všech prvcích a axiomy (I.42), (I.43) a (I.44) jsou rovněž splněny, vztahy (I.45), které splňují axiomy (I.42) a (I.44), tudíž vytvářejí z algebry V H-komodul algebru.

Nyní se podíváme, jaké podmínky musí být splněny v případě, kdy budeme z $*$-Hopfovy algebry H a z $*$-algebry V vytvářet faktor algebry. Budeme předpokládat, že máme zadánu $*$-Hopfovu algebru H a $*$-algebru V, která je H-komodul algebrou. Dále budeme uvažovat oboustranný ideál I_H v $*$-Hopfově algebře H, splňující podmínky (I.4), (I.15), (I.16), (I.24) a (I.32), a oboustranný ideál I_V v $*$-algebře V splňující podmínky (I.4) a (I.32). Z $*$-Hopfovy algebry H a oboustranného ideálu I_H vytvoříme novou $*$-Hopfovou algebru $H' = H/I_H$ a z $*$-algebry V a oboustranného ideálu I_V vytvoříme novou $*$-algebru $V' = V/I_V$. $*$-algebry H' a V' zavádějí strukturu $*$-algebry také na vektorovém prostoru $V' \otimes H' = V/I_V \otimes H/I_H$. S podobnou algebrou jsme se setkali již v odstavci (I.3), kdy jsme uvažovali algebru zavedenou na vektorovém prostoru $H' \otimes H' = H/I_H \otimes H/I_H$ a ukázali jsme, že tento vektorový prostor můžeme zapsat také jako $(H \otimes H)/(H \otimes I_H + I_H \otimes H)$, to jest jako faktor prostor vektorového prostoru $H \otimes H$ a oboustranného ideálu $H \otimes I_H + I_H \otimes H$. Analogickým výsledkem pro naši $*$-algebru $V' \otimes H'$ je to, že vektorový prostor $V' \otimes H' = V/I_V \otimes H/I_H$ můžeme zapsat také jako faktor prostor vektorového prostoru $V \otimes H$ a oboustranného ideálu $V \otimes I_H + I_V \otimes H$, což bychom mohli ukázat stejným postupem, který jsme pro předešlý případ užili v odstavci I.3. Můžeme tedy psát $V' \otimes H' = V/I_V \otimes H/I_H = (V \otimes H)/(V \otimes I_H + I_V \otimes H)$. Na faktor algebře $V' = V/I_V$ zavedeme zobrazení β vztahem

$$\beta([v]) = [\beta(v)] = [v^{(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{2})}] = [v^{(\bar{1})}] \otimes [v^{(\bar{2})}].$$

Aby bylo toto zobrazení dobře definováno, nesmí jeho definice záviset na výběru prvku z dané třídy ekvivalence. Pro dva prvky v, $v + i \in V$, $i \in I_V$ ze stejné třídy ekvivalence $[v] \in V'$ tedy musíme dostat ekvivalentní výsledek, což znamená, že musí platit

$$\beta(v + i) = \beta(v) + \beta(i) \sim \beta(v).$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že prvek $\beta(i)$ musí ležet v oboustranném ideálu $V \otimes I_H + I_V \otimes H$, proto musíme zavést podmínku

$$\beta(i) \in V \otimes I_H + I_V \otimes H \qquad \text{pro všechna } i \in I_V. \tag{I.46}$$

V případě, kdy $*$-Hopfovu algebru H' získáme z $*$-Hopfovy algebry H zavedením m_H podmínek $f_{Hi} = 0$, $i = 1, \ldots, m_H$, a $*$-algebru V' získáme z $*$algebry V zavedením m_V podmínek $f_{Vi} = 0$, $i = 1, \ldots, m_V$, to jest tehdy, kdy jsou oboustranné ideály I_H a I_V zadány vztahem (I.8), můžeme místo podmínky (I.46) uvažovat podmínku

$$\begin{aligned} f_{Vi} = 0, \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, m_V \text{ a } f_{Hi} = 0, \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, m_H \\ \Rightarrow \beta(f_{Vi}) = 0 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, m_V, \end{aligned} \tag{I.47}$$

zavedenou na podmínky $f_{Hi} = 0$ a $f_{Vi} = 0$. Splnění podmínky (I.46) je pak důsledkem této podmínky, která říká, že pokud jsou nulové všechny f_{Hi} a f_{Vi}, pak musí být nulové také všechny $\beta(f_{Vi})$.

Ačkoliv jsme úvahy týkající se zavádění zobrazení β pomocí vztahů (I.45) a tvorby faktor algeber prováděli pro $*$-Hopfovu algebru H a $*$-algebru V, je zřejmé, že pokud vynecháme patřičné požadavky, lze tyto postupy užít i v případě bialgebry nebo Hopfovy algebry H a algebry V.

I.8 Modul algebra

Předpokládejme, že máme bialgebru H a vektorový prostor V. Dále předpokládejme, že máme lineární zobrazení $\triangleright$,

$$\triangleright : H \otimes V \to V, \tag{I.48}$$

nazývané akce. Toto zobrazení, vyčíslené na prvcích $v \in V$ a $h \in H$, budeme zapisovat jako $h \triangleright v$. Vzhledem k linearitě tohoto zobrazení a tenzorovému součinu v definici (I.48) je toto zobrazení lineární v každém z argumentů v a h, je tedy bilineárním zobrazením. Bude-li toto zobrazení splňovat axiomy

$$\begin{aligned} hk \triangleright v &= h \triangleright (k \triangleright v), \\ \mathbf{1} \triangleright v &= v, \end{aligned} \tag{I.49}$$

kde h, $k \in H$ a $v \in V$, pak budeme vektorový prostor V nazývat levým H-modulem. Bude-li navíc vektorový prostor V algebrou a budou-li splněny axiomy

$$\begin{aligned} h \triangleright uv &= (h_{(1)} \triangleright u)(h_{(2)} \triangleright v), \\ h \triangleright \mathbf{1} &= \epsilon(h), \end{aligned} \tag{I.50}$$

kde $h \in H$, u, $v \in V$ a $h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \Delta h$, pak budeme algebru V nazývat levou H-modul algebrou. V případě, kdy bude bialgebra H také $*$-Hopfovou algebrou a algebra V bude $*$-algebrou, budeme požadovat aby byl splněn také axiom

$$(h \triangleright v)^* = S(h)^* \triangleright v^*, \tag{I.51}$$

kde $h \in H$ a $v \in V$.

Předpokládejme, že máme $*$-Hopfovu algebru H a k ní duální $*$-Hopfovou algebru $\tilde{H}$. Existuje postup, kterým můžeme z pravé $\tilde{H}$-komodul algebry V vytvořit také H-modul algebru. K zobrazení $\beta : V \to V \otimes \tilde{H}$, které určuje strukturu pravé $\tilde{H}$-komodul algebry, tedy přiřadíme zobrazení $\triangleright : H \otimes V \to V$, které určuje strukturu levé H-modul algebry. Pro $h \in H$ a $v \in V$ definujeme toto zobrazení vztahem

$$h \triangleright v = v^{(\bar{1})} \langle h, v^{(\bar{2})} \rangle, \tag{I.52}$$

kde $v^{(\bar{1})} \otimes v^{(\bar{2})} = \beta(v)$, a kde $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \otimes \tilde{H} \to \mathbb{C}$ je bilineární forma definující dualitu $*$-Hopfových algeber H a $\tilde{H}$. Pro takto definované zobrazení $\triangleright$ je třeba ověřit axiomy H-modulu (I.49)

$$\begin{aligned} hk \triangleright v &= v^{(\bar{1})} \langle hk, v^{(\bar{2})} \rangle = v^{(\bar{1})} \langle h \otimes k, \Delta v^{(\bar{2})} \rangle = v^{(\bar{1})} \langle h \otimes k, v^{(\bar{2})}{}_{(1)} \otimes v^{(\bar{2})}{}_{(2)} \rangle \\ &= v^{(\bar{1})(\bar{1})} \langle h \otimes k, v^{(\bar{1})(\bar{2})} \otimes v^{(\bar{2})} \rangle = v^{(\bar{1})(\bar{1})} \langle h, v^{(\bar{1})(\bar{2})} \rangle \langle k, v^{(\bar{2})} \rangle = h \triangleright (v^{(\bar{1})} \langle k, v^{(\bar{2})} \rangle) = h \triangleright (k \triangleright v), \\ \mathbf{1} \triangleright v &= v^{(\bar{1})} \langle \mathbf{1}, v^{(\bar{2})} \rangle = v^{(\bar{1})} \epsilon(v^{(\bar{2})}) = v, \end{aligned}$$

kde h, $k \in H$ a $v \in V$, přičemž jsme užili vztahů (I.37) pro bilineární formu a axiomů $\tilde{H}$-komodulu (I.42). Dále je třeba ověřit axiomy H-modul algebry (I.50)

$$\begin{aligned} h \triangleright uv &= (uv)^{(\bar{1})} \langle h, (uv)^{(\bar{2})} \rangle = u^{(\bar{1})} v^{(\bar{1})} \langle \Delta h, u^{(\bar{2})} \otimes v^{(\bar{2})} \rangle = (u^{(\bar{1})} \langle h_{(1)}, u^{(\bar{2})} \rangle)(v^{(\bar{1})} \langle h_{(2)}, v^{(\bar{2})} \rangle) \\ &= (h_{(1)} \triangleright u)(h_{(2)} \triangleright v), \\ h \triangleright \mathbf{1} &= \mathbf{1} \langle h, \mathbf{1} \rangle = \mathbf{1} \epsilon(h), \end{aligned}$$

kde $h \in H$ a u, $v \in V$, a kde jsme užili vlastností bilineární formy (I.37) a axiomů $\tilde{H}$-komodul algebry (I.43). Posledním axiomem, který je třeba ověřit je axiom (I.51)

$$\begin{aligned} (h \triangleright v)^* &= (v^{(\bar{1})} \langle h, v^{(\bar{2})} \rangle)^* = v^{(\bar{1})*} \overline{\langle h, v^{(\bar{2})} \rangle} = v^{(\bar{1})*} \overline{\langle h, v^{(\bar{2})**} \rangle} = v^{(\bar{1})*} \langle S(h)^*, v^{(\bar{2})*} \rangle \\ &= (v^*)^{(\bar{1})} \langle S(h)^*, (v^*)^{(\bar{2})} \rangle = S(h)^* \triangleright v^*, \end{aligned}$$

kde $h \in H$ a $v \in V$, a kde jsme užili vlastností bilineární formy (I.37) a axiomu(I.44). Je zřejmé, že pokud vypustíme předpoklady týkající se $*$-struktury, tak bude definice (I.52) fungovat i pro případ bialgebry H a algebry V.

I.9 Quasitriangulární struktura

Další struktura, o kterou můžeme obohatit Hopfovu algebru H, je quasitriangulární struktura. Nechť $\mathcal{R}$ je invertibilní prvek z algebry $H \otimes H$. Tento prvek můžeme zapsat jako součet prvků tvaru $\mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}$, kde $\mathcal{R}^{(1)}$, $\mathcal{R}^{(2)} \in H$, budeme tedy psát

$$\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)},$$

přičemž ve výrazu úplně napravo jsme zestručnili zápis tím, že jsme vynechali znaménko sumace. Podobně budeme značit i inverzi prvku $\mathcal{R}$, kterou budeme zapisovat jako $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1(1)} \otimes \mathcal{R}^{-1(2)}$. Jsou-li splněny axiomy

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \\ (id \otimes \Delta)\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \\ \mathcal{R}\Delta(h)\mathcal{R}^{-1} &= \tau\Delta h \qquad \text{pro všechna } h \in H, \end{aligned} \tag{I.53}$$

pak budeme prvek $\mathcal{R}$ nazývat quasitriangulární strukturou. Zobrazení τ, se kterým jsme se setkali již ve vztahu (I.21), je lineárním zobrazením přehazujícím složky v tenzorovém součinu, to jest $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$, symboly $\mathcal{R}_{12}$, $\mathcal{R}_{13}$ a $\mathcal{R}_{12}$ zastupují prvky

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)} \otimes \mathbf{1}, \qquad \mathcal{R}_{13} = \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathcal{R}^{(2)}, \qquad \mathcal{R}_{23} = \mathbf{1} \otimes \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)},$$

symbol $\mathcal{R}_{ij}$ tedy zastupuje prvek mající quasitriangulární strukturu na i-té a j-té pozici a jednotkové prvky na zbývajících pozicích. Význam quasitriangulární struktury je zřejmý z posledního axiomu, který dává vztah mezi výrazem Δh a výrazem $\tau\Delta h$, který z něj vznikne přehozením složek v tenzorovém součinu. Quasitriangulární struktura je tudíž prostředkem, který poskytuje způsob, jak popsat asymetrii konásobení. S užitím konvence, kterou jsme přijali pro značení quasitriangulární struktury a pro značení konásobení, můžeme axiomy (I.53) rozepsat jako

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(1)}{}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(1)}{}_{(2)} \otimes \mathcal{R}^{(2)} &= \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(1)'} \otimes \mathcal{R}^{(2)}\mathcal{R}^{(2)'}, \\ \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}{}_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}{}_{(2)} &= \mathcal{R}^{(1)}\mathcal{R}^{(1)'} \otimes \mathcal{R}^{(2)'} \otimes \mathcal{R}^{(2)}, \\ \mathcal{R}^{(1)}h_{(1)}\mathcal{R}^{-1(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}h_{(2)}\mathcal{R}^{-1(2)} &= h_{(2)} \otimes h_{(1)} \qquad \text{pro všechna } h \in H, \end{aligned}$$

přičemž čárka u indexu v quasitriangulární struktuře je užita k tomu, aby odlišila různé kopie quasitriangulární struktury, $\mathcal{R}^{(1)'} \otimes \mathcal{R}^{(2)'}$ a $\mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}$ jsou tedy dvě různé kopie quasitriangulární struktury.

V případě Hopfovy algebry, která je kokomutativní, to jest takové, pro kterou platí $\Delta h = \tau\Delta h$ pro všechna h z Hopfovy algebry, existuje triviální quasitriangulární struktura $\mathcal{R} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Tato quasitriangulární struktura je invertibilní s inverzí $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ a dosadíme-li ji do axiomů (I.53), tak se můžeme s užitím vlastností jednotkového prvku a toho, že $\tau\Delta h = \Delta h$, přesvědčit, že jsou tyto axiomy splněny.

I.10 Bicrossproduct algebra

Bicrossproduct algebra je $*$-algebra, vytvořená z $*$-Hopfovy algebry H a $*$-algebry V, která je levou H-modul algebrou, tak, že jako podalgebry obsahuje jak $*$-algebru H tak $*$-algebru V.

Tato bicrossproduct algebra, kterou budeme značit jako $V \rtimes H$, je algebra zavedená na vektorovém prostoru $V \otimes H$. Násobení v této algebře definujeme pro prvky tvaru $v \otimes h$, $u \otimes g \in V \otimes H$ vztahem

$$(v \otimes h)(u \otimes g) = v(h_{(1)} \triangleright u) \otimes h_{(2)}g, \tag{I.54}$$

kde $h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \Delta h$. Protože všechny prvky vektorového prostoru $V \otimes H$ je možno vyjádřit jako součet prvků tvaru $v \otimes h$, kde $h \in H$ a $v \in V$, a protože násobení v algebře je bilineární operací, lze s užitím této bilinearity rozšířit násobení definované vztahem (I.54) na celou algebru $V \otimes H$. S užitím axiomů H-modul algebry (I.49), (I.50) můžeme ověřit asociativitu tohoto násobení

$$\begin{aligned} [(v \otimes h)(u \otimes g)](w \otimes k) &= [v(h_{(1)} \triangleright u) \otimes h_{(2)}g](w \otimes k) = v(h_{(1)} \triangleright u)[(h_{(2)}g)_{(1)} \triangleright w] \otimes (h_{(2)}g)_{(2)}k \\ &= v(h_{(1)} \triangleright u)(h_{(2)(1)}g_{(1)} \triangleright w) \otimes h_{(2)(2)}g_{(2)}k = v(h_{(1)} \triangleright u)[(h_{(2)} \triangleright (g_{(1)} \triangleright w)] \otimes h_{(3)}g_{(2)}k \\ &= v(h_{(1)(1)} \triangleright u)[h_{(1)(2)} \triangleright (g_{(1)} \triangleright w)] \otimes h_{(2)}g_{(2)}k = v[h_{(1)} \triangleright u(g_{(1)} \triangleright w)] \otimes h_{(2)}g_{(2)}k \\ &= (v \otimes h)[u(g_{(1)} \triangleright w) \otimes g_{(2)}k] = (v \otimes h)[(u \otimes g)(w \otimes k)], \end{aligned}$$

kde u, v, $w \in V$ a g, h, $k \in H$, přičemž jsme užili koasociativity konásobení. Násobením prvku $v \otimes h \in V \otimes H$ prvkem $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ zleva a zprava dostaneme

$$\begin{aligned} &(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})(v \otimes h) = \mathbf{1}(\mathbf{1} \triangleright v) \otimes \mathbf{1}h = v \otimes h, \\ &(v \otimes h)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = v(h_{(1)} \triangleright \mathbf{1}) \otimes h_{(2)}\mathbf{1} = v\epsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = v \otimes \epsilon(h_{(1)})h_{(2)} = v \otimes h, \end{aligned}$$

kde jsme užili (I.49), (I.50). Z těchto vztahů je zřejmé, že prvek $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ je jednotkovým prvkem této algebry. Násobení zavedené vztahem (I.54) splňuje axiomy (I.2) a definuje tudíž na vektorovém prostoru $V\otimes H$ strukturu algebry.

Jak jsme se již zmínili, algebra $V\rtimes H$ je vytvořena tak, že algebry V a H jsou podalgebrami této algebry. Abychom ukázali, že algebru V lze považovat za podalgebru algebry $V\rtimes H$, zavedeme lineární zobrazení

$$\widehat{\ }\colon V\to V\rtimes H, \tag{I.55}$$

které bude přiřazovat prvku v z algebry V prvek $\widehat{v}$ z algebry $V\rtimes H$. Toto zobrazení by mělo být homomorfismem algebry V, což znamená, že by mělo platit

$$\widehat{vu}=\widehat{v}\widehat{u}, \qquad \widehat{\mathbf{1}}=\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},$$

kde u, $v\in V$, a navíc by toto zobrazení mělo být injektivní, dvěma různým prvkům u, v algebry V by tedy měli být přiřazeny dva různé prvky $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ algebry $V\rtimes H$. Tímto zobrazením je

$$\widehat{v}=(v\otimes\mathbf{1}),$$

kde $v\in V$. Toto zobrazení je injektivní, jednotkovému prvku $\mathbf{1}$ algebry V je opravdu přiřazen jednotkový prvek $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ v algebře $V\rtimes H$, a snadno ověříme, že platí také

$$\widehat{v}\widehat{u}=(v\otimes\mathbf{1})(u\otimes\mathbf{1})=v(\mathbf{1}\triangleright u)\otimes\mathbf{1}=vu\otimes\mathbf{1}=\widehat{vu},$$

kde u, $v\in V$, a kde jsme užili axiomů H-modulu (I.49). Obraz algebry V v zobrazení $\widehat{\ }$ tvoří podalgebru algebry $V\rtimes H$, a protože je zobrazení $\widehat{\ }$ injektivním homomorfismem, je tato podalgebra isomorfní s algebrou V.

Abychom ukázali, že také algebra H je podalgebrou algebry $V\rtimes H$, budeme, stejně jako v případě algebry V, hledat zobrazení

$$\widehat{\ }\colon H\to V\rtimes H, \tag{I.56}$$

přiřazující prvku h z algebry H prvek $\widehat{h}$ z algebry $V\rtimes H$. Toto zobrazení by mělo být injektivní a mělo by být homomorfismem algebry H, mělo by tedy splňovat

$$\widehat{hg}=\widehat{h}\widehat{g}, \qquad \widehat{\mathbf{1}}=\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},$$

kde h, $g\in H$. Tímto zobrazením je

$$\widehat{h}=(\mathbf{1}\otimes h), \tag{I.57}$$

kde $h\in H$. Toto zobrazení je injektivní, jednotkovému prvku $\mathbf{1}$ algebry H je přiřazen jednotkový prvek $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ algebry $V\rtimes H$ a podmínka

$$\widehat{h}\widehat{g}=(\mathbf{1}\otimes h)(\mathbf{1}\otimes g)=\mathbf{1}(h_{(1)}\triangleright\mathbf{1})\otimes h_{(2)}g=\mathbf{1}\otimes\epsilon(h_{(1)})h_{(2)}g=\mathbf{1}\otimes hg=\widehat{hg},$$

kde h, $g\in H$, a kde jsme užili axiomů H-modul algebry (I.50), je rovněž splněna. Obraz algebry H v zobrazení $\widehat{\ }$ tvoří podalgebru algebry $V\rtimes H$, která je isomorfní s algebrou H.

Aby byla algebra $V\rtimes H$ $*$-algebrou, je třeba zavést operaci $*$. Při zavádění této operace vyjdeme z toho, že operace $*$ je antihomomorfismem algebry, a z toho, že zobrazení (I.55) a (I.56) musí být $*$-homomorfismy, to jest z toho, že musí platit $\widehat{v^*}=(\widehat{v})^*$, $v\in V$ a $\widehat{h^*}=(\widehat{h})^*$, $h\in H$. Pro prvky $v\otimes h\in V\rtimes H$ pak dostáváme

$$\begin{aligned}(v\otimes h)^*&=[v(\mathbf{1}\triangleright\mathbf{1})\otimes\mathbf{1}h]^*=[(v\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes h)]^*=(\widehat{v}\widehat{h})^*=\widehat{h^*}\widehat{v^*}\\&=(\mathbf{1}\otimes h^*)(v^*\otimes\mathbf{1})=\mathbf{1}(h_{(1)}{}^*\triangleright v^*)\otimes h_{(2)}{}^*\mathbf{1}=h_{(1)}{}^*\triangleright v^*\otimes h_{(2)}{}^*,\end{aligned} \tag{I.58}$$

a s užitím antilinearity můžeme takto zavedenou operaci $*$ rozšířit na celou algebru $V \rtimes H$. Lze ukázat, že takto zavedená operace $*$ je opravdu antilineárním antihomomorfismem, a že první z axiomů (I.29) je splněn, algebra $V \rtimes H$ je tedy $*$-algebrou.

Zavedeme-li algebru $V \rtimes H$ popsaným způsobem, pak pro libovolný prvek v z H-modul algebry V a libovolný prvek h z algebry H platí vztah

$$\widehat{h_{(1)}}\hat{v}\widehat{S(h_{(2)})} = \widehat{h \triangleright v}. \tag{I.59}$$

Jak později uvidíme, tento vztah bude v našem případě hrát důležitou roli. Platnost tohoto vztahu můžeme ověřit dosazením patřičných definic

$$\begin{aligned}\widehat{h_{(1)}}\hat{v}\widehat{S(h_{(2)})} &= (\mathbf{1} \otimes h_{(1)})(v \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes S(h_{(2)})) = (\mathbf{1} \otimes h_{(1)})(v \otimes S(h_{(2)}))\\ &= \mathbf{1}(h_{(1)(1)} \triangleright v) \otimes h_{(1)(2)}S(h_{(2)}) = h_{(1)} \triangleright v \otimes h_{(2)(1)}S(h_{(2)(2)})\\ &= h_{(1)} \triangleright v \otimes \mathbf{1}\epsilon(h_{(2)}) = h \triangleright v \otimes \mathbf{1} = \widehat{h \triangleright v},\end{aligned}$$

kde jsme užili axiomů koalgebry (I.10) a axiomů antipodu (I.20).

Další zajímavou vlastností algebry $V \rtimes H$ je to, že existuje její reprezentace na vektorovém prostoru V. Reprezentace algebry $V \rtimes H$ na vektorovém prostoru V je homomorfismus ρ z algebry $V \rtimes H$ do algebry lineárních operátorů $L(V, V)$ na prostoru V. Algebra lineárních operátorů $L(V, V)$ je tvořena množinou všech lineárních zobrazení $V \to V$. Tato množina je vektorovým prostorem a definujeme-li násobení jako skládání zobrazení, pak je tento vektorový prostor také algebrou, jejímž jednotkovým prvkem je identická transformace. To, že zobrazení ρ má být homomorfismem algebry $V \rtimes H$ znamená, že pro zobrazení ρ musí platit

$$\rho(hk) = \rho(h)\rho(k) = \rho(h) \circ \rho(k), \qquad\qquad \rho(\mathbf{1}) = id,$$

kde h, $k \in V \rtimes H$. V našem případě neužijeme k popisu reprezentace ρ algebry $V \rtimes H$ na vektorovém prostoru V zobrazení ρ, ale lineárního zobrazení

$$\blacktriangleright\colon (V \rtimes H) \otimes V \to V. \tag{I.60}$$

Toto zobrazení vyčíslené na prvku a z algebry $V \rtimes H$ a vektoru v z vektorového prostoru V budeme značit jako $a \blacktriangleright v$. Prvku $a \in V \rtimes H$ pak přiřadíme lineární zobrazení $\rho(a)$ z algebry $L(V, V)$ pomocí vztahu

$$\rho(a) : V \ni v \to a \blacktriangleright v \in V,$$

kde $v \in V$. Z toho, že zobrazení ρ musí být homomorfismem algebry $V \rtimes H$ pak plynou následující podmínky

$$\begin{aligned} ab \blacktriangleright v &= a \blacktriangleright (b \blacktriangleright v),\\ \mathbf{1} \blacktriangleright v &= v, \end{aligned} \tag{I.61}$$

kde a, $b \in V \rtimes H$ a $v \in V$. Pro prvek tvaru $v \otimes h$ z algebry $V \rtimes H$ a prvek u z vektorového prostoru V definujeme zobrazení $\blacktriangleright$ vztahem

$$(v \otimes h) \blacktriangleright u = v(h \triangleright u). \tag{I.62}$$

Protože libovolný prvek algebry $V \rtimes H$ lze zapsat jako součet prvků tvaru $v \otimes h$, můžeme s užitím linearity zobrazení $\blacktriangleright$ rozšířit takto definované zobrazení na celou algebru $V \rtimes H$. Pro axiomy

(I.61) dostáváme

$$\begin{aligned}(v\otimes h)(u\otimes g)\blacktriangleright w &= [v(h_{(1)}\triangleright u)\otimes h_{(2)}g]\blacktriangleright w = v(h_{(1)}\triangleright u)(h_{(2)}g\triangleright w)\\ &= v(h_{(1)}\triangleright u)[h_{(2)}\triangleright(g\triangleright w)] = v[h\triangleright u(g\triangleright w)] = (v\otimes h)\blacktriangleright u(g\triangleright w)\\ &= (v\otimes h)\blacktriangleright[(u\otimes g)\blacktriangleright w],\\ \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\blacktriangleright w &= \mathbf{1}(\mathbf{1}\triangleright w) = w,\end{aligned}$$

kde v, u, $w\in V$ a h, $g\in H$. Axiomy (I.61) jsou splněny, zobrazení (I.60) definované vztahem (I.62) tedy zavádí reprezentaci algebry $V\rtimes H$ na vektorovém prostoru V.

II Užití Hopfovy algebry při konstrukci speciální teorie relativity

Tato kapitola se zabývá tím, jak lze využít struktury Hopfovy algebry k tomu, abychom doplnili algebru generátorů symetrie speciální teorie relativity s jednou časovou a jednou prostorovou dimenzí o operátory polohy a vytvořili tak algebru, která je algebrou operátorů popisující speciální teorii relativity.

V odstavcích II.1 až II.5 zavedeme Hopfovu algebru $U(so(2,1))$ definovanou na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $so(2,1)$, k ní duální Hopfovu algebru $Pol(SO(2,1))$ a pravou $Pol(SO(2,1))$-komodul algebru $Pol(\mathbb{R}^3)$. V odstavci II.6 pak ukážeme, že na Hopfovu algebru $Pol(SO(2,1))$ a pravou $Pol(SO(2,1))$-komodul algebru $Pol(\mathbb{R}^3)$ lze pohlížet jako na struktury zavedené na algebře polynomů v prvcích matic z grupy $SO(2,1)$ a na polynomech v $\mathbb{R}^3$. V kapitole II.7 pak z těchto Hopfových algeber a komodul algebry vytvoříme Hopfovy algebry $U(p(1,1))$, $Pol(P(1,1))$ a pravou $Pol(P(1,1))$-komodul algebru $Pol(\mathbb{R}^2)$. V odstavci II.8 tyto Hopfovy algebry a komodul algebru doplníme o $*$-strukturu, a v odstavci II.9 užijeme duality Hopfových algeber $U(p(1,1))$ a $Pol(P(1,1))$ k tomu, abychom z pravé $Pol(P(1,1))$-komodul algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$ vytvořili také levou $U(p(1,1))$-modul algebru. V odstavci II.10 vytvoříme z Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ zavedené na algebře generátorů symetrie speciální teorie relativity a z levé $U(p(1,1))$-modul algebry $Pol(\mathbb{R}^3)$, která představuje algebru operátorů poloh, algebru, která bude algebrou operátorů popisující speciální teorii relativity.

II.1 Lieova algebra $so(2,1)$ a Lieova grupa $SO(2,1)$

Ortogonální grupa $O(2,1)$ je tvořena množinou všech 3×3 matic A, splňujících jednu z podmínek

$$A^T\eta^{-1}A = \eta^{-1}, \qquad A\eta A^T = \eta, \tag{II.1}$$

kde $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,-1)$ je diagonální matice a $\eta^{-1} = \mathrm{diag}(-1,1,-1)$ je matice k ní inverzní. Grupové násobení je násobením matic, jednotkovým prvkem grupy je jednotková matice a inverzním prvkem grupy je inverzní matice. Tato grupa je podgrupou větší grupy $GL(3)$ všech invertibilních 3×3 matic. Grupa $O(2,1)$ je tvořena čtyřmi souvislými komponentami, souvislá komponenta obsahující identitu je zároveň její podgrupou značenou $SO(2,1)$.

Protože je grupa $SO(2,1)$ podgrupou $GL(3)$, musí být Lieova algebra $so(2,1)$ ideálem v Lieově algebře $gl(3)$, která je tvořena množinou všech 3×3 matic s Lieovou závorkou definovanou jako

$$[X,Y] = XY - YX, \tag{II.2}$$

pro všechna $X,Y\in gl(3)$. Dosadíme-li rozvoj $A = \mathbf{1} + \epsilon M + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $M\in gl(3)$ do podmínek (II.1)

$$\eta^{-1} + \epsilon(M^T\eta^{-1} + \eta^{-1}M) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \eta^{-1}, \qquad \eta + \epsilon(M\eta + \eta M^T) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \eta,$$

pak budou výrazy spojené s koeficientem ϵ určovat Lieovu algebru $so(2,1)$ jako ideál v Lieově algebře $gl(3)$. Lieova algebra $so(2,1)$ je tedy vektorový prostor všech 3×3 matic splňujících jednu z podmínek

$$M^T\eta^{-1} + \eta^{-1}M = 0, \qquad M\eta + \eta M^T = 0, \tag{II.3}$$

s Lieovou závorkou (II.2).

Exponenciální zobrazení přiřazující prvku M z Lieovy algebry $so(2,1)$ prvek z grupy $SO(2,1)$ můžeme zavést jako

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^n, \tag{II.4}$$

přičemž násobení vystupující v mocnině na pravé straně je násobením matic.

Lieova algebra $so(2,1)$, to jest množina všech 3×3 matic splňujících (II.3), tvoří třídimenzionální vektorový prostor nad reálnými čísly. Jako bázi tohoto vektorového prostoru zvolíme vektory P_0, P_1, N, kterým odpovídají matice

$$P_0 = \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} . & . & -1 \\ . & . & . \\ 1 & . & . \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & 1 \\ . & 1 & . \end{pmatrix}. \tag{II.5}$$

Dosazením těchto matic do definice Lieovy závorky (II.2) dostaneme vztahy

$$[N, P_0] = P_1, \qquad [N, P_1] = P_0, \qquad [P_0, P_1] = -N, \tag{II.6}$$

určující Lieovu závorku vyčíslenou na bázových vektorech. Protože je Lieova závorka bilineárním zobrazením, stačí, když zadáme její hodnotu na bázových vektorech, a pro zbývající vektory Lieovy algebry ji dodefinujeme pomocí zmíněné bilinearity. Lieovu algebru $so(2,1)$ tedy můžeme definovat také jako třídimenzionální vektorový prostor nad reálnými čísly s bázovými vektory P_0, P_1, N a s Lieovou závorkou určenou vztahy (II.6). Tato definice je alternativním, více abstraktním způsobem, jak lze definovat Lieovu algebru $so(2,1)$.

Matice (II.5) lze užít k definici reprezentace Lieovy algebry na třídimenzionálním vektorovém prostoru.

Pod pojmem reprezentace Lieovy algebry $so(2,1)$ na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ budeme rozumět lineární zobrazení ρ z Lieovy algebry $so(2,1)$ do prostoru $L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, tvořeného všemi lineárními zobrazeními $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pro které platí $\rho([X,Y]) = \rho(X)\circ\rho(Y) - \rho(Y)\circ\rho(X)$, kde X, $Y \in so(2,1)$ a kde symbol $\circ$ značí skládání zobrazení. Protože libovolné lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ z prostoru $L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ můžeme zapsat pomocí 3×3 matice, budeme místo prostoru $L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ uvažovat prostor všech reálných 3×3 matic $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Budeme tedy uvažovat lineární zobrazení

$$\rho : so(2,1) \to Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}), \tag{II.7}$$

které bude splňovat podmínku

$$\rho([X,Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X), \tag{II.8}$$

kde X, $Y \in so(2,1)$ a kde násobení na pravé straně má význam násobení matic.

V našem případě určíme zobrazení ρ tak, že budeme bázové vektory P_0, P_1, N reprezentovat pomocí matic (II.5), to jest

$$\rho(P_0) = \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \qquad \rho(P_1) = \begin{pmatrix} . & . & -1 \\ . & . & . \\ 1 & . & . \end{pmatrix}, \qquad \rho(N) = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & 1 \\ . & 1 & . \end{pmatrix}. \tag{II.9}$$

Uvědomíme-li si, že prvky Lieovy algebry $so(2,1)$ reprezentujeme v reprezentaci ρ pomocí matic vystupujících ve vztazích (II.2), (II.3), kterých jsme užili při definici této Lieovy algebry, tak je zřejmé, že podmínka (II.8), kladená na zobrazení ρ, je pouze jiným zápisem vztahu (II.2). Platnost podmínky (II.8) je tedy důsledkem vztahu (II.2), který jsme užili při definici Lieovy algebry $so(2,1)$.

II.2 Hopfova algebra $U(so(2,1))$

V tomto odstavci zavedeme Hopfovu algebru definovanou na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $so(2,1)$. Definice takové Hopfovy algebry pro libovolnou Lieovu algebru je uvedena například v [10] nebo [12]. Tato Hopfova algebra bude velmi podobná Hopfově algebře, kterou jsme užili v příkladě (I.7), (I.18), (I.26).

Uvažujme algebru generovanou třemi prvky P_0, P_1, N, to jest algebru vytvořenou postupem uvedeným v odstavci I.1. V této algebře zavedeme relace (II.6), přičemž závorku $[\cdot,\cdot]$ v těchto vztazích budeme interpretovat jako komutátor, který je pro prvky X, Y z této algebry definován jako $[X,Y] = XY - YX$. Zavedení těchto relací, to jest relací (I.6), definuje novou algebru, kterou budeme nazývat univerzální obalující algebrou Lieovy algebry $so(2,1)$, a kterou budeme značit symbolem $U(so(2,1))$. Poznamenejme, že zatím, co Lieova algebra $so(2,1)$ byla zavedena na konečnědimenzionálním vektorovém prostoru nad reálnými čísly, univerzální obalující algebru jsme zavedli na nekonečnědimenzionálním vektorovém prostoru nad komplexními čísly.

Z univerzální obalující algebry $U(so(2,1))$ můžeme vytvořit Hopfovu algebru tak, že pro prvky P_0, P_1, N definujeme konásobení kojednotku a antipode

$$
\begin{aligned}
&\Delta P_0 = P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0, \qquad &&\Delta P_1 = P_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_1, \qquad &&\Delta N = N \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N,\\
&\epsilon(P_0) = 0, &&\epsilon(P_1) = 0, &&\epsilon(N) = 0,\\
&S(P_0) = -P_0, &&S(P_1) = -P_1, &&S(N) = -N.
\end{aligned}
\tag{II.10}
$$

Z odstavců I.3 a I.4 víme, že zadání konásobení, kojednotky a antipodu pro prvky P_0, P_1, N, to jest vztahů (I.13) a (I.22), je dostatečnou podmínkou pro zadání struktury Hopfovy algebry na algebře generované těmito prvky tehdy, když jsou pro prvky P_0, P_1, N splněny axiomy (I.10) a (I.20). Tyto axiomy vyčíslené na prvku P_0 jsou

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta P_0 &= (\Delta \otimes id)(P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0) = P_0 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes P_0\\
&= (id \otimes \Delta)(P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0) = (id \otimes \Delta)\Delta P_0,\\
(\epsilon \otimes id)\Delta P_0 &= (\epsilon \otimes id)(P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0) = \epsilon(P_0)\mathbf{1} + \epsilon(\mathbf{1})P_0 = P_0\\
&= \mathbf{1}\epsilon(P_0) + P_0\epsilon(\mathbf{1}) = (id \otimes \epsilon)(P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0) = (id \otimes \epsilon)\Delta P_0,\\
\cdot(S \otimes id)\Delta P_0 &= \cdot(S \otimes id)(P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0) = S(P_0)\mathbf{1} + S(\mathbf{1})P_0 = 0 = \mathbf{1}\epsilon(P_0)\\
&= \mathbf{1}S(P_0) + P_0S(\mathbf{1}) = \cdot(id \otimes S)(P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0) = \cdot(id \otimes S)\Delta P_0,
\end{aligned}
$$

a podobným způsobem lze ověřit i platnost axiomů (I.10) a (I.20) pro zbývající prvky P_1, N. Vztahy (II.10) tedy definují strukturu Hopfovy algebry na algebře generované prvky P_0, P_1, N. Abychom mohli v Hopfově algebře, generované prvky P_0, P_1, N, zavést relace (II.6), musíme ověřit platnost podmínek (I.17) a (I.25). Dříve než začneme ověřovat tyto podmínky, bude vhodné upravit výraz pro konásobení aplikované na komutátor, to jest výraz

$$
\begin{aligned}
\Delta[X,Y] &= (\Delta X)(\Delta Y) - (\Delta Y)(\Delta X)\\
&= (X_{(1)} \otimes X_{(2)})(Y_{(1)} \otimes Y_{(2)}) - (Y_{(1)} \otimes Y_{(2)})(X_{(1)} \otimes X_{(2)})\\
&= X_{(1)}Y_{(1)} \otimes X_{(2)}Y_{(2)} - Y_{(1)}X_{(1)} \otimes Y_{(2)}X_{(2)}\\
&= X_{(1)}Y_{(1)} \otimes X_{(2)}Y_{(2)} - Y_{(1)}X_{(1)} \otimes Y_{(2)}X_{(2)} + Y_{(1)}X_{(1)} \otimes X_{(2)}Y_{(2)} - Y_{(1)}X_{(1)} \otimes X_{(2)}Y_{(2)}\\
&= [X_{(1)}, Y_{(1)}] \otimes X_{(2)}Y_{(2)} + Y_{(1)}X_{(1)} \otimes [X_{(2)}, Y_{(2)}],
\end{aligned}
\tag{II.11}
$$

kde X, Y jsou prvky z algebry a kde $X_{(1)} \otimes X_{(2)} = \Delta X$, $Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} = \Delta Y$. Nyní vyčíslíme podmínky (I.17) a (I.25) pro případ první z podmínek (II.6), to jest pro podmínku $[N, P_0] - P_1 = 0$,

$$
\begin{aligned}
\epsilon([N, P_0] - P_1) &= \epsilon(NP_0 - P_0N - P_1) = \epsilon(N)\epsilon(P_0) - \epsilon(P_0)\epsilon(N) - \epsilon(P_1) = 0, \\
\Delta([N, P_0] - P_1) &= \Delta[N, P_0] - \Delta P_1 = [N, P_0] \otimes \mathbf{11} + [N, \mathbf{1}] \otimes \mathbf{1}P_0 + [\mathbf{1}, P_0] \otimes N\mathbf{1} + [\mathbf{1}, \mathbf{1}] \otimes NP_0 \\
&\quad + P_0N \otimes [\mathbf{1}, \mathbf{1}] + \mathbf{1}N \otimes [\mathbf{1}, P_0] + P_0\mathbf{1} \otimes [N, \mathbf{1}] + \mathbf{11} \otimes [N, P_0] - P_1 \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes P_1 \\
&= ([N, P_0] - P_1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes ([N, P_0] - P_1) = 0, \\
S([N, P_0] - P_1) &= S(NP_0 - P_0N - P_1) = S(N)S(P_0) - S(P_0)S(N) - S(P_1) \\
&= (-N)(-P_0) - (-P_0)(-N) - (-P_1) = -(NP_0 - P_0N - P_1) \\
&= -([N, P_0] - P_1) = 0.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v případě první z podmínek (II.6) jsou tyto výrazy nulové, a analogickým způsobem bychom mohli prokázat také nulovost těchto výrazů pro zbývající dva výrazy z (II.6). Vztahy (II.6) a (II.10) tedy zavádí na algebře generované prvky P_0, P_1, N strukturu Hopfovy algebry.

Vztahy (II.10) definující konásobení zůstanou nezměněny, zaměníme-li složky v tenzorovém součinu, což znamená, že zavedená Hopfova algebra je kokomutativní. V odstavci pojednávajícím o quasitriangulární struktuře bylo ukázáno, že pro kokomutativní Hopfovu algebru lze zavést quasitriangulární strukturu

$$\mathcal{R} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \tag{II.12}$$

Hopfova algebra $U(so(2,1))$ je tedy quasitriangulární Hopfovou algebrou.

V případě Lieovy algebry $so(2,1)$ jsme vztahy (II.9) definovali reprezentaci ρ na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Nyní tuto reprezentaci Lieovy algebry užijeme k tomu, abychom definovali reprezentaci univerzální obalující algebry $U(so(2,1))$ na vektorovém prostoru $\mathbb{C}^3$.

Pod pojmem reprezentace algebry $U(so(2,1))$ na vektorovém prostoru $\mathbb{C}^3$ budeme rozumět lineární zobrazení ρ z algebry $U(so(2,1))$ do prostoru $L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$, tvořeného všemi lineárními zobrazeními $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, pro které platí $\rho(XY) = \rho(X) \circ \rho(Y)$, kde X, $Y \in U(so(2,1))$ a kde symbol $\circ$ značí skládání zobrazení. Protože libovolné lineární zobrazení $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ z prostoru $L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ můžeme zapsat pomocí 3×3 matice, budeme místo prostoru $L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ uvažovat prostor všech komplexních 3×3 matic $Mat_{3\times3}(\mathbb{C})$. Budeme tedy uvažovat lineární zobrazení

$$\rho : U(so(2,1)) \to Mat_{3\times3}(\mathbb{C}), \tag{II.13}$$

které bude splňovat podmínku

$$\rho(XY) = \rho(X)\rho(Y), \tag{II.14}$$

kde X, $Y \in U(so(2,1))$ a kde násobení na pravé straně je násobením matic.

Zobrazení ρ (II.13) zavedeme tak, že pro jednotkový prvek definujeme

$$\rho(\mathbf{1}) = \delta, \tag{II.15}$$

kde δ značí jednotkovou matici. Pro prvky P_0, P_1, N zavedeme zobrazení ρ pomocí vztahů (II.9), to jest stejným způsobem jako v případě reprezentace (II.7) Lieovy algebry $so(2,1)$, s tím rozdílem, že nyní pracujeme s vektorovými prostory nad komplexními čísly. Dále uvažujme $k = 2, 3, \ldots$ prvků $X_1, X_2, \ldots, X_k$, které jsou lineárními kombinacemi vektorů P_0, P_1, N, a pro které je tedy zobrazení ρ určeno vztahy (II.9). Na prvcích tvaru $X_1X_2\cdots X_k$ pak zobrazení ρ vyčíslíme s užitím vztahu

$$\rho(X_1X_2\cdots X_k) = \rho(X_1)\rho(X_2)\cdots\rho(X_k), \tag{II.16}$$

kde násobení na pravé straně má význam násobení matic. Protože je zobrazení ρ lineární a libovolný prvek algebry generované prvky P_0, P_1, N můžeme zapsat jako lineární kombinaci prvků $\mathbf{1}$, X_1, X_1X_2, $X_1X_2X_3$, ..., kde X_1, $X_2, \ldots$ jsou lineárními kombinacemi vektorů P_0, P_1, N, zavádí uvedená definice zobrazení ρ na celé algebře generované prvky P_0, P_1, N.

Nyní uvažujme prvky $X = X_1X_2 \cdots X_k$, $Y = Y_1Y_2 \cdots Y_{k'}$, kde k, $k' = 1, 2, \ldots$ a kde X_1, Y_1, X_2, $Y_2, \ldots$ jsou lineárními kombinacemi vektorů P_0, P_1, N, a dosaďme tyto vektory do podmínky (II.14)

$$\begin{aligned}\rho(XY) &= \rho(X_1X_2 \cdots X_kY_1Y_2 \cdots Y_{k'}) = \rho(X_1)\rho(X_2) \cdots \rho(X_k)\rho(Y_1)\rho(Y_2) \cdots \rho(Y_{k'})\\ &= \rho(X_1X_2 \cdots X_k)\rho(Y_1Y_2 \cdots Y_{k'}) = \rho(X)\rho(Y).\end{aligned}$$

Pro tyto prvky je tedy podmínka (II.14) splněna a podobně bychom mohli ukázat, že je tato podmínka splněna i v případě, kdy místo některých z prvků X, Y užijme jednotkový prvek $\mathbf{1}$, což by bylo důsledkem toho, že je reprezentován jednotkovou maticí. Z linearity zobrazení ρ pak plyne, že je na algebře generované prvky P_0, P_1, N zavedeno tak, že splňuje podmínku (II.14).

Zbývá ověřit, že zobrazení ρ zůstane dobře definováno i v případě, kdy zavedeme relace (II.6). Lze ukázat, že zobrazení ρ zůstane dobře definováno právě tehdy, když budou podmínky (II.6) reprezentovány nulovou maticí. Uvážíme-li vlastnost (II.8) zobrazení ρ, tak je zřejmé, že podmínky (II.6) jsou opravdu reprezentovány nulovou maticí, a zavedené zobrazení ρ tudíž definuje reprezentaci univerzální obalující algebry $U(so(2,1))$.

II.3 Maticová bialgebra

Tento odstavec bude pojednávat o bialgebře, kterou bychom mohli nazvat maticovou bialgebrou. O bialgebrách tohoto typu je podrobně pojednáno v [10, Kap 4]. Tuto bialgebru zavedeme z toho důvodu, že ji v následujícím odstavci užijeme při definici bialgebry duální k bialgebře $U(so(2,1))$.

Uvažujme algebru generovanou 9 prvky $\mathbf{t}^i{}_j$, i, $j = 1, 2, 3$, jejíž konstrukce byla popsána v odstavci I.1. Abychom nemuseli pokaždé, když se objeví nějaké indexy, vypisovat hodnoty, kterých mohou nabývat, zavedeme konvenci, podle které budou indexy i, j, k, $l, \ldots$ nabývat hodnot $1, 2, 3$. Hodnoty indexů pak budeme uvádět jen v případech, které se budou odlišovat od této konvence, nebo v případech, kdy budeme chtít zdůraznit způsob indexování. Z této algebry vytvoříme bialgebru tak, že pro tyto generující prvky definujeme výrazy (I.13) definující konásobení a kojednotku. Těmito výrazy v našem případě budou

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{t}^i{}_j &= \mathbf{t}^i{}_k \otimes \mathbf{t}^k{}_j,\\ \epsilon(\mathbf{t}^i{}_j) &= \delta^i_j.\end{aligned} \tag{II.17}$$

Z postupu tvorby bialgebry, popsané v odstavci I.3, plyne, že bialgebra bude těmito vztahy definována, pokud budou pro generující prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ splněny axiomy bialgebry (I.10)

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta\mathbf{t}^i{}_j &= (\Delta \otimes id)(\mathbf{t}^i{}_k \otimes \mathbf{t}^k{}_j) = \mathbf{t}^i{}_l \otimes \mathbf{t}^l{}_k \otimes \mathbf{t}^k{}_j = (id \otimes \Delta)(\mathbf{t}^i{}_l \otimes \mathbf{t}^l{}_j) = (id \otimes \Delta)\Delta\mathbf{t}^i{}_j,\\ (\epsilon \otimes id)\Delta\mathbf{t}^i{}_j &= (\epsilon \otimes id)(\mathbf{t}^i{}_k \otimes \mathbf{t}^k{}_j) = \epsilon(\mathbf{t}^i{}_k)\mathbf{t}^k{}_j = \delta^i_k\mathbf{t}^k{}_j = \mathbf{t}^i{}_j\\ &= \mathbf{t}^i{}_k\delta^k_j = \mathbf{t}^i{}_k\epsilon(\mathbf{t}^k{}_j) = (id \otimes \epsilon)(\mathbf{t}^i{}_k \otimes \mathbf{t}^k{}_j) = (id \otimes \epsilon)\Delta\mathbf{t}^i{}_j.\end{aligned}$$

Pro generující prvky jsou tyto axiomy splněny, výrazy (II.17) tedy definují bialgebru. Tuto bialgebru budeme značit symbolem M.

Při zapisování některých vztahů bude výhodné, pokud si prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ představíme jako prvky matice, kterou budeme značit $\mathbf{t}$. Prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ tedy zapíšeme do matice

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}^1{}_1 & \mathbf{t}^1{}_2 & \mathbf{t}^1{}_3 \\ \mathbf{t}^2{}_1 & \mathbf{t}^2{}_2 & \mathbf{t}^2{}_3 \\ \mathbf{t}^3{}_1 & \mathbf{t}^3{}_2 & \mathbf{t}^3{}_3 \end{pmatrix}.$$

Při zapisování vztahů pak budeme s maticí $\mathbf{t}$ zacházet tak, jako by to byla obyčejná matice. Například budeme-li chtít zapsat vztah $\epsilon(\mathbf{t})$ v indexovém značení, to jest vyčíslit tento vztah pro určité indexy i, j, pak dostaneme $[\epsilon(\mathbf{t})]^i{}_j = \epsilon(\mathbf{t}^i{}_j)$. Vyskytne-li se symbol $\mathbf{t}$ v jednom vztahu několikrát, budeme při přepisování do indexového značení postupovat tak, jako by se jednalo o násobení matic, přičemž symboly, jako je například $\otimes$, vyskytující se mezi maticemi $\mathbf{t}$ nebudou mít na způsob indexování vliv. Například výrazu $\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}$ bude v indexovém značení odpovídat výraz $(\mathbf{t}\otimes\mathbf{t})^i{}_j = \mathbf{t}^i{}_k \otimes \mathbf{t}^k{}_j$. Vztahy (II.17) můžeme pomocí tohoto způsobu značení zapsat jako

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{t} &= \mathbf{t}\otimes\mathbf{t}, \\ \epsilon(\mathbf{t}) &= \delta, \end{aligned} \tag{II.18}$$

kde symbol δ značí jednotkovou matici. V některých případech bude potřeba pracovat s několika různými páry indexů. V takovémto případě budeme různé páry indexů odlišovat spodním indexem u symbolu $\mathbf{t}$, vztah $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\mathbf{t}^{i_3}{}_{j_3}$ zapsaný v indexovém značení tedy zapíšeme v maticovém značení jako $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$. Při přepisování takových vztahů do indexového značení budeme postupovat nezávisle pro každý pár indexů, vyskytne-li se tedy některá z matic $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3, \ldots$ více než jednou, pak budeme indexy umísťovat tak, jako by se jednalo o násobení těchto matic. Jako příklad vztahu zapsaného tímto způsobem můžeme uvést konásobení aplikované na prvek $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}) &= [\Delta(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)]^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = [(\Delta\mathbf{t}_1)(\Delta\mathbf{t}_2)]^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = [(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2\otimes\mathbf{t}_2)]^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} \\ &= [\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\otimes\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2]^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = \mathbf{t}^{i_1}{}_{k_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{k_2}\otimes\mathbf{t}^{k_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{k_2}{}_{j_2}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že bázové vektory bialgebry M, které jsou tvaru $\mathbf{1}$, $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}$, $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}$, $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\mathbf{t}^{i_3}{}_{j_3}$, …, můžeme pomocí nového značení zapsat jako $\mathbf{1}$, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$, ….

Nyní uvažujme strukturu R, kterou budeme nazývat R-matice, tvořenou $3^4 = 81$ komplexními čísly $R^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} \in \mathbb{C}$, i_1, j_1, i_2, $j_2 = 1, 2, 3$. S užitím této struktury zavedeme v algebře M relace

$$\mathbf{t}^{i_2}{}_{k_2}\mathbf{t}^{i_1}{}_{k_1}R^{k_1}{}_{j_1}{}^{k_2}{}_{j_2} = R^{i_1}{}_{l_1}{}^{i_2}{}_{l_2}\mathbf{t}^{l_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{l_2}{}_{j_2}. \tag{II.19}$$

Stejně, jako jsme zavedli pro prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ značení pomocí symbolu $\mathbf{t}$, zavedeme pro R-matici značení, podle kterého budeme R-matici označovat symbolem R_{12}. Při rozepisování tohoto symbolu v indexovém značení budeme psát $[R_{12}]^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = R^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2}$, přičemž dva spodní indexy u symbolu R užitého v maticovém značení označují, které indexy máme užít na první a na druhé dvojici indexů R-matice v případě, kdy užijeme indexového značení. Spodní indexy jsou v maticovém značení zavedeny pro to, aby odlišovali různé páry indexů, a vyskytne-li se stejný spodní index více než jednou, pak budeme při rozepisování do indexového značení postupovat tak, jako by se jednalo o násobení matic. Výraz $\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12}$ tedy v indexovém značení zapíšeme jako $(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12})^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = \mathbf{t}^{i_2}{}_{k_2}\mathbf{t}^{i_1}{}_{k_1}R^{k_1}{}_{j_1}{}^{k_2}{}_{j_2}$. Relace (II.19) můžeme pomocí takto zavedeného značení zapsat jako

$$\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} = R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2. \tag{II.20}$$

S užitím tohoto značení je snadné ověřit platnost podmínek (I.17), které zaručují to, že algebra vzniklá zavedením podmínek (II.20) je dobře definována. Pro podmínky (II.20) dostáváme

$$\begin{aligned}
\epsilon(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} - R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) &= \epsilon(\mathbf{t}_2)\epsilon(\mathbf{t}_1)R_{12} - R_{12}\epsilon(\mathbf{t}_1)\epsilon(\mathbf{t}_2) = \delta_2\delta_1R_{12} - R_{12}\delta_1\delta_2 = R_{12} - R_{12} = 0,\\
\Delta(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} - R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) &= \Delta(\mathbf{t}_2)\Delta(\mathbf{t}_1)R_{12} - R_{12}\Delta(\mathbf{t}_1)\Delta(\mathbf{t}_2) = \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} - R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\\
&= \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 \otimes R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} \otimes \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = 0,
\end{aligned}$$

přičemž jsme užili (II.20) a toho, že R-matice je tvořena čísly, a proto nezáleží na tom, zda ji napíšeme před nebo za tenzorový součin.

II.4 Hopfova algebra $Pol(SO(2,1))$

V tomto odstavci vytvoříme duální Hopfovu algebru k algebře $U(so(2,1))$. Při konstrukci této Hopfovy algebry užijeme aparátu maticových bialgeber, popsaných v předešlém odstavci, a reprezentace ρ algebry $U(so(2,1))$, definované v odstavci II.2, která bude vystupovat v definici bilineární formy zajišťující dualitu maticové bialgebry a bialgebry zavedené na univerzální obalující algebře. O tomto postupu, který využívá maticovou bialgebru, a reprezentace univerzální obalující algebry pomocí matic, o které jsme se zmínili v odstavci II.2, je pojednáno například v [10, Kap 4].

Uvažujme bialgebru M zavedenou v předešlém odstavci, to jest bialgebru generovanou 9 prvky $\mathbf{t}^i{}_j$, i, $j = 1, 2, 3$ s konásobením a kojednotkou (II.18). Pro prvky z této bialgebry a prvky z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, zavedené na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $so(2,1)$, se pokusíme definovat bilineární formu, která bude splňovat podmínky (I.37). Budeme tedy uvažovat bilineární formu

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : U(so(2,1)) \otimes M \to \mathbb{C}. \tag{II.21}$$

Tuto bilineární formu zavedeme tak, že pro prvky $\mathbf{1}$ a $\mathbf{t}^i{}_j$ z bialgebry M a pro prvky X z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, definujme

$$\begin{aligned}
\langle X, \mathbf{1}\rangle &= \epsilon(X),\\
\langle X, \mathbf{t}^i{}_j\rangle &= \rho(X)^i{}_j,
\end{aligned} \tag{II.22}$$

kde ϵ je kojednotka definovaná vztahy (II.10) a ρ je zobrazení definované vztahy (II.15), (II.16), přičemž indexy i, j určují prvek matice $\rho(X)$. Bilineární formu určenou těmito vztahy můžeme dodefinovat i pro zbývající prvky bialgebry M, a to tak, že užijeme druhé z vlastností (I.37). Pro prvky tvaru $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\cdots\mathbf{t}^{i_k}{}_{j_k}$, $k = 2, 3, \ldots$ z bialgebry M a prvky X z $U(so(2,1))$ tedy vyčíslíme bilineární formu pomocí vztahu

$$\begin{aligned}
\langle X, \mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\cdots\mathbf{t}^{i_k}{}_{j_k}\rangle &= \langle\Delta^{k-1}X, \mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\otimes\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{t}^{i_k}{}_{j_k}\rangle\\
&= \langle X_{(1)}\otimes X_{(2)}\otimes\cdots\otimes X_{(k)}, \mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\otimes\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{t}^{i_k}{}_{j_k}\rangle\\
&= \langle X_{(1)}, \mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\rangle\langle X_{(2)}, \mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\rangle\cdots\langle X_{(k)}, \mathbf{t}^{i_k}{}_{j_k}\rangle\\
&= \rho(X_{(1)})^{i_1}{}_{j_1}\rho(X_{(2)})^{i_2}{}_{j_2}\cdots\rho(X_{(k)})^{i_k}{}_{j_k}.
\end{aligned} \tag{II.23}$$

Užijeme-li maticového zápisu, zavedeného v předešlém odstavci, tak tento vztah zapíšeme jako

$$\langle X, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\ldots\mathbf{t}_k\rangle = \rho_1(X_{(1)})\rho_2(X_{(2)})\ldots\rho_k(X_{(k)}), \tag{II.24}$$

kde spodní index u symbolu ρ určuje, kterou dvojici indexů bychom museli užít při vyčíslování matice při užití indexového značení. Protože prvky $\mathbf{1}$, $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}$, $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}$, $\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\mathbf{t}^{i_3}{}_{j_3}$,... tvoří bázi v bialgebře M, zavádí vztahy (II.22) a (II.24) bilineární formu pro celou bialgebru M.

Nyní uvažujme prvky $f = \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k$, $g = \mathbf{t}_{1'}\mathbf{t}_{2'}\cdots\mathbf{t}_{k'}$ z bialgebry M a prvky X, Y z bialgebry $U(so(2,1))$ a ověřme pro tyto prvky první čtyři axiomy z (I.37), které musí splňovat bilineární forma definující dualitu bialgeber. Pro první axiom dostáváme

$$\begin{aligned}
\langle X, fg\rangle &= \langle X, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\mathbf{t}_{1'}\mathbf{t}_{2'}\cdots\mathbf{t}_{k'}\rangle \\
&= \rho_1(X_{(1)})\rho_2(X_{(2)})\cdots\rho_k(X_{(k)})\rho_{1'}(X_{(k+1)})\rho_{2'}(X_{(k+2)})\cdots\rho_{k'}(X_{(k+k')}) \\
&= \rho_1(X_{(1)(1)})\rho_2(X_{(1)(2)})\cdots\rho_k(X_{(1)(k)})\rho_{1'}(X_{(2)(1)})\rho_{2'}(X_{(2)(2)})\cdots\rho_{k'}(X_{(2)(k')}) \\
&= \langle X_{(1)}, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\rangle\langle X_{(2)}, \mathbf{t}_{1'}\mathbf{t}_{2'}\cdots\mathbf{t}_{k'}\rangle = \langle X_{(1)}, f\rangle\langle X_{(2)}, g\rangle = \langle \Delta X, f\otimes g\rangle,
\end{aligned}$$

kde jsme užili koasociativity konásobení, to jest toho, že platí $\Delta^{k+k'-1}X = (\Delta^{k-1}\otimes\Delta^{k'-1})\Delta X$. Pro druhý axiom dostáváme

$$\begin{aligned}
\langle XY, f\rangle &= \langle XY, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\rangle = \rho_1((XY)_{(1)})\rho_1((XY)_{(2)})\cdots\rho_k((XY)_{(k)}) \\
&= \rho_1(X_{(1)})\rho_1(Y_{(1)})\rho_2(X_{(2)})\rho_2(Y_{(2)})\cdots\rho_k(X_{(k)})\rho_k(Y_{(k)}) \\
&= \rho_1(X_{(1)})\rho_2(X_{(2)})\cdots\rho_k(X_{(k)})\rho_1(Y_{(1)})\rho_2(Y_{(2)})\cdots\rho_k(Y_{(k)}) \\
&= \langle X, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\rangle\langle Y, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\rangle = \langle X\otimes Y, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\otimes\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\rangle \\
&= \langle X\otimes Y, \Delta(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k)\rangle = \langle X\otimes Y, \Delta f\rangle.
\end{aligned}$$

V třetí rovnosti jsme užili vlastnosti $\rho(XY)^i{}_j = \rho(X)^i{}_k\rho(Y)^k{}_j$, plynoucí z definice (II.16) zobrazení ρ, kterou v případě i-tého páru indexů zapíšeme v maticovém zápisu jako $\rho_i(XY) = \rho_i(X)\rho_i(Y)$. Ve čtvrté rovnosti jsme výrazy přeuspořádali, přičemž toto přeuspořádání jsme provedli tak, aby zůstalo zachováno pořadí násobení matic ρ_i, které se pro každé $i = 1,\ldots,k$ vyskytují dvakrát. Zbývající dva axiomy jsou

$$\begin{aligned}
&\langle X, \mathbf{1}\rangle = \epsilon(X), \\
&\langle \mathbf{1}, f\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k\rangle = \rho_1(\mathbf{1})\rho_2(\mathbf{1})\cdots\rho_k(\mathbf{1}) = \delta_1\delta_2\cdots\delta_k = \epsilon(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\cdots\mathbf{t}_k).
\end{aligned}$$

Platnost prvního axiomu plyne přímo z definice (II.22) bilineární formy a platnost druhého axiomu je důsledkem definice (II.15) zobrazení ρ a definice (II.17) kojednotky, přičemž symbol δ_i značí jednotkovou matici pro i-tou dvojici indexů. Definovaná bilineární forma tedy splňuje první čtyři podmínky z (I.37), které jsou nezbytné pro dualitu bialgeber.

Získaná bilineární forma není nedegenerovaná, a bialgebry M a $U(so(2,1))$ tudíž nejsou nedegenerovaně duální, ale jak víme z odstavce I.6, lze z původních bialgeber vytvořit nové bialgebry, které mají tu vlastnost, že bilineární forma zúžená na tyto bialgebry je nedegenerovaná. Tento postup je založen na tom, že vezmeme jádra bilineární formy, a vytvoříme faktor bialgebry původních bialgeber a těchto jader, čímž vytvoříme bialgebry, ze kterých budou odstraněny prvky, pro které je bilineární forma degenerovaná, a bilineární forma zúžená na tyto bialgebry pak bude nedegenerovaná. My si tento postup poněkud zjednodušíme, a místo toho, abychom hledali jádra bilineární formy, budeme v bialgebře M hledat vztahy (I.6) splňující (I.40), kterými snížíme degeneraci bilineární formy (II.21).

Při hledání vztahů (I.6) splňujících (I.40), kterými budeme snižovat degeneraci naší bilineární formy využijeme dvou vlastností, quasitriangularity Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ a relace (II.6).

Jak bylo uvedeno v odstavci II.2, Hopfova algebra $U(so(2,1))$ je quasitriangulární s quasitriangulární strukturou (II.12). Z třetí z definičních podmínek (I.53) quasitriangulární struktury plyne, že pro libovolný prvek X z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ platí

$$(\tau\Delta X)\mathcal{R} - \mathcal{R}(\Delta X) = 0,$$

kde τ je lineární zobrazení přehazující členy v tenzorovém součinu. Pokusme se vyčíslit bilineární formu pro tuto podmínku a pro prvky $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ z bialgebry M.

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (\tau\Delta X)\mathcal{R} - \mathcal{R}(\Delta X), \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X_{(2)}\mathcal{R}^{(1)} \otimes X_{(1)}\mathcal{R}^{(2)}, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle - \langle \mathcal{R}^{(1)}X_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}X_{(2)}, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X_{(1)}\mathcal{R}^{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle \langle X_{(2)}\mathcal{R}^{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle - \langle \mathcal{R}^{(1)}X_{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(2)}X_{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}, \Delta\mathbf{t}_2 \rangle \langle X_{(2)} \otimes \mathcal{R}^{(1)}, \Delta\mathbf{t}_1 \rangle - \langle \mathcal{R}^{(1)} \otimes X_{(1)}, \Delta\mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(2)} \otimes X_{(2)}, \Delta\mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X_{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}, \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle \langle X_{(2)}\mathcal{R}^{(1)}, \Delta\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 \rangle - \langle \mathcal{R}^{(1)} \otimes X_{(1)}, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(2)} \otimes X_{(2)}, \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X_{(1)}, \mathbf{t}_2 \rangle \langle \mathcal{R}^{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle \langle X_{(2)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle - \langle \mathcal{R}^{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle X_{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle \langle X_{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X_{(1)}, \mathbf{t}_2 \rangle \langle X_{(2)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle - \langle \mathcal{R}^{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}^{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle \langle X_{(1)}, \mathbf{t}_1 \rangle \langle X_{(2)}, \mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle \Delta X, \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_1 \rangle \langle \mathcal{R}, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle - \langle \mathcal{R}, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle \langle \Delta X, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X, \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 \rangle R_{12} - R_{12} \langle X, \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 \rangle \\
&= \langle X, \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 R_{12} - R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 \rangle,
\end{aligned}$$

kde jsme označili

$$R_{12} = \langle \mathcal{R}, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rangle = \rho_1(\mathcal{R}^{(1)})\rho_2(\mathcal{R}^{(2)}). \tag{II.25}$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že $\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 R_{12} - R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = 0$ splňuje (I.40), zavedení této podmínky tudíž sníží degeneraci bilineární formy. V bialgebře M tedy zavedeme relace (II.19), které můžeme s užitím indexového zápisu zapsat jako (II.19), přičemž R je definováno vztahem (II.25), který v indexovém zápisu zapíšeme jako

$$R^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = \langle \mathcal{R}, \mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1} \otimes \mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2} \rangle = \rho(\mathcal{R}^{(1)})^{i_1}{}_{j_1} \rho(\mathcal{R}^{(2)})^{i_2}{}_{j_2}. \tag{II.26}$$

Z toho, co bylo o maticové bialgebře napsáno v předešlém odstavci je zřejmé, že vztahy (II.18), (II.20) s R-maticí (II.25) definují strukturu bialgebry.

V našem případě je R-matice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}, \tag{II.27}$$

kde jsme R-matici $R^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2}$ zapsali pomocí 9×9 matice tak, že řádky odpovídají indexům i_1, i_2 a sloupce indexům j_1, j_2 v pořadí $(i_1, i_2), (j_1, j_2) = (1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$. Dosazením této R-matice do vztahů (II.19) dostáváme

$$\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}\mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2} - \mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1} = [\mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1}, \mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2}] = 0, \tag{II.28}$$

což znamená, že zavedená bialgebra je komutativní.

Dalšími vztahy, které sníží degeneraci bilineární formy jsou

$$\mathbf{t}^T\eta^{-1}\mathbf{t} = \eta^{-1}, \qquad \mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T = \eta. \tag{II.29}$$

Pro druhý z těchto vztahů ověříme podmínky (I.17), nezbytné pro to, aby byla struktura bialgebry, zavedená vztahy (II.17), dobře definována i poté, co zavedeme tuto relaci.

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T-\eta) &= \epsilon(\mathbf{t})\eta\epsilon(\mathbf{t})-\eta = \delta\eta\delta-\eta = \eta-\eta = 0,\\ \Delta(\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T-\eta) &= \Delta(\mathbf{t})\eta\Delta(\mathbf{t}^T)-\eta\Delta(\mathbf{1}) = (\mathbf{t}\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t})\eta(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t}^T)(\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})-\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\\ &= (\mathbf{t}\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T)(\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})-\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} = (\mathbf{t}\otimes\mathbf{1})\eta(\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})-\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\\ &= (\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})-\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} = 0,\end{aligned}\tag{II.30}$$

kde jsme užili toho, že můžeme psát $\Delta\mathbf{t} = (\mathbf{t}\dot\otimes\mathbf{t}) = (\mathbf{t}\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t})$ a $[\Delta(\mathbf{t}^T)]^i{}_j = \Delta\mathbf{t}^j{}_i = \mathbf{t}^j{}_k\otimes\mathbf{t}^k{}_i = (\mathbf{1}\otimes\mathbf{t}^k{}_i)(\mathbf{t}^j{}_k\otimes\mathbf{1}) = [(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t}^T)(\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})]^i{}_j$, a druhého vztahu z (II.29). Podobně bychom mohli ověřit i platnost podmínek (I.17) v případě prvního vztahu z (II.29). Zavedeme-li tedy vztahy (II.29), tak bude struktura bialgebry stále dobře definována. Dále musíme ukázat, že je splněna podmínka (I.40), potřebná k tomu, aby byla po zavedení těchto vztahů dobře definována i bilineární forma (II.21). Abychom ukázali, že podmínka (I.40) je pro druhou z relací (II.29) splněna, měli bychom ukázat, že bilineární forma je nulová, vyčíslíme-li ji na této relaci a na libovolném z prvků $\mathbf{1}$, X, X_1X_2, $X_1X_2X_3$, $\ldots$ Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, kde X, X_1, X_2, X_3 jsou lineární kombinace prvků P_0, P_1, N. Pro bilineární formu (II.21) vyčíslenou na jednotkovém prvku a druhém ze vztahů (II.29) dostáváme

$$\langle\mathbf{1},\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T-\eta\rangle = \langle\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\mathbf{t}\eta\otimes\mathbf{t}^T\rangle-\eta\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle = \delta\eta\delta^T-\eta = 0.$$

Budeme-li vyčíslovat místo na jednotkovém prvku na prvku X z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, který je lineární kombinací vektorů P_0, P_1, N, pak dostaneme

$$\begin{aligned}\langle X,\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T-\eta\rangle &= \langle X\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes X,\mathbf{t}\eta\otimes\mathbf{t}^T\rangle-\eta\langle X,\mathbf{1}\rangle = \rho(X)\eta\delta^T+\delta\eta\rho(X)\\ &= \rho(X)\eta+\eta\rho(X) = 0,\end{aligned}$$

přičemž nulovost posledního výrazu je důsledkem toho, že matice $\rho(X)$ splňuje podmínku (II.3). V případě zbývajících prvků X_1X_2, $X_1X_2X_3$, $\ldots$ bude výpočet poněkud složitější, například pro prvek X_1X_2 dostáváme

$$\begin{aligned}\langle X_1X_2,\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T-\eta\rangle &= \langle X_1\otimes X_2,\Delta(\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T-\eta)\rangle\\ &= \langle X_1\otimes X_2,(\mathbf{t}\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t})\eta(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t}^T)(\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})-\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\rangle\\ &= \langle X_1\otimes X_2,(\mathbf{t}\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T)(\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})\rangle-\langle X_1\otimes X_2,\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\rangle\\ &= \langle X_1,\mathbf{t}\langle X_2,\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T\rangle\mathbf{t}^T\rangle-\langle X_1\otimes X_2,\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\rangle\\ &= \langle X_1,\mathbf{t}\langle X_2,\eta\rangle\mathbf{t}^T\rangle-\langle X_1\otimes X_2,\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\rangle\\ &= \langle X_1\otimes X_2,(\mathbf{t}\otimes\mathbf{1})\eta(\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1})\rangle-\langle X_1\otimes X_2,\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\rangle\\ &= \langle X_1\otimes X_2,\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T\otimes\mathbf{1}-\eta\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\rangle = \langle X_1,\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T-\eta\rangle\langle X_2,\mathbf{1}\rangle = 0,\end{aligned}$$

kde jsme užili toho, že $\langle X_2,\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T\rangle = \langle X_2,\eta\rangle$ a vztahu (II.29). Podobným výpočtem bychom mohli ukázat nulovost bilineární formy i v případě prvků tvaru $X_1X_2X_3, \ldots$. Analogicky k tomu, jak jsme postupovali v případě druhé z podmínek (II.29) bychom mohli postupovat i v případě první z podmínek. Relace (II.29) tedy splňují podmínku (I.40), a jejich zavedení tudíž sníží degeneraci bilineární formy (II.21).

Vztahů (II.29) můžeme využít také k tomu, abychom definovali antipode, a to tak, že pro prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ definujme antipode vztahem

$$S(\mathbf{t}) = \eta\mathbf{t}^T\eta^{-1}.\tag{II.31}$$

Jak víme z odstavce I.4, musí být pro to, aby tento vztah definoval antipode na celé algebře generované prvky $\mathbf{t}^i{}_j$, splněn pro generující prvky axiom (I.20). To, že je tomu tak, lze s užitím (II.29) snadno dokázat

$$\begin{aligned}\cdot(S\otimes id)\Delta\mathbf{t} &= S(\mathbf{t})\mathbf{t} = \eta\mathbf{t}^T\eta^{-1}\mathbf{t} = \eta\eta^{-1} = \mathbf{1}\delta = \mathbf{1}\epsilon(\mathbf{t})\\ &= \eta\eta^{-1} = \mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T\eta^{-1} = \mathbf{t}S(\mathbf{t}) = \cdot(id\otimes S)\Delta\mathbf{t}.\end{aligned} \tag{II.32}$$

Aby byl antipode, zavedený vztahem (II.31) dobře definován i v případě, kdy zavedeme relace (II.28) a (II.29), musí pro ně být splněna podmínka (I.25). Ověření této podmínky by se dalo provést užitím postupů podobným těm, které jsme užili například v (II.32).

Hopfovu algebru generovanou prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ s konásobením, kojednotkou a antipodem zavedenými vztahy (II.17), (II.31), a s relacemi (II.19), (II.29) budeme značit $Pol(SO(2,1))$. Důvod pro toto označení bude zřejmý z odstavce II.6, ve kterém ukážeme, že tuto algebru lze zavést také jako Hopfovu algebru definovanou na polynomech v prvcích matic z $SO(2,1)$.

Pro tuto Hopfovu algebru, to jest pro Hopfovu algebru generovanou prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ s relacemi (II.20), (II.29) s konásobením, kojednotkou a antipodem (II.18), (II.31), a Hopfovu algebru zavedenou na univerzální obalující algebře $U(so(2,1))$ Lieovy algebry $so(2,1)$, jsme definovali bilineární formu (II.21), (II.22), (II.23), která splňuje podmínky (I.37), a jejíž degeneraci se nám podařilo snížit tím, že jsme v maticové bialgebře M zavedli relace (II.19) a (II.29).

II.5 $Pol(SO(2,1))$-komodul algebra

V tomto odstavci užijeme maticové formy Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$ k tomu, abychom vytvořili analogii řádkových vektorů a jejich násobení maticí, což v jazyce Hopfových algeber popíšeme pomocí struktury pravé $Pol(SO(2,1))$-komodul algebry. Způsob zavedení této komodul algebry je příkladem obecného postupu pro zavádění komodul algeber v případě maticových bialgeber, který je popsán například v [10, Kap 4].

Uvažujme algebru generovanou třemi prvky $\mathbf{x}_i$, $i=1,2,3$. Z této algebry můžeme vytvořit komodul algebru tak, že pro prvky $\mathbf{x}_i$ definujeme zobrazení β

$$\beta(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_j\otimes\mathbf{t}^j{}_i. \tag{II.33}$$

Z odstavce I.7 víme, že tyto výrazy definují komodul algebru tehdy, když jsou pro prvky $\mathbf{x}_i$ splněny axiomy (I.42), to jest

$$\begin{aligned}(\beta\otimes id)\beta(\mathbf{x}_i) &= (\beta\otimes id)(\mathbf{x}_j\otimes\mathbf{t}^j{}_i) = \mathbf{x}_k\otimes\mathbf{t}^k{}_j\otimes\mathbf{t}^j{}_i = (id\otimes\Delta)(\mathbf{x}_k\otimes\mathbf{t}^k{}_i) = (id\otimes\Delta)\beta(\mathbf{x}_i),\\ (id\otimes\epsilon)\beta(\mathbf{x}_i) &= (id\otimes\epsilon)(\mathbf{x}_j\otimes\mathbf{t}^j{}_i) = \mathbf{x}_j\epsilon(\mathbf{t}^j{}_i) = \mathbf{x}_j\delta^j_i = \mathbf{x}_i.\end{aligned}$$

Axiomy (I.42) jsou tedy pro generující prvky $\mathbf{x}_i$ splněny, vztahy (II.33) tudíž definují pravou $Pol(SO(2,1))$-komodul algebru generovanou prvky $\mathbf{x}_i$.

V odstavci II.3 jsme zavedli značení, podle kterého zapisujeme prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ jako 3×3 matici $\mathbf{t}$. Analogicky k tomu zavedeme značení, podle kterého budeme prvky $\mathbf{t}_i$ zapisovat jako 1×3 matici $\mathbf{x}$, to jest jako řádkový vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3\end{pmatrix}.$$

Analogicky k tomu, jak jsme interpretovali násobení matic $\mathbf{t}$, budeme interpretovat i násobení řádkového vektoru $\mathbf{x}$ maticí $\mathbf{t}$. Výraz $\mathbf{x}\otimes\mathbf{t}$ tedy v indexovém značení zapíšeme jako $(\mathbf{x}\otimes\mathbf{t})_i = \mathbf{x}_j\otimes\mathbf{t}^j{}_i$. Vztah (II.33) definující zobrazení β tedy můžeme ve zkráceném maticovém zápisu zapsat vztahem

$$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\otimes\mathbf{t}. \tag{II.34}$$

V algebře generované prvky $\mathbf{x}_i$ zavedeme relace

$$\mathbf{x}_{j_2}\mathbf{x}_{j_1}R^{j_1}{}_{i_1}{}^{j_2}{}_{i_2} = \lambda \mathbf{x}_{i_1}\mathbf{x}_{i_2}, \tag{II.35}$$

kde R je R-matice definovaná vztahem (II.25) a kde $\lambda = 1$. Vyčíslíme-li v tomto vztahu λ a R-matici R (II.27), tak dostaneme

$$\mathbf{x}_{i_2}\mathbf{x}_{i_1} = \mathbf{x}_{i_1}\mathbf{x}_{i_2}, \tag{II.36}$$

tento vztah tedy říká, že zavedená algebra je komutativní.

Abychom mohli pomocí maticového značení zapsat také vztahy obsahující více volných indexů, zavedeme symboly $\mathbf{x}_{\bar{1}}$, $\mathbf{x}_{\bar{2}}, \ldots$, které budou mít význam řádkového vektoru, přičemž spodní index bude značit, který index musíme užít při rozepisování do indexového značení. Vztah $\mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}$ pak v indexovém značení zapíšeme jako $(\mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}})_{i_1 i_2} = \mathbf{x}_{i_1}\mathbf{x}_{i_2}$. Pruh nad indexem budeme psát z toho důvodu, abychom odlišili symboly $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, které značí prvky algebry, od symbolů $\mathbf{x}_{\bar{1}}$, $\mathbf{x}_{\bar{2}}, \ldots$, které mají význam řádkových vektorů. Relace (II.35) pak s užitím tohoto značení zapíšeme jako

$$\mathbf{x}_{\bar{2}}\mathbf{x}_{\bar{1}}R_{12} = \lambda \mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}. \tag{II.37}$$

Aby bylo zobrazení β dobře definováno i poté, co zavedeme tyto relace, musí být splněna podmínka (I.47). V našem případě tedy musíme ověřit nulovost výrazu

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{x}_{\bar{2}}\mathbf{x}_{\bar{1}}R_{12} - \lambda\mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}) &= \beta(\mathbf{x}_{\bar{2}})\beta(\mathbf{x}_{\bar{1}})R_{12} - \lambda\beta(\mathbf{x}_{\bar{1}})\beta(\mathbf{x}_{\bar{2}}) \\
&= (\mathbf{x}_{\bar{2}} \otimes \mathbf{t}_2)(\mathbf{x}_{\bar{1}} \otimes \mathbf{t}_1 R_{12} - \lambda(\mathbf{x}_{\bar{1}} \otimes \mathbf{t}_1)(\mathbf{x}_{\bar{2}} \otimes \mathbf{t}_2) \\
&= \mathbf{x}_{\bar{2}}\mathbf{x}_{\bar{1}} \otimes \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 R_{12} - \lambda\mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}} \otimes \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 \\
&= \mathbf{x}_{\bar{2}}\mathbf{x}_{\bar{1}} \otimes R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 - \lambda\mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}} \otimes \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 \\
&= (\mathbf{x}_{\bar{2}}\mathbf{x}_{\bar{1}}R_{12} - \lambda\mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}) \otimes \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = 0,
\end{aligned}$$

kde jsme užili vztahu (II.19), vztahu (II.37) a toho, že R-matice R_{12} jsou čísla a nezáleží tedy na tom, zda je napíšeme před nebo za tenzorový součin. Algebru generovanou prvky $\mathbf{x}_i$ s relacemi (II.35) budeme značit symbolem $Pol(\mathbb{R}^3)$, a protože je podmínka (I.47) splněna, zobrazení (II.33) vytváří z této algebry pravou $Pol(SO(2,1))$-komodul algebru.

Přestože jsme ve vztahu (II.35) položili $\lambda = 1$, je zřejmé, že vztahy (II.33), (II.35) by zaváděli pravou komodul algebru i v případě, kdy by λ bylo libovolné komplexní číslo. Například kdybychom položili $\lambda = -1$, tak bychom získali algebru generovanou antikomutujícími prvky $\mathbf{x}_i$.

V zavedené pravé komodul algebře $Pol(\mathbb{R}^3)$ si ještě všimněme prvku $\mathbf{x}_i\eta^{ij}\mathbf{x}_j$, který v maticovém zápisu zapíšeme jako $\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T$, kde η je matice zavedená v odstavci II.1. Tento prvek je zvláštní v tom, že zobrazení β aplikované na tento prvek dává následující výsledek

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{x}_i\eta^{ij}\mathbf{x}_j) = \beta(\mathbf{x}_i)\eta^{ij}\beta(\mathbf{x}_j) &= (\mathbf{x}_k \otimes \mathbf{t}^k{}_i)\eta^{ij}\beta(\mathbf{x}_l \otimes \mathbf{t}^l{}_j) = \mathbf{x}_k\mathbf{x}_l \otimes \mathbf{t}^k{}_i\eta^{ij}\mathbf{t}^l{}_j \\
&= \mathbf{x}_k\mathbf{x}_l \otimes (\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T)^{kl} = \mathbf{x}_k\mathbf{x}_l \otimes \eta^{kl} = \mathbf{x}_i\eta^{ij}\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{II.38}$$

Tento prvek je tedy zvláštní tím, že si při působení zobrazení β zachovává svůj tvar.

II.6 Interpretace $Pol(SO(2,1))$

V tomto odstavci uvedeme jiný způsob, který lze užít k definici Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$, a který zdůvodňuje její označení. Nejdříve uvedeme definici Hopfovy algebry zavedené na funkcích definovaných na obecné grupě G, a pak tento postup aplikujeme na případ naší grupy $SO(2,1)$. Také se zmíníme o alternativním způsobu definice bilineární formy (II.21) a komodul algebry $Pol(\mathbb{R}^3)$. Tento způsob definice Hopfovy algebry je uveden například v [12].

Pro Lieovu grupu G uvažujme množinu $C^\infty(G)$ všech komplexních nekonečněkrát diferencovatelných funkcí definovaných na této grupě. Uvážíme-li, že funkce z této množiny můžeme násobit komplexním číslem a sčítat, tak je zřejmé, že tato množina je vektorovým prostorem. Na tomto vektorovém prostoru zavedeme strukturu Hopfovy algebry tak, že zavedeme násobení, jednotku, konásobení, kojednotku a antipode

$$\begin{aligned} \cdot(f \otimes h)(g) &= f(g)h(g), \\ \mathbf{1}(g) &= 1, \\ \Delta(f)(g_1 \otimes g_2) &= f(g_1 g_2), \\ \epsilon(f) &= f(e), \\ S(f)(g) &= f(g^{-1}), \end{aligned} \tag{II.39}$$

kde f, $h \in C^\infty(G)$, g, g_1, $g_2 \in G$ a kde e značí jednotkový prvek grupy, $g_1 g_2$ násobení v grupě a g^{-1} inverzi v grupě. Násobení na pravé straně prvního vztahu má význam násobení funkcí, druhý vztah říká, že jednotkovým prvkem algebry je funkce identická jedné. V definici konásobení jsme místo prostoru $C^\infty(G) \otimes C^\infty(G)$ užili prostor $C^\infty(G \times G)$ všech komplexních nekonečněkrát diferencovatelných funkcí definovaných na množině $G \times G$. Ztotožnění těchto prostorů je možné v případě konečné grupy, avšak v případě obecné grupy G je drobným úskalím této definice.

Dále uvažujme Hopfovu algebru zavedenou na univerzální obalující algebře $U(\mathcal{L})$ Lieovy algebry $\mathcal{L}$ této grupy, kterou pro obecnou Lieovu algebru $\mathcal{L}$ zavedeme analogickým způsobem k tomu, jak jsme definovali $U(so(2,1))$ v odstavci II.2. Pro tuto Hopfovu algebru a algebru $C^\infty(G)$ lze zavést bilineární formu definující dualitu těchto Hopfových algeber, to jest takovou, která splňuje podmínky (I.37)

$$\langle X_1 X_2 \cdots X_n, f \rangle = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} f\left(\exp(t_1 X_1) \exp(t_2 X_2) \cdots \exp(t_n X_n)\right)\Big|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}, \tag{II.40}$$

kde $X_i \in \mathcal{L}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f \in C^\infty(G)$ a kde exp je exponenciální zobrazení z Lieovy algebry $\mathcal{L}$ do grupy G.

V našem případě užijeme výše zmíněných definic k tomu, abychom zavedli Hopfovu algebru na množině $Pol(SO(2,1))$ všech polynomů s komplexními koeficienty v prvcích matice A z grupy $SO(2,1)$. Množinu $Pol(SO(2,1))$ je vhodné uvažovat místo množiny $C^\infty(SO(2,1))$ z toho důvodu, že ztotožnění prostoru $Pol(SO(2,1)) \otimes Pol(SO(2,1))$ s prostorem $Pol(SO(2,1) \times SO(2,1))$ je možné, zatím, co ztotožnění prostoru $C^\infty(SO(2,1)) \otimes C^\infty(SO(2,1))$ s prostorem $C^\infty(SO(2,1) \times SO(2,1))$ nelze provést. Strukturu Hopfovy algebry na tomto prostoru, to jest násobení, jednotku, konásobení, kojednotku a antipode, definujeme pomocí vztahů (II.39).

Nyní uvažujme funkce $t^i{}_j(A)$ z $Pol(SO(2,1))$, které přiřadí matici $A \in SO(2,1)$ prvek $A^i{}_j$ této matice. Zapíšeme-li vztahy (II.39) pro tyto funkce, tak dostaneme

$$\begin{aligned} \cdot(t^{i_1}{}_{j_1} \otimes t^{i_2}{}_{j_2})(A) &= t^{i_1}{}_{j_1}(A) t^{i_2}{}_{j_2}(A), \\ \mathbf{1}(A) &= 1, \\ \Delta(t^i{}_j)(A \otimes B) &= t^i{}_j(AB) = t^i{}_k(A) t^k{}_j(B) = (t^i{}_k \otimes t^k{}_j)(A \otimes B), \\ \epsilon(t^i{}_j) &= t^i{}_j(\delta) = \delta^i_j, \\ S(t^i{}_j)(A) &= t^i{}_j(A^{-1}) = t^i{}_j(\eta A^T \eta^{-1}) = \eta^{ik} t^l{}_k(A) \eta^{-1}_{lj} = (\eta^{ik} t^l{}_k \eta^{-1}_{lj})(A), \end{aligned} \tag{II.41}$$

kde A, $B \in SO(2,1)$. Dále pro funkce $t^i{}_j$ platí

$$\begin{aligned} (t^i{}_k \eta^{kl} t^j{}_l - \eta^{ij})(A) &= (A \eta A^T - \eta)^{ij} = 0, \\ (t^k{}_i \eta^{-1}_{kl} t^l{}_j - \eta^{-1}_{ij})(A) &= (A^T \eta^{-1} A - \eta^{-1})_{ij} = 0, \end{aligned} \tag{II.42}$$

kde $A \in SO(2,1)$, což plyne ze vztahů (II.1).

Polynomy z $Pol(SO(2,1))$, jsou funkce tvaru $f(A) = c + c_i{}^j A^i_j + c_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2} A^{i_1}{}_{j_1} A^{i_2}{}_{j_2} + \cdots = (c\mathbf{1} + c_i{}^j t^i{}_j + c_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2} t^{i_1}{}_{j_1} t^{i_2}{}_{j_2} + \cdots)(A)$, kde c, c_i^j, $c_{i_1}{}^{j_1}{}_{i_2}{}^{j_2}, \ldots$ jsou komplexní koeficienty. Z tvaru těchto funkcí je vidět, že na prvky Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$ můžeme pohlížet také jako prvky komutativní algebry generované prvky $t^i{}_j$. Ze vztahů (II.41), (II.42) je zřejmé, že tato algebra je totožná s algebrou zavedenou v odstavci II.3 a II.4, přičemž vztahy (II.17), definující konásobení a kojednotku, jsou ekvivalentem druhého a třetího vztahu z (II.41), vztah (II.28) vyjadřující komutativitu algebry je důsledkem prvního ze vztahů (II.41), vztahy (II.29) jsou ekvivalentem vztahů (II.42) a vztah (II.31) definující antipode je ekvivalentem posledního ze vztahů (II.41). Hopfova algebra zavedená na množině $Pol(SO(2,1))$ pomocí (II.39) je tedy alternativním způsobem definice Hopfovy algebry, kterou jsme vytvořili v odstavcích II.3, II.4.

Lze ukázat že bilineární forma (II.40) s exponenciálním zobrazením (II.4) je ekvivalentní s bilineární formou (II.21), kterou jsme definovali vztahy (II.22), (II.23).

Podobným způsobem, jakým jsme postupovali v případě Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$, můžeme postupovat také v případě komodul algebry. V tomto případě budeme uvažovat prostor polynomů $Pol(\mathbb{R}^3)$ v $\mathbb{R}^3$, na kterém zavedeme strukturu algebry

$$\begin{aligned} \cdot(f \otimes h)(\vec{v}) &= f(\vec{v})h(\vec{v}), \\ \mathbf{1}(\vec{v}) &= 1, \end{aligned} \tag{II.43}$$

kde f, $h \in Pol(\mathbb{R}^3)$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, a kde násobení na pravé straně první z definic je násobením polynomů. Z této algebry vytvoříme $Pol(SO(2,1))$-komodul algebru tak, že definujeme zobrazení β

$$\beta(f)(\vec{v} \otimes A) = f(\vec{v}A), \tag{II.44}$$

kde $f \in Pol(\mathbb{R}^3)$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ a $A \in Pol(SO(2,1))$, přičemž jsme ztotožnili prostor $Pol(\mathbb{R}^3) \otimes Pol(SO(2,1))$ s prostorem $Pol(\mathbb{R}^3 \times SO(2,1))$.

Pro funkce $x_i(\vec{v}) = v_i$ přiřazující vektoru $\vec{v}$ jeho i-tou komponentu v_i, můžeme vztahy (II.43), (II.44) zapsat jako

$$\begin{aligned} \cdot(x_i \otimes x_j)(\vec{v}) &= x_i(\vec{v})x_j(\vec{v}), \\ \mathbf{1}(\vec{v}) &= 1, \\ \beta(x_i)(\vec{v} \otimes A) &= x_i(\vec{v}A) = x_j(\vec{v})t^j{}_i(A) = (x_j \otimes t^j{}_i)(\vec{v} \otimes A). \end{aligned} \tag{II.45}$$

Stejnými argumenty, jako v případě $Pol(SO(2,1))$, lze ukázat, že tato komodul algebra je ekvivalentní komodul algebře zavedené v odstavci II.5, přičemž vztah (II.36) vyjadřující komutativitu algebry je důsledkem prvního ze vztahů (II.45) a vztah (II.34) je ekvivalentem třetího ze vztahů (II.45). Na vlastnost (II.38) prvku $\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T$ pak můžeme pohlížet jako na důsledek toho, že vzdálenost $\vec{v}\eta\vec{v}^T$ je invariantní při transformacích vektoru $\vec{v}$ definovaných maticemi z $SO(2,1)$.

II.7 Kontrakce

V tomto odstavci provedeme kontrakci Hopfových algeber $U(so(2,1))$ a $Pol(SO(2,1))$ na Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ a $Pol(P(1,1))$. Budeme postupovat způsobem analogickým se způsobem kontrakce Lieových algeber, popsaném v [9, Kap 1], a se způsobem kontrakce ortogonálních kvantových grup, popsaném v [11]. Tento postup se bude skládat ze tří kroků. V prvním kroku vybereme podprostor pravé $Pol(SO(2,1))$-komodul algebry $Pol(\mathbb{R}^3)$ určený podmínkou $\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T = -r^2$, kde r bude kladný reálný parametr. V druhém kroku vyšetříme chování zobrazení β, které definuje koakci, pro různé hodnoty parametru r, a jak se toto chování projeví v Hopfových algebrách

$Pol(SO(2,1))$ a $U(so(2,1))$. V třetím kroku provedeme limitu $r \to \infty$ a uvidíme, že zobrazení β bude na získaném podprostoru algebry $Pol(\mathbb{R}^3)$ působit tak, jako by se jednalo o $Pol(P(1,1))$-komodul algebru $Pol(\mathbb{R}^2)$. Limita $r \to \infty$ nás tedy dovede k Hopfově algebře $Pol(P(1,1))$, kterou bychom mohli získat také postupem uvedeným v odstavci II.6 v případě grupy $P(1,1)$, a k Hopfově algebře $U(p(1,1))$, kterou bychom mohli získat také jako Hopfovu algebru zavedenou na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $p(1,1)$ postupem analogickým k postupu uvedenému v odstavci II.2.

Z hlediska grupy $SO(2,1)$ a její Lieovy algebry $so(2,1)$ můžeme na podmínku $\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T = -r^2$ pohlížet jako na analogii podmínky $\vec{v}\eta\vec{v}^T = -r^2$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, která by v případě vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ určovala hyperboloid. Limita $r \to \infty$ by pak odpovídala zvětšování tohoto hyperboloidu, a v případě nekonečné velikosti parametru r bychom dostali rovinu v $\mathbb{R}^3$, kterou můžeme identifikovat s $\mathbb{R}^2$. Na grupu $SO(2,1)$ a Lieovu algebru $so(2,1)$ můžeme pohlížet jako na struktury, které definují v $\mathbb{R}^3$ lineární transformace, vůči kterým tvoří body na hyperboloidu invariantní množinu a v případě limity $r \to \infty$ bychom tedy dostali struktury, které definují transformace roviny $\mathbb{R}^2$, a kterými by v našem případě byla grupa $P(1,1)$ a Lieova algebra $p(1,1)$.

V pravé $Pol(SO(2,1))$-komodul algebře $Pol(\mathbb{R}^3)$ uvažujme pro kladný reálný parametr r relaci

$$\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T = -r^2. \tag{II.46}$$

Pro tuto relaci a zobrazení β (II.34) můžeme ověřit podmínku (I.47), to jest nulovost výrazu

$$\beta(\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T + r^2) = \beta(\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T) + r^2\beta(\mathbf{1}) = \mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{1} + r^2\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = (\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T + r^2) \otimes \mathbf{1} = 0,$$

kde jsme užili (II.38) a (II.46). Protože je podmínka (I.47) splněna, zavádí zobrazení β pravou $Pol(SO(2,1))$-komodul algebru i v případě, kdy v algebře $Pol(\mathbb{R}^3)$ zavedeme relaci (II.46). Tuto vzniklou pravou $Pol(SO(2,1))$-komodul algebru budeme značit symbolem V. Prvek $\mathbf{x}_1$ z této algebry pak můžeme vyjádřit pomocí vztahu (II.46) jako funkci prvků $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$. Pro tento účel budeme předpokládat, že $\mathbf{x}_1 = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\mathbf{x}_{(n)1}}{r^n}$ a dosadíme tento rozvoj do (II.46), čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
-r^2 &= -(r\mathbf{x}_{(-1)1} + \mathbf{x}_{(0)1} + \frac{1}{r}\mathbf{x}_{(1)1} + \mathcal{O}(r^{-2}))^2 + \mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_3^2 \\
&= -r^2\mathbf{x}_{(-1)1}^2 - r(\mathbf{x}_{(-1)1}\mathbf{x}_{(0)1} + \mathbf{x}_{(0)1}\mathbf{x}_{(-1)1}) - (\mathbf{x}_{(-1)1}\mathbf{x}_{(1)1} + \mathbf{x}_{(1)1}\mathbf{x}_{(-1)1} + \mathbf{x}_{(0)1}^2) \\
&\quad + \mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_3^2 + \mathcal{O}(r^{-1}),
\end{aligned}$$

Hodnoty výrazů $\mathbf{x}_{(n)1}$ určíme tak, že porovnáme členy se stejnou mocninnou r na obou stranách rovnice. Pro nejvyšší mocniny v r pak dostaneme rozvoj

$$\mathbf{x}_1 = r\mathbf{1} + \frac{1}{2r}(\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_3^2) + \mathcal{O}(r^{-2}). \tag{II.47}$$

Nyní budeme předpokládat, že je nejen prvek $\mathbf{x}_1$ z algebry V zapsán pomocní mocninné řady, ale že jsou i prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ z Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$ zapsány pomocí mocninné řady, to jest

$$\mathbf{t}^i{}_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{t}^i_{(n)j}}{r^n}, \tag{II.48}$$

Tyto rozvoje v mocninách r dosadíme do vztahu (II.34) definujícího zobrazení β a podíváme se, jakým způsobem vystupují v tomto vztahu prvky $\mathbf{t}^i_{(n)j}$ pro různé mocniny r. Dosazením (II.47) a (II.48) do vztahu (II.34) dostáváme

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{x}_1) &= \beta(r\mathbf{1} + \mathcal{O}(r^{-1})) = r\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathcal{O}(r^{-2}) \\
&= \mathbf{x}_j \otimes \mathbf{t}^j{}_1 = r\mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(0)1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)1} + \mathbf{x}_a \otimes \mathbf{t}^a_{(0)1} + \mathcal{O}(r^{-1}), \\
\beta(\mathbf{x}_a) &= \mathbf{x}_j \otimes \mathbf{t}^j{}_a = r\mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(0)a} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{x}_b \otimes \mathbf{t}^b_{(0)a} + \mathcal{O}(r^{-1}),
\end{aligned} \tag{II.49}$$

kde indexy a, b nabývají hodnot $a, b = 2, 3$. Abychom nemuseli vypisovat, kterých hodnot nabývají indexy i, j, k, $l, \ldots$, tak jsme v odstavci II.3 zavedli konvenci, podle níž nabývají hodnot $1, 2, 3$. Abychom nemuseli vypisovat ani to, kterých hodnot nabývají indexy a, b, c, $d, \ldots$, tak zavedeme konvenci, podle které budou nabývat hodnot $2, 3$. Indexy ze začátku abecedy a, b, c, $d, \ldots$ tedy budou nabývat hodnot $2, 3$, zatímco indexy i, j, k, $l, \ldots$ budou nabývat hodnot $1, 2, 3$. Porovnáme-li ve vztahu (II.49) pro zobrazení β vyčíslené na prvku $\mathbf{x}_1$ členy se stejnými mocninnami r, tak vidíme, že $\mathbf{t}^1_{(0)1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{t}^1_{(1)1} = 0$ a $\mathbf{t}^a_{(0)1} = 0$. Budeme-li navíc požadovat, aby zobrazení β vyčíslené na nějakém prvku mělo vedoucí člen spojený se stejnou mocninou r jako prvek na kterém bylo vyčísleno, tak z výrazu (II.49) pro zobrazení β vyčíslené na prvcích $\mathbf{x}_a$ dostaneme $\mathbf{t}^1_{(0)a} = 0$. Dostáváme tedy

$$\mathbf{t}^1_{(0)1} = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{t}^1_{(1)1} = 0, \qquad \mathbf{t}^a_{(0)1} = 0, \qquad \mathbf{t}^1_{(0)a} = 0. \tag{II.50}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do vztahu (II.49) pro zobrazení β vyčíslené na prvcích $\mathbf{x}_a$, tak pro nejvyšší mocniny r dostaneme vyjádření

$$\beta(\mathbf{x}_a) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{x}_b \otimes \mathbf{t}^b_{(0)a} + \mathcal{O}(r^{-1}). \tag{II.51}$$

Nyní dosadíme rozvoj (II.48) a vztahy (II.50) také do relací (II.28), (II.29) zavedených v Hopfově algebře $Pol(SO(2,1))$ a do vztahů (II.17), (II.31) určujících konásobení, kojednotku a antipode. Ze získaných vztahů můžeme určit relace mezi prvky $\mathbf{t}^i_{(n)j}$ a vztahy pro konásobení, kojednotku a antipode vyčíslené na těchto prvcích. Při konkrétním výpočtu se budeme zajímat pouze o vztahy mezi těmi prvky $\mathbf{t}^i_{(n)j}$, které tvoří vedoucí členy rozvojů (II.48) prvků $\mathbf{t}^i{}_j$ v r, protože ve vztazích, které získáme provedením limity $r \to \infty$, nebudou ostatní prvky vystupovat. Budeme se tedy zajímat pouze o vztahy mezi prvky $\mathbf{t}^a_{(0)b}$, $\mathbf{t}^a_{(1)1}$, $\mathbf{t}^1_{(1)a}$ a $\mathbf{t}^1_{(0)1}$, které tvoří vedoucí členy rozvojů prvků $\mathbf{t}^i{}_j$, přičemž vztahy pro prvek $\mathbf{t}^1_{(0)1}$ nebudeme uvádět, protože je podle (II.50) roven jednotkovému prvku, a jeho chování je tudíž jednoznačně určeno definicí Hopfovy algebry.

Dosazením rozvojů (II.48) do relace (II.28) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2] &= \left[\mathbf{t}_{(0)1} + \tfrac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)1} + \tfrac{1}{r^2}\mathbf{t}_{(2)1} + \mathcal{O}(r^{-3}), \mathbf{t}_{(0)2} + \tfrac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)2} + \tfrac{1}{r^2}\mathbf{t}_{(2)2} + \mathcal{O}(r^{-3})\right] \\ &= [\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] + \tfrac{1}{r}\left([\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(1)2}] + [\mathbf{t}_{(1)1}, \mathbf{t}_{(0)2}]\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{r^2}\left([\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(2)2}] + [\mathbf{t}_{(2)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] + [\mathbf{t}_{(1)1}, \mathbf{t}_{(1)2}]\right) + \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že každý s členů spojený s mocninou r^0, $\frac{1}{r}$ a $\frac{1}{r^2}$ musí být roven nule, tak získáme rovnice

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] &= 0, \\ [\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(1)2}] + [\mathbf{t}_{(1)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] &= 0, \\ [\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(2)2}] + [\mathbf{t}_{(2)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] + [\mathbf{t}_{(1)1}, \mathbf{t}_{(1)2}] &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením vztahů (II.50) do těchto rovnic získáme relace

$$\begin{aligned} &[\mathbf{t}^{a_1}_{(0)b_1}, \mathbf{t}^{a_2}_{(0)b_2}] = 0, \\ &[\mathbf{t}^a_{(0)b}, \mathbf{t}^1_{(1)c}] = -[\mathbf{t}^a_{(1)b}, \mathbf{t}^1_{(0)c}] = 0, \\ &[\mathbf{t}^a_{(0)b}, \mathbf{t}^c_{(1)1}] = -[\mathbf{t}^a_{(1)b}, \mathbf{t}^c_{(0)1}] = 0, \\ &[\mathbf{t}^a_{(1)1}, \mathbf{t}^b_{(1)1}] = -[\mathbf{t}^a_{(0)1}, \mathbf{t}^b_{(2)1}] - [\mathbf{t}^a_{(2)1}, \mathbf{t}^b_{(0)1}] = 0, \\ &[\mathbf{t}^1_{(1)a}, \mathbf{t}^1_{(1)b}] = -[\mathbf{t}^1_{(0)a}, \mathbf{t}^1_{(2)b}] - [\mathbf{t}^1_{(2)a}, \mathbf{t}^1_{(0)b}] = 0, \\ &[\mathbf{t}^a_{(1)1}, \mathbf{t}^1_{(1)b}] = -[\mathbf{t}^a_{(0)1}, \mathbf{t}^1_{(2)b}] - [\mathbf{t}^a_{(2)1}, \mathbf{t}^1_{(0)b}] = 0, \end{aligned} \tag{II.52}$$

přičemž první vztah využívá první rovnice, další dva vztahy druhé rovnice a zbývající vztahy jsou důsledkem třetí rovnice. Tyto vztahy říkají, že prvky $\mathbf{t}^a_{(0)b}$, $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)a}$ vzájemně komutují.

Dále rozvoje (II.48) dosadíme do vztahů (II.29), čímž dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}^T\eta^{-1}\mathbf{t} &= \left(\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})\right)^T \eta^{-1} \left(\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) \\
&= \mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\left(\mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}\mathbf{t}_{(1)} + \mathbf{t}^T_{(1)}\eta^{-1}\mathbf{t}_{(0)}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) = \eta^{-1}, \\
\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T &= \left(\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) \eta \left(\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})\right)^T \\
&= \mathbf{t}_{(0)}\eta\mathbf{t}^T_{(0)} + \frac{1}{r}\left(\mathbf{t}_{(0)}\eta\mathbf{t}^T_{(1)} + \mathbf{t}_{(1)}\eta\mathbf{t}_{(0)}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) = \eta.
\end{aligned}
$$

Uvážíme-li opět, že členy spojené s mocninnami r^0 a $\frac{1}{r}$ musí být nulové, tak získáme rovnice

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}\mathbf{t}_{(0)} &= \eta^{-1}, & \mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}\mathbf{t}_{(1)} + \mathbf{t}^T_{(1)}\eta^{-1}\mathbf{t}_{(0)} &= 0, \\
\mathbf{t}_{(0)}\eta\mathbf{t}^T_{(0)} &= \eta, & \mathbf{t}_{(0)}\eta\mathbf{t}^T_{(1)} + \mathbf{t}_{(1)}\eta\mathbf{t}_{(0)} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dosazením výrazů (II.50) do těchto rovnic pak získáme relace

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{-1} & 0 \\ \hline 0 & \eta^{-1}_{ab} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{-1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{cd}\mathbf{t}^d_{(0)b} \end{array}\right), \\
\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{-1} & 0 \\ \hline 0 & \eta^{ab} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{-1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^b_{(0)d} \end{array}\right), \\
\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbf{t}^1_{(1)b} + \mathbf{t}^c_{(1)1}\eta^{-1}_{cd}\mathbf{t}^d_{(0)b} \\ \hline -\mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{cd}\mathbf{t}^d_{(1)1} & \end{array}\right), \\
\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbf{t}^b_{(1)1} + \mathbf{t}^1_{(1)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^b_{(0)d} \\ \hline -\mathbf{t}^a_{(1)1} + \mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^1_{(1)d} & \end{array}\right),
\end{aligned}
\tag{II.53}
$$

přičemž v posledních dvou rovnicích jsme nevypisovali vztahy obsahující členy $\mathbf{t}^a_{(1)b}$, protože nejsou předmětem našeho zájmu.

Zbývá dosadit rozvoje (II.48) a vztahy (II.50) do vztahů (II.17), (II.31), určujících konásobení, kojednotku a antipode, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{t}^a{}_b &= \Delta\left(\mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1})\right) = \Delta \mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1}) = \mathbf{t}^a{}_i \otimes \mathbf{t}^i{}_b = \mathbf{t}^a_{(0)c} \otimes \mathbf{t}^c_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
\Delta \mathbf{t}^a{}_1 &= \Delta\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^a_{(1)1} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) = \tfrac{1}{r}\Delta \mathbf{t}^a_{(1)1} + \mathcal{O}(r^{-2}) = \mathbf{t}^a{}_i \otimes \mathbf{t}^i{}_1\\
&= \tfrac{1}{r}\left(\mathbf{t}^a_{(0)b} \otimes \mathbf{t}^b_{(1)1} + \mathbf{t}^a_{(1)1} \otimes \mathbf{1}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}),\\
\Delta \mathbf{t}^1{}_a &= \Delta\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) = \tfrac{1}{r}\Delta \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathcal{O}(r^{-2}) = \mathbf{t}^1{}_i \otimes \mathbf{t}^i{}_a\\
&= \tfrac{1}{r}\left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{t}^1_{(1)b} \otimes \mathbf{t}^b_{(0)a}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}),\\
\epsilon\left(\mathbf{t}^a{}_b\right) &= \epsilon\left(\mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1})\right) = \epsilon\left(\mathbf{t}^a_{(0)b}\right) + \mathcal{O}(r^{-1}) = \delta^a_b,\\
\epsilon\left(\mathbf{t}^a{}_1\right) &= \epsilon\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^a_{(0)1} + \mathcal{O}(r^{-1})\right) = \tfrac{1}{r}\epsilon\left(\mathbf{t}^a_{(0)1}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) = 0,\\
\epsilon\left(\mathbf{t}^1{}_a\right) &= \epsilon\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^1_{(0)a} + \mathcal{O}(r^{-1})\right) = \tfrac{1}{r}\epsilon\left(\mathbf{t}^1_{(0)a}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) = 0,\\
S\left(\mathbf{t}^a{}_b\right) &= S\left(\mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1})\right) = S\left(\mathbf{t}^a_{(0)b}\right) + \mathcal{O}(r^{-1}) = \eta^{ak}\mathbf{t}^l{}_k\eta^{-1}_{lb} = \eta^{ac}\mathbf{t}^d_{(0)c}\eta^{-1}_{db} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
S\left(\mathbf{t}^a{}_1\right) &= S\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^a_{(1)1} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) = \tfrac{1}{r}S\left(\mathbf{t}^a_{(1)1}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) = \eta^{ak}\mathbf{t}^l{}_k\eta^{-1}_{l1} = \tfrac{1}{r}\eta^{ab}\mathbf{t}^1_{(1)b}\eta^{-1}_{11} + \mathcal{O}(r^{-2})\\
&= -\tfrac{1}{r}\eta^{ab}\mathbf{t}^1_{(1)b} + \mathcal{O}(r^{-2}) = -\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^d_{(1)1}\eta^{-1}_{dc}\mathbf{t}^c_{(0)b}\eta^{ba} + \mathcal{O}(r^{-2}),\\
S\left(\mathbf{t}^1{}_a\right) &= S\left(\frac{1}{r}\mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) = \tfrac{1}{r}S\left(\mathbf{t}^1_{(1)a}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) = \eta^{1k}\mathbf{t}^l{}_k\eta^{-1}_{la} = \tfrac{1}{r}\eta^{11}\mathbf{t}^b_{(1)1}\eta^{-1}_{ba} + \mathcal{O}(r^{-2})\\
&= -\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^b_{(1)1}\eta^{-1}_{ba} + \mathcal{O}(r^{-2}) = -\tfrac{1}{r}\eta^{-1}_{ba}\mathbf{t}^b_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^1_{(1)d} + \mathcal{O}(r^{-2}),
\end{aligned}$$

kde jsme užili některých vztahů z (II.53) k tomu, abychom upravili výrazy pro antipode vyčíslené na prvcích $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)a}$. Z těchto vztahů můžeme určit konásobení, kojednotku a antipode vyčíslené na prvcích $\mathbf{t}^a_{(0)b}$, $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)a}$, které jsou

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{t}^a_{(0)b} &= \mathbf{t}^a_{(0)c} \otimes \mathbf{t}^c_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
\Delta \mathbf{t}^a_{(1)1} &= \mathbf{t}^a_{(0)b} \otimes \mathbf{t}^b_{(1)1} + \mathbf{t}^a_{(1)1} \otimes \mathbf{1} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
\Delta \mathbf{t}^1_{(1)a} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{t}^1_{(1)b} \otimes \mathbf{t}^b_{(0)a} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
\epsilon(\mathbf{t}^a_{(0)b}) &= \delta^a_b,\\
\epsilon(\mathbf{t}^a_{(1)1}) &= 0,\\
\epsilon(\mathbf{t}^1_{(1)a}) &= 0,\\
S(\mathbf{t}^a_{(0)b}) &= \eta^{ac}\mathbf{t}^d_{(0)c}\eta^{-1}_{db} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
S(\mathbf{t}^a_{(1)1}) &= -\mathbf{t}^d_{(1)1}\eta^{-1}_{dc}\mathbf{t}^c_{(0)b}\eta^{ba} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
S(\mathbf{t}^1_{(1)a}) &= -\eta^{-1}_{ba}\mathbf{t}^b_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^1_{(1)d} + \mathcal{O}(r^{-1}),
\end{aligned}\tag{II.54}$$

Vztah $-\mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{cd}\mathbf{t}^d_{(1)1} = 0$ uvedený v (II.53) umožňuje vyjádřit prvky $\mathbf{t}^a_{(1)1}$, $a = 2, 3$ pomocí prvků $\mathbf{t}^a_{(0)b}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)a}$. Místo prvků $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ tedy můžeme psát $\mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{cd}\mathbf{t}^d_{(1)1}$, a vztahy pro tyto prvky pak můžeme získat ze vztahů pro prvky $\mathbf{t}^a_{(0)b}$, $\mathbf{t}^1_{(1)a}$. Například konásobení vyčíslené na prvcích

$\mathbf{t}^a_{(1)1}$ můžeme určit jako

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{t}^a_{(1)1} &= \Delta(\mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^1_{(1)d}) = \Delta(\mathbf{t}^a_{(0)c})\eta^{cd}\Delta(\mathbf{t}^1_{(1)d}) \\
&= (\mathbf{t}^a_{(0)e}\otimes\mathbf{t}^e_{(0)c})\eta^{cd}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{t}^1_{(1)d}+\mathbf{t}^1_{(1)f}\otimes\mathbf{t}^f_{(0)d})+\mathcal{O}(r^{-1}) \\
&= \mathbf{t}^a_{(0)e}\otimes\mathbf{t}^e_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^1_{(1)d}+\mathbf{t}^a_{(0)e}\mathbf{t}^1_{(1)f}\otimes\mathbf{t}^e_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^f_{(0)d}+\mathcal{O}(r^{-1}) \\
&= \mathbf{t}^a_{(0)e}\otimes\mathbf{t}^e_{(1)1}+\mathbf{t}^a_{(0)e}\mathbf{t}^1_{(1)f}\otimes\eta^{ef}\mathbf{1}+\mathcal{O}(r^{-1}) \\
&= \mathbf{t}^a_{(0)e}\otimes\mathbf{t}^e_{(1)1}+\mathbf{t}^a_{(0)e}\eta^{ef}\mathbf{t}^1_{(1)f}\otimes\mathbf{1}+\mathcal{O}(r^{-1}) \\
&= \mathbf{t}^a_{(0)b}\otimes\mathbf{t}^b_{(1)1}+\mathbf{t}^a_{(1)1}\otimes\mathbf{1}+\mathcal{O}(r^{-1}),
\end{aligned}$$

kde jsme užili toho, že místo prvků $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ můžeme psát $\mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{cd}\mathbf{t}^d_{(1)1}$, vztahů pro konásobení a kojednotku vyčíslené na prvcích $\mathbf{t}^a_{(0)b}$, $\mathbf{t}^1_{(1)a}$ a vztahu $\mathbf{t}^e_{(0)c}\eta^{cd}\mathbf{t}^f_{(0)d}=\eta^{ef}$ z (II.53). Prvky $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ tedy můžeme považovat pouze za označení výrazů $\mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{cd}\mathbf{t}^d_{(1)1}$. Tyto prvky tudíž nepřináší žádnou novou informaci, proto s nimi nebudeme v následujících úvahách počítat.

Nyní přistoupíme k provedení limity $r\to\infty$. Pro tento účel zavedeme symboly $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$, které budou značit

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta^{-1}_{\mu+2,\nu+2}, & g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu+2,\nu+2}, \\
\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu &= \lim_{r\to\infty}\mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2}=\mathbf{t}^{\mu+2}_{(0)}{}_{\nu+2}, & \mathbf{h}_\mu &= \lim_{r\to\infty} r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2}=\mathbf{t}^1_{(1)\mu+2},
\end{aligned}\tag{II.55}$$

kde μ, $\nu=0,1$. Podobně jako jsme zavedli konvenci pro indexy i, j, k, $l,\dots$ a a, b, c, $d,\dots$, tak zavedeme konvenci, podle které budou řecké indexy μ, ν,α, $\beta,\dots$ nabývat hodnot $0,1$. Hodnoty, kterých nabývají řecké indexy tedy nebudeme, pokud k tomu nebude nějaký zvláštní důvod, vypisovat. Relace (II.52), (II.53) a limitu $r\to\infty$ vztahů (II.54) přepíšeme pomocí tohoto značení jako

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu,\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\beta]=0, && [\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu,\mathbf{h}_\alpha]=0, && [\mathbf{h}_\mu,\mathbf{h}_\nu]=0, \\
&\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta}\mathbf{\Lambda}^\beta{}_\nu=g_{\mu\nu}, && \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta}\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\beta=g^{\mu\nu}, \\
&\Delta\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu=\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha\otimes\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\nu, && \Delta\mathbf{h}_\mu=\mathbf{1}\otimes\mathbf{h}_\mu+\mathbf{h}_\nu\otimes\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu, \\
&\epsilon(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu)=\delta^\mu_\nu, && \epsilon(\mathbf{h}_\mu)=0, \\
&S(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu)=g^\mu\alpha\mathbf{\Lambda}^\beta{}_\alpha g_{\beta\nu}, && S(\mathbf{h}_\mu)=-g_{\mu\nu}\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\alpha g^{\alpha\beta}\mathbf{h}_\beta,
\end{aligned}\tag{II.56}$$

přičemž matice $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$ a $g_{\mu\nu}$ jsou

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & .\\ . & -1\end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & .\\ . & -1\end{pmatrix}.\tag{II.57}$$

Podobně, jako jsme v odstavcích II.3 a II.5 zavedli značení prvků $\mathbf{t}^i{}_j$ a $\mathbf{x}_i$ pomocí 3×3 matice $\mathbf{t}$ a řádkového vektoru $\mathbf{x}$, zavedeme pro symboly $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$ a $\mathbf{h}_\mu$ značení pomocí 2×2 matice $\mathbf{\Lambda}$ a řádkového vektoru $\mathbf{h}$, to jest

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}\mathbf{\Lambda}^0{}_0 & \mathbf{\Lambda}^0{}_1\\ \mathbf{\Lambda}^1{}_0 & \mathbf{\Lambda}^1{}_1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}=\begin{pmatrix}\mathbf{h}_0 & \mathbf{h}_1\end{pmatrix}.$$

Při rozepisování vztahů v maticovém značení, to jest vztahů obsahujících symboly $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{h}$, do indexového značení si budeme počínat analogicky k tomu, jak bychom postupovali v případě matice $\mathbf{t}$ a řádkového vektoru $\mathbf{x}$. Vícenásobný výskyt symbolu $\mathbf{\Lambda}$ tedy budeme interpretovat jako násobení matic a současný výskyt symbolu $\mathbf{h}$ a $\mathbf{\Lambda}$ budeme interpretovat jako násobení řádkového vektoru maticí. Vztahy (II.56) pak s užitím tohoto značení zapíšeme jako

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}, \mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\beta}] &= 0, & [\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}, \mathbf{h}_{\alpha}] &= 0, & [\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1] &= 0,\\
\mathbf{\Lambda}^T g \mathbf{\Lambda} &= g, & \mathbf{\Lambda} g \mathbf{\Lambda}^T &= g, & &\\
\Delta \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{\Lambda} \otimes \mathbf{\Lambda}, & \Delta \mathbf{h} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{h} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{\Lambda}, & &\\
\epsilon(\mathbf{\Lambda}) &= \delta, & \epsilon(\mathbf{h}) &= 0, & &\\
S(\mathbf{\Lambda}) &= g \mathbf{\Lambda} g, & S(\mathbf{h}) &= -\mathbf{h} g \mathbf{\Lambda}^T g, & &
\end{aligned}$$

Vzniklou Hopfovu algebru, to jest algebru generovanou prvky $\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$, $\mathbf{h}_{\mu}$, μ, $\nu = 0, 1$ s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem (II.56) budeme označovat symbolem $Pol(P(1,1))$.

Stejně tak, jak jsme provedli limitu $r \to \infty$ v případě relací (II.52), (II.53) a vztahů (II.54), které určují Hopfovu algebru $Pol(SO(2,1))$, provedeme také limitu $r \to \infty$ v případě pravé $Pol(SO(2,1))$-komodul algebry V. Pro tento účel přeznačíme $\mathbf{x}_{\mu+2} \to \mathbf{x}_{\mu}$, $\mu = 0, 1$, což znamená, že změníme způsob indexování prvků $\mathbf{x}_i$ algebry V. Prvky, které jsme dosud značili jako $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, budeme nyní značit symboly $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$. Prvku, kterému ve starém značení odpovídal symbol $\mathbf{x}_1$, není v novém značení přiřazen žádný symbol, protože podle vztahu (II.47) ho můžeme nahradit výrazem obsahujícím pouze prvky $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, kterým v novém značení odpovídají symboly $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$. Relace (II.36) a limitu zobrazení β (II.51) přepíšeme pomocí tohoto značení jako

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = 0,\\
&\beta(\mathbf{x}_{\mu}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{h}_{\mu} + \mathbf{x}_{\nu} \otimes \mathbf{\Lambda}^{\nu}{}_{\mu}.
\end{aligned} \tag{II.58}$$

Limitu $Pol(SO(2,1))$-komodul algebry V, to jest algebru generovanou prvky $\mathbf{x}_{\mu}$, $\mu = 0, 1$ s relacemi (II.58) budeme značit symbolem $Pol(\mathbb{R}^2)$. Tato algebra je pravou $Pol(P(1,1))$-komodul algebrou se zobrazením β určeným vztahem (II.58). Stejně, jako jsme zavedli značení prvků $\mathbf{h}_{\mu}$ pomocí řádkového vektoru $\mathbf{h}$, zavedeme také značení prvků $\mathbf{x}_{\mu}$ pomocí řádkového vektoru $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Při rozepisování vztahů v maticovém značení do indexového značení budeme v případě řádkového vektoru $\mathbf{x}$ postupovat stejně, jako bychom postupovali v případě řádkového vektoru $\mathbf{h}$. Vztah (II.58) definující zobrazení β tedy můžeme v tomto značení zapsat jako

$$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{h} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{\Lambda}.$$

Nyní se pokusíme vyjádřit bilineární formu (II.21), (II.22), (II.23), vyčíslenou na prvcích $\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$ a $\mathbf{h}_{\mu}$. Nejdříve ukážeme, že pro zadání bilineární formy na Hopfově algebře $U(so(2,1))$ a Hopfově algebře $Pol(P(1,1))$ stačí zadat hodnotu výrazů

$$\langle P_{\alpha}, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \rangle, \qquad \langle P_{\alpha}, \mathbf{h}_{\mu} \rangle, \qquad \langle N, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \rangle, \qquad \langle N, \mathbf{h}_{\mu} \rangle. \tag{II.59}$$

Pro jednotkové prvky z Hopfových algeber $U(so(2,1))$ a $Pol(P(1,1))$ musí podle (I.37) platit

$$\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 1, \qquad \langle X, \mathbf{1} \rangle = \epsilon(X), \qquad \langle \mathbf{1}, \phi \rangle = \epsilon(\phi), \tag{II.60}$$

kde $X \in U(so(2,1))$ a $\phi \in Pol(P(1,1))$. Protože bilineární forma je bilineárním zobrazením, určují výrazy (II.59) hodnotu bilineární formy vyčíslené na prvku z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, který je lineární kombinací prvků P_0, P_1, N a na libovolném z prvků $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$ Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$. Nyní ukážeme, jak lze tuto bilineární formu vyčíslit pro prvky z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, které jsou tvaru $X_1X_2\cdots X_k$, $k=2,3,\ldots$, kde prvky X_1, $X_2,\ldots,X_k$ jsou lineárními kombinacemi prvků P_0, P_1, N, a pro prvky $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$ Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$.

$$
\begin{aligned}
\langle X_1X_2\cdots X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle &= \langle X_1\otimes X_2\otimes\cdots\otimes X_k,\Delta^{k-1}\mathbf{\Lambda}\rangle = \langle X_1\otimes X_2\otimes\cdots\otimes X_k,\mathbf{\Lambda}\otimes\mathbf{\Lambda}\otimes\cdots\otimes\mathbf{\Lambda}\rangle\\
&= \langle X_1,\mathbf{\Lambda}\rangle\langle X_2,\mathbf{\Lambda}\rangle\cdots\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle,\\
\langle X_1X_2\cdots X_k,\mathbf{h}\rangle &= \langle X_1\otimes X_2\otimes\cdots\otimes X_k,\Delta^{k-1}\mathbf{h}\rangle\\
&= \langle X_1\otimes X_2\otimes\cdots\otimes X_k,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{h}+\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{h}\otimes\mathbf{\Lambda}+\cdots\\
&\qquad\cdots+\mathbf{1}\otimes\mathbf{h}\otimes\cdots\otimes\mathbf{\Lambda}\otimes\mathbf{\Lambda}+\mathbf{h}\otimes\mathbf{\Lambda}\otimes\cdots\otimes\mathbf{\Lambda}\otimes\mathbf{\Lambda}\rangle\\
&= \langle X_1,\mathbf{1}\rangle\langle X_2,\mathbf{1}\rangle\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{1}\rangle\langle X_k,\mathbf{h}\rangle+\langle X_1,\mathbf{1}\rangle\langle X_2,\mathbf{1}\rangle\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{h}\rangle\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle+\cdots\\
&\qquad\cdots+\langle X_1,\mathbf{1}\rangle\langle X_2,\mathbf{h}\rangle\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{\Lambda}\rangle\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle+\langle X_1,\mathbf{h}\rangle\langle X_2,\mathbf{\Lambda}\rangle\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{\Lambda}\rangle\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle\\
&= \epsilon(X_1)\epsilon(X_2)\cdots\epsilon(X_{k-1})\langle X_k,\mathbf{h}\rangle+\epsilon(X_1)\epsilon(X_2)\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{h}\rangle\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle+\cdots\\
&\qquad\cdots+\epsilon(X_1)\langle X_2,\mathbf{h}\rangle\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{\Lambda}\rangle\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle+\langle X_1,\mathbf{h}\rangle\langle X_2,\mathbf{\Lambda}\rangle\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{\Lambda}\rangle\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle\\
&= \langle X_1,\mathbf{h}\rangle\langle X_2,\mathbf{\Lambda}\rangle\cdots\langle X_{k-1},\mathbf{\Lambda}\rangle\langle X_k,\mathbf{\Lambda}\rangle,
\end{aligned}
\tag{II.61}
$$

kde výrazy $\langle X_i,\mathbf{\Lambda}\rangle$, $\langle X_i,\mathbf{h}\rangle$, $i=1,2,\ldots,k$ jsou určeny pomocí (II.59), a kde jsme využili toho, že podle (II.10) $\epsilon(X_i)=0$. Protože libovolný prvek Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci jednotkového prvku a prvků tvaru $X_1X_2\cdots X_k$, umožňují tyto vztahy vyčíslit bilineární formu na libovolném prvku algebry $U(so(2,1))$ a na prvcích $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$ z Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$. Libovolný prvek Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$ je možno zapsat jako lineární kombinaci jednotkového prvku a prvků tvaru $\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l}$, kde k, $l=0,1\ldots$. Podaří-li se nám tedy určit hodnotu bilineární formy pro libovolný prvek z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ a pro tyto prvky, pak bude bilineární forma definována pro všechny prvky z Hopfových algebrách $U(so(2,1))$ a $Pol(P(1,1))$. Pro prvek X z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ a prvek tvaru $\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l}$ z Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\langle X,\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle\\
&\quad= \langle\Delta^{k+l-1}X,\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\otimes\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\otimes\mathbf{h}_{\alpha_1}\otimes\mathbf{h}_{\alpha_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle\\
&\quad= \langle X_{(1)}\otimes X_{(2)}\otimes\cdots\otimes X_{(k+l)},\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\otimes\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\otimes\mathbf{h}_{\alpha_1}\otimes\mathbf{h}_{\alpha_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle\\
&\quad= \langle X_{(1)},\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\rangle\langle X_{(2)},\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\rangle\cdots\langle X_{(k)},\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\rangle\langle X_{(k+1)},\mathbf{h}_{\alpha_1}\rangle\langle X_{(k+2)},\mathbf{h}_{\alpha_2}\rangle\cdots\langle X_{(k+l)},\mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle,
\end{aligned}
\tag{II.62}
$$

přičemž hodnoty výrazů $\langle X_{(i)},\mathbf{\Lambda}^{\mu_j}{}_{\nu_j}\rangle$ a $\langle X_{(i)},\mathbf{h}_{\alpha_j}\rangle$ lze určit pomocí (II.61). Výrazy (II.59) tedy zadávají bilineární formu na Hopfových algebrách $U(so(2,1))$ a $Pol(P(1,1))$.

Zkusme určit hodnotu těchto výrazů, to jest

$$
\begin{aligned}
\langle P_\alpha,\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle &= \lim_{r\to\infty}\langle P_\alpha,\mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2}\rangle = 0,\\
\langle P_\alpha,\mathbf{h}_\mu\rangle &= \lim_{r\to\infty}\langle P_\alpha,r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2}\rangle = \lim_{r\to\infty} rg_{\alpha\mu},\\
\langle N,\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle &= \lim_{r\to\infty}\langle N,\mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2}\rangle = \begin{cases}1 & \text{pokud } \mu=1,\nu=0 \text{ nebo } \mu=0,\nu=1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases},\\
\langle N,\mathbf{h}_\mu\rangle &= \lim_{r\to\infty}\langle N,r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2}\rangle = 0,
\end{aligned}
\tag{II.63}
$$

kde jsme užili (II.55), (II.22) a (II.9). Je vidět, že druhý výraz obsahuje divergentní člen, bilineární formu tedy nelze tímto způsobem definovat. Abychom odstranili tento divergentní člen, provedeme v Hopfově algebře $U(so(2,1))$ záměnu generujících prvků P_0, P_1, N za nové prvky P_0', P_1', N' tak, abychom do výrazů (II.63) zahrnuli parametr r způsobem, který odstraní divergenci. Touto záměnou bude

$$N' = N, \qquad P_0' = \frac{1}{r}P_0, \qquad P_1' = \frac{1}{r}P_1, \tag{II.64}$$

Provedeme-li záměnu P_0, P_1, N za P_0', P_1', N', tak bychom měli přepsat také relace (II.6) a vztahy (II.10), které definují konásobení, kojednotku a antipode. Například relaci $[P_0, P_1] = -N$ přepíšeme jako

$$-N' = -N = [P_0, P_1] = r^2[\tfrac{1}{r}P_0, \tfrac{1}{r}P_1] = r^2[P_0', P_1'],$$

z čehož dostáváme $[P_0', P_1'] = -\frac{1}{r^2}N'$. Podobným způsobem přepíšeme i zbylé relace (II.6) a vztahy (II.10), výslednými vztahy pak budou

$$\begin{aligned}
&[N', P_0'] = P_1', && [N', P_1'] = P_0', && [P_0', P_1'] = -\tfrac{1}{r^2}N', \\
&\Delta P_0' = P_0' \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0', && \Delta P_1' = P_1' \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_1', && \Delta N' = N' \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N', \\
&\epsilon(P_0') = 0, && \epsilon(P_1') = 0, && \epsilon(N') = 0, \\
&S(P_0') = -P_0', && S(P_1') = -P_1', && S(N') = -N'.
\end{aligned}$$

Srovnáme-li tyto relace a vztahy definující konásobení, kojednotku a antipode s původními relacemi a vztahy (II.6), (II.10), tak vidíme, že jediným rozdílem je to, že místo relace $[P_0, P_1] = -N$ máme relaci $[P_0', P_1'] = -\frac{1}{r^2}N'$. Limitou $r \to \infty$ dostaneme Hopfovu algebru generovanou prvky P_0', P_1', N' s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem

$$\begin{aligned}
&[N', P_0'] = P_1', && [N', P_1'] = P_0', && [P_0', P_1'] = 0, \\
&\Delta P_0' = P_0' \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0', && \Delta P_1' = P_1' \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_1', && \Delta N' = N' \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N', \\
&\epsilon(P_0') = 0, && \epsilon(P_1') = 0, && \epsilon(N') = 0, \\
&S(P_0') = -P_0', && S(P_1') = -P_1', && S(N') = -N'.
\end{aligned} \tag{II.65}$$

Tuto Hopfovu algebru budeme značit symbolem $U(p(1,1))$.

Vyčíslíme-li výrazy (II.59), ve kterých nahradíme P_0, P_1, N za P_0', P_1', N', tak dostaneme

$$\begin{aligned}
\langle P_\alpha', \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle \tfrac{1}{r}P_\alpha, \mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2} \rangle = 0, \\
\langle P_\alpha', \mathbf{h}_\mu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle \tfrac{1}{r}P_\alpha, r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2} \rangle = g_{\alpha\mu}, \\
\langle N', \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle N, \mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mu = 1, \nu = 0 \text{ nebo } \mu = 0, \nu = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \\
\langle N', \mathbf{h}_\mu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle N, r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2} \rangle = 0,
\end{aligned} \tag{II.66}$$

kde jsme užili (II.55), (II.64), (II.22) a (II.9). Jak je vidět, tyto výrazy již neobsahují divergentní člen a spolu se vztahy (II.60), (II.61) a (II.62) definují bilineární formu pro Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ a $Pol(P(1,1))$, a definují tak jejich dualitu.

Pro Hopfovu algebru vzniklou kontrakcí Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ jsme zavedli značení $U(p(1,1))$. Tento způsob značení jsme užili z toho důvodu, že tuto Hopfovu algebru bychom mohli získat také jako Hopfovu algebru zavedenou na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $p(1,1)$ pomocí postupu analogickému k tomu, jak jsme zavedli Hopfovu algebru na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $so(2,1)$ v odstavci II.2. Pro Hopfovu algebru vzniklou kontrakcí

Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$ jsme zavedli označení $Pol(P(1,1))$. V tomto případě bychom mohli tuto Hopfovu algebru vytvořit postupem uvedeným v odstavci II.6 tak, že bychom místo grupy $SO(2,1)$ uvažovali grupu $P(1,1)$. Vzniklou bilineární formu, definovanou na Hopfových algebrách $U(p(1,1))$ a $Pol(P(1,1))$ bychom pak mohli definovat vztahem (II.40). Také vzniklá $P(1,1)$-komodul algebra $Pol(\mathbb{R}^2)$ je analogií $Pol(SO(2,1))$-komodul algebry $Pol(\mathbb{R}^3)$ popsané v odstavci II.5, přičemž násobení vektoru maticí bychom v tomto případě museli nahradit afinní transformací, to jest násobením řádkového vektoru maticí a následným přičtením vektoru.

II.8 $*$-struktura

Ačkoliv je Lieova algebra $p(1,1)$, kterou bychom užili k zavedení Hopfovy algebry $U(p(1,1))$, a grupa $P(1,1)$, kterou bychom užili k zavedení Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$, definována nad reálnými čísly, Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ a $Pol(P(1,1))$ jsou zavedeny nad komplexními čísly. Tento nedostatek odstraníme tím, že zavedeme $*$-strukturu, o které je pojednáno v odstavci I.5, a kterou lze užít k vyjádření reality Lieovy algebry $p(1,1)$ a grupy $P(1,1)$.

V případě Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$ zavedené na polynomech na grupě $P(1,1)$ zavedeme operaci $*$ způsobem uvedeným v [12], to jest tak, aby pro polynomy f z $Pol(P(1,1))$ platilo

$$f^*(g) = \overline{f(g)},$$

pro všechna $g \in P(1,1)$. V případě prvků $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$ a $\mathbf{h}_\mu$ to znamená, že

$$\mathbf{\Lambda}^{\mu*}_{\ \nu} = \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \qquad \mathbf{h}^*_\mu = \mathbf{h}_\mu. \tag{II.67}$$

Jak víme z odstavce I.5, vztahy určující operaci $*$ na prvcích $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$ určují tuto operaci na celé Hopfově algebře $Pol(P(1,1))$ tehdy, když jsou pro tyto prvky splněny axiomy (I.29) a když relace zavedené v Hopfově algebře splňují podmínky (I.33). Axiomy (I.29) vyčíslené na prvcích $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$ jsou

$$\begin{aligned}
**\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu &= *\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu = \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu,\\
(S\circ *)^2\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu &= S*S*\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu = S*S\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu = S*(g^{\mu\alpha}\mathbf{\Lambda}^\beta{}_\alpha g_{\beta\nu}) = S(\overline{g^{\mu\alpha}}\mathbf{\Lambda}^{\beta*}_{\ \alpha}\overline{g_{\beta\nu}})\\
&= g^{\mu\alpha}S(\mathbf{\Lambda}^\beta{}_\alpha)g_{\beta\nu} = g^{\mu\alpha}(g^{\beta\rho}\mathbf{\Lambda}^\sigma{}_\rho g_{\sigma\alpha})g_{\beta\nu} = g^{\mu\alpha}g_{\sigma\alpha}\mathbf{\Lambda}^\sigma{}_\rho g^{\beta\rho}g_{\beta\nu} = \delta^\mu_\sigma\mathbf{\Lambda}^\sigma{}_\rho\delta^\rho_\nu = \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu,\\
\epsilon(\mathbf{\Lambda}^{\mu*}_{\ \nu}) &= \epsilon(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu) = \delta^\mu_\nu = \overline{\epsilon(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu)},\\
\Delta(\mathbf{\Lambda}^{\mu*}_{\ \nu}) &= \Delta(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu) = \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha\otimes\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\nu = (\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha\otimes\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\nu)^{*\otimes*} = (\Delta\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu)^{*\otimes*},\\
**\mathbf{h}_\mu &= *\mathbf{h}_\mu = \mathbf{h}_\mu,\\
(S\circ *)^2\mathbf{h}_\mu &= S*S*\mathbf{h}_\mu = S*S\mathbf{h}_\mu = S*(-g_{\mu\nu}\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\alpha g^{\alpha\beta}\mathbf{h}_\beta) = S(-\overline{g_{\mu\nu}}\overline{g^{\alpha\beta}}\mathbf{h}^*_\beta\mathbf{\Lambda}^{\nu*}_{\ \alpha})\\
&= S(-g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\mathbf{h}_\beta\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\alpha) = -g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}S(\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\alpha)S(\mathbf{h}_\beta)\\
&= -g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(g^{\nu\rho}\mathbf{\Lambda}^\sigma{}_\rho g_{\sigma\alpha})(-g_{\beta\delta}\mathbf{\Lambda}^\delta{}_\gamma g^{\gamma\phi}\mathbf{h}_\phi) = (g_{\mu\nu}g^{\nu\rho})\mathbf{\Lambda}^\sigma{}_\rho(g_{\sigma\alpha}g^{\alpha\beta})g_{\beta\delta}\mathbf{\Lambda}^\delta{}_\gamma g^{\gamma\phi}\mathbf{h}_\phi\\
&= \delta^\rho_\mu\mathbf{\Lambda}^\delta{}_\gamma\delta^\beta_\sigma g_{\beta\delta}\mathbf{\Lambda}^\delta{}_\gamma g^{\gamma\phi}\mathbf{h}_\phi = (\mathbf{\Lambda}^\sigma{}_\mu g_{\beta\delta}\mathbf{\Lambda}^\delta{}_\gamma)g^{\gamma\phi}\mathbf{h}_\phi = g_{\mu\gamma}g^{\gamma\phi}\mathbf{h}_\phi = \delta^\phi_\mu\mathbf{h}_\phi = \mathbf{h}_\mu,\\
\epsilon(\mathbf{h}^*_\mu) &= \epsilon(\mathbf{h}_\mu) = 0 = \overline{\epsilon(\mathbf{h}_\mu)},\\
\Delta(\mathbf{h}^*_\mu) &= \Delta(\mathbf{h}_\mu) = \mathbf{1}\otimes\mathbf{h}_\mu + \mathbf{h}_\nu\otimes\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu = (\mathbf{1}\otimes\mathbf{h}_\mu + \mathbf{h}_\nu\otimes\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu)^{*\otimes*} = (\Delta\mathbf{h}_\mu)^{*\otimes*},
\end{aligned}$$

přičemž při úpravě výrazů vzniklých vyčíslením axiomu $(S\circ *)^2 = id$ jsme užili některé z relací (II.56), konkrétně $\mathbf{\Lambda}^T g\mathbf{\Lambda} = g$, $\mathbf{\Lambda}g\mathbf{\Lambda}^T = g$, a dále toho, že $g^{\mu\nu}$ a $g_{\mu\nu}$ jsou reálné symetrické vzájemně inverzní matice. Než se pustíme do ověřování podmínek (I.33), tak upravíme výraz pro operaci $*$ aplikovanou na komutátor. Pro dva prvky X, Y z Hopfovy algebry dostáváme

$$[X,Y]^* = (XY - YX)^* = Y^*X^* - X^*Y^* = -[X^*,Y^*]. \tag{II.68}$$

S užitím tohoto vztahu ověříme podmínky (I.33) pro první tři relace z (II.56), to jest nulovost výrazů

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}, \mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\beta}]^* &= -[\mathbf{\Lambda}^{\mu*}_{\nu}, \mathbf{\Lambda}^{\alpha*}_{\beta}] = -[\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}, \mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\beta}] = 0,\\ [\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}, \mathbf{h}_{\alpha}]^* &= -[\mathbf{\Lambda}^{\mu*}_{\nu}, \mathbf{h}^*_{\alpha}] = -[\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}, \mathbf{h}_{\alpha}] = 0,\\ [\mathbf{h}_{\mu}, \mathbf{h}_{\nu}]^* &= -[\mathbf{h}^*_{\mu}, \mathbf{h}^*_{\nu}] = -[\mathbf{h}_{\mu}, \mathbf{h}_{\nu}] = 0.\end{aligned}$$

Zbývá ověřit podmínku (I.33) pro zbývající relace z (II.56), to jest nulovost výrazů

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\mu} g_{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^{\beta}{}_{\nu} - g_{\mu\nu})^* &= \mathbf{\Lambda}^{\beta*}_{\nu} \overline{g_{\alpha\beta}} \mathbf{\Lambda}^{\alpha*}_{\mu} - \overline{g_{\mu\nu}} = \mathbf{\Lambda}^{\beta}{}_{\nu} g_{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\mu} - g_{\mu\nu} = \mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\mu} g_{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^{\beta}{}_{\nu} - g_{\mu\nu} = 0,\\ (\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\alpha} g^{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^{\nu}{}_{\beta} - g^{\mu\nu})^* &= \mathbf{\Lambda}^{\nu*}_{\beta} \overline{g^{\alpha\beta}} \mathbf{\Lambda}^{\mu*}_{\alpha} - \overline{g^{\mu\nu}} = \mathbf{\Lambda}^{\nu}{}_{\beta} g^{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\alpha} - g^{\mu\nu} = \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\alpha} g^{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^{\nu}{}_{\beta} - g^{\mu\nu} = 0,\end{aligned}$$

kde jsme užili toho, že $g^{\mu\nu}$ a $g_{\mu\nu}$ jsou reálné matice a toho, že prvky $\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$ mezi sebou komutují. Podmínky (I.33) jsou splněny pro všechny relace zavedené v Hopfově algebře $Pol(P(1,1))$ a splněny jsou také axiomy (I.29) pro prvky $\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$, $\mathbf{h}_{\mu}$, vztahy (II.67) tudíž definují na Hopfově algebře $Pol(P(1,1))$ strukturu $*$-Hopfovy algebry.

Na Hopfově algebře $U(p(1,1))$ určíme $*$-strukturu tak, aby pro bilineární formu platila poslední z podmínek (I.37), to jest

$$\langle X, \phi^* \rangle = \overline{\langle S(X)^*, \phi \rangle},$$

kde $X \in U(p(1,1))$ a $\phi \in Pol(P(1,1))$. Pro prvek P'_0 z Hopfovy algebry $U(p(1,1))$, jednotkový prvek a prvky tvaru $\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \mathbf{h}_{\alpha_1} \mathbf{h}_{\alpha_2} \cdots \mathbf{h}_{\alpha_l}$, kde k, $l = 0, 1, 2, \ldots$ dostáváme

$$\begin{aligned}&\langle P'_0, \mathbf{1}^* \rangle = \langle P'_0, \mathbf{1} \rangle = \epsilon(P'_0) = 0 = \overline{\epsilon(P'_0)} = \overline{\langle P'_0, \mathbf{1} \rangle} = \overline{\langle S(P'_0)^*, \mathbf{1} \rangle},\\ &\langle P'_0, (\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \mathbf{h}_{\alpha_1} \mathbf{h}_{\alpha_2} \cdots \mathbf{h}_{\alpha_l})^* \rangle = \langle P'_0, \mathbf{h}^*_{\alpha_l} \cdots \mathbf{h}^*_{\alpha_2} \mathbf{h}^*_{\alpha_1} \mathbf{\Lambda}^{\mu_k *}_{\nu_k} \cdots \mathbf{\Lambda}^{\mu_2 *}_{\nu_2} \mathbf{\Lambda}^{\mu_1 *}_{\nu_1} \rangle\\ &\quad = \langle P'_0, \mathbf{h}_{\alpha_l} \cdots \mathbf{h}_{\alpha_2} \mathbf{h}_{\alpha_1} \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \cdots \mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2} \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \rangle\\ &\quad = \langle P'_{0(1)}, \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle \cdots \langle P'_{0(l)}, \mathbf{h}_{\alpha_1} \rangle \langle P'_{0(l+1)}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \rangle \cdots \langle P'_{0(k+l)}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \rangle\\ &\quad = \overline{\langle P'_{0(1)}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \rangle \cdots \langle P'_{0(k)}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \rangle \langle P'_{0(k+1)}, \mathbf{h}_{\alpha_1} \rangle \cdots \langle P'_{0(k+l)}, \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle}\\ &\quad = \overline{\langle P'_0, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \mathbf{h}_{\alpha_1} \mathbf{h}_{\alpha_2} \cdots \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle}\\ &\quad = \overline{\langle S(P'_0)^*, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \mathbf{h}_{\alpha_1} \mathbf{h}_{\alpha_2} \cdots \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle}.\end{aligned} \tag{II.69}$$

Čtvrtá rovnost v druhém vztahu plyne z toho, že $\Delta^{k+l-1} P'_0 = P'_{0(1)} \otimes \cdots \otimes P'_{0(k+l)}$ je součet prvků tvaru $\mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes P'_0 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}$, pro které platí

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes P'_0 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\alpha_l} \otimes \cdots \otimes \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \rangle\\ &\quad = \langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle \cdots \langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\alpha_{p+1}} \rangle \langle P'_0, \mathbf{h}_{\alpha_p} \rangle \langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\alpha_{p-1}} \rangle \cdots \langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \rangle\\ &\quad = \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \rangle} \cdots \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\alpha_{p-1}} \rangle}\, \overline{\langle P'_0, \mathbf{h}_{\alpha_p} \rangle}\, \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\alpha_{p+1}} \rangle} \cdots \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle}\\ &\quad = \overline{\langle \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes P'_0 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle},\end{aligned}$$

přičemž jsme užili toho, že platí

$$\langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\mu} \rangle = \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_{\mu} \rangle}, \quad \langle P'_0, \mathbf{h}_{\mu} \rangle = \overline{\langle P'_0, \mathbf{h}_{\mu} \rangle}, \quad \langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \rangle = \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \rangle}, \quad \langle P'_0, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \rangle = \overline{\langle P'_0, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \rangle},$$

což je vidět z (II.66) a (II.60).

Uvážíme-li, že libovolný prvek z Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci jednotkového prvku a prvků uvažovaného tvaru, tak je zřejmé, že musí platit $S(P'_0)^* = P'_0$. Aplikujeme-li na obě strany této rovnice operaci $*$, tak dostaneme $S(P'_0)^{**} = S(P'_0) = P'^*_0$ a tudíž

$P_0'^* = -P_0'$. Stejným způsobem lze postupovat také v případě prvků P_1' a N, a ve výsledku dostáváme

$$P_0'^* = -P_0', \qquad P_1'^* = -P_1', \qquad N'^* = -N'. \tag{II.70}$$

Z toho, co bylo napsáno v odstavci I.5 je zřejmé, že tyto vztahy lze užít k zavedení $*$-struktury na celé Hopfově algebře $U(P(1,1))$, přičemž axiomy takto zavedené $*$-struktury není třeba ověřovat, protože je možné ukázat, že jsou důsledkem vlastností (I.37) bilineární formy a platnosti axiomů $*$-struktury v Hopfově algebře $Pol(P(1,1))$. Vztahy (II.70) tudíž zavádějí na Hopfově algebře $U(p(1,1))$ strukturu $*$-Hopfovy algebry. Abychom odstranili znaménka minus ve vztazích (II.70), provedeme záměnu prvků P_0', P_1', N' za prvky P_0, P_1, N, kterou bude

$$P_0 = iP_0', \qquad P_1 = iP_1', \qquad N = iN'.$$

Je třeba upozornit, že ačkoliv jsme užili stejného označení, jako v případě prvků generujících Hopfovu algebru $U(so(2,1))$, jedná se o zcela jiné prvky, které nejsou totožné s prvky P_0, P_1, N zavedenými v odstavci II.2. Relace a vztahy definující konásobení, kojednotku a antipode (II.65) v Hopfově algebře $U(p(1,1))$ vyjádříme pomocí nových prvků. Například relaci $[N', P_0'] = P_1'$ přepíšeme následovně

$$iP_1 = i^2 P_1' = i^2 [N', P_0'] = [iN', iP_0'] = [N, P_0].$$

Podobným způsobem upravíme i zbývající vztahy v (II.65), čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
&[N, P_0] = iP_1, && [N, P_1] = iP_0, && [P_0, P_1] = 0, \\
&\Delta P_0 = P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0, && \Delta P_1 = P_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_1, && \Delta N = N \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N, \\
&\epsilon(P_0) = 0, && \epsilon(P_1) = 0, && \epsilon(N) = 0, \\
&S(P_0) = -P_0, && S(P_1) = -P_1, && S(N) = -N, \\
&P_0^* = P_0, && P_1^* = P_1, && N^* = N.
\end{aligned} \tag{II.71}$$

Pod $*$-Hopfovou algebrou $U(p(1,1))$ tedy budeme rozumět Hopfovu algebru generovanou prvky P_0, P_1, N s relacemi, konásobením, kojednotkou, antipodem a operací $*$ (II.71).

Také vztahy (II.66) určující bilineární formu vyjádříme s užitím nových prvků. Například vztah $\langle P_\alpha', \mathbf{h}_\mu \rangle = g_{\alpha\mu}$ upravíme na

$$ig_{\alpha\mu} = i\langle P_\alpha', \mathbf{h}_\mu \rangle = \langle iP_\alpha', \mathbf{h}_\mu \rangle = \langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu \rangle.$$

Analogickým způsobem upravíme i ostatní vztahy z (II.66) a bilineární formu pak budeme určovat těmito upravenými vztahy, které jsou

$$\begin{aligned}
\langle P_\alpha, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle &= 0, \\
\langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu \rangle &= ig_{\alpha\mu}, \\
\langle N, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle &= \begin{cases} i & \text{pokud } \mu = 1, \nu = 0 \text{ nebo } \mu = 0, \nu = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \\
\langle N, \mathbf{h}_\mu \rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{II.72}$$

Stejně, jako jsme zavedli $*$-strukturu na Hopfově algebře $Pol(P(1,1))$, můžeme zavést také $*$-strukturu na $Pol(P(1,1))$-komodul algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$. Pro polynomy f na $\mathbb{R}^2$ tedy definujeme

$$f^*(\vec{v}) = \overline{f(\vec{v})},$$

kde $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Tato definice v případě prvků $\mathbf{x}_\mu$ generujících tuto algebru znamená, že

$$\mathbf{x}_\mu^* = \mathbf{x}_\mu. \tag{II.73}$$

Aby byla tímto předpisem definována $*$-struktura na $Pol(P(1,1))$-komodul algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$, tak musí být pro tyto prvky splněn první z axiomů (I.29) a pro relaci $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = 0$ musí být splněna podmínka (I.33), což zajistí, že vztahy (II.73) definují na algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$ $*$-strukturu, a dále musí být pro prvky $\mathbf{x}_\mu$ a zobrazení β splněn axiom (I.44). První z axiomů (I.29) a axiom (I.44) vyčíslený na prvcích $\mathbf{x}_\mu$ je

$$\begin{aligned} &* * \mathbf{x}_\mu = *\mathbf{x}_\mu = \mathbf{x}_\mu, \\ &\beta(\mathbf{x}_\mu^*) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{h}_\mu + \mathbf{x}_\nu \otimes \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{h}_\mu + \mathbf{x}_\nu \otimes \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu)^{*\otimes *} = \beta(\mathbf{x}_\mu)^{*\otimes *}. \end{aligned}$$

Zbývá ověřit podmínku (I.33) pro relaci (II.58), to jest nulovost výrazu

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]^* = -[\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_1^*] = -[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = 0.$$

Vztahy (II.73) tedy zavádí $*$-strukturu na pravé $Pol(P(1,1))$-komodul algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$.

II.9 $U(p(1,1))$-modul algebra $Pol(\mathbb{R}^2)$

V odstavci I.8 jsme ukázali, jak lze k pravé komodul algebře přiřadit levou modul algebru. V našem případě tedy přiřadíme k pravé $Pol(P(1,1))$-komodul algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$ levou $U(p(1,1))$-modul algebru $Pol(\mathbb{R}^2)$. Zobrazení $\triangleright$, které určuje působení $*$-Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ na $*$-algebru $Pol(\mathbb{R}^2)$ je definováno vztahem (I.52), to jest

$$X \triangleright v = v^{(\bar{1})} \langle X, v^{(\bar{2})} \rangle,$$

kde $X \in U(p(1,1))$ a $v \in Pol(\mathbb{R}^2)$. Dosadíme-li za prvek X prvky P_0, P_1, N a za prvek v prvky $\mathbf{x}_\mu$, to jest v tom případě, kdy budeme prvky P_0, P_1, N z $*$-Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ působit na prvky $\mathbf{x}_\mu$ z $*$-algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$, tak dostaneme

$$\begin{aligned} P_\alpha \triangleright \mathbf{x}_\mu &= \mathbf{1}\langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu \rangle + \mathbf{x}_\nu \langle P_\alpha, \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu \rangle = i g_{\alpha\mu}, \\ N \triangleright \mathbf{x}_\mu &= \mathbf{1}\langle N, \mathbf{h}_\mu \rangle + \mathbf{x}_\nu \langle N, \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu \rangle = \begin{cases} i\mathbf{x}_1 & \text{pro } \mu = 0 \\ i\mathbf{x}_0 & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{II.74}$$

Protože je algebra $Pol(\mathbb{R}^2)$ komutativní, můžeme libovolný prvek této algebry zapsat jako lineární kombinaci jednotkového prvku a prvků tvaru $\mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m$, kde n, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Určíme-li tedy jak působí prvky P_0, P_1, N na tyto prvky, tak bude určeno, jak působí prvky P_0, P_1, N na libovolný prvek algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$. Abychom vyčíslili zobrazení $\triangleright$ pro tyto prvky, tak nejdříve zjistíme, jak vypadá toto zobrazení vyčíslené na prvcích P_0, P_1, N z Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ a na prvcích $\mathbf{x}_\mu^n$ z algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$, to jest na mocninách prvků $\mathbf{x}_\mu$.

$$\begin{aligned} P_\alpha \triangleright \mathbf{x}_\mu^n &= (P_{\alpha(1)} \triangleright \mathbf{x}_\mu)(P_{\alpha(2)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \cdots (P_{\alpha(n)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu)^k (P_\alpha \triangleright \mathbf{x}_\mu)(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu)^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{x}_\mu)^k (i g_{\alpha\mu})(\mathbf{x}_\mu)^{n-1-k} = i g_{\alpha\mu} n \mathbf{x}_\mu^{n-1}, \\ N \triangleright \mathbf{x}_\mu^n &= (N_{(1)} \triangleright \mathbf{x}_\mu)(N_{(2)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \cdots (N_{(n)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu)^k (N \triangleright \mathbf{x}_\mu)(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu)^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{x}_\mu)^k (N \triangleright \mathbf{x}_\mu)(\mathbf{x}_\mu)^{n-1-k} = (N \triangleright \mathbf{x}_\mu) n \mathbf{x}_\mu^{n-1} = \begin{cases} i\mathbf{x}_1 n \mathbf{x}_0^{n-1} & \text{pro } \mu = 0 \\ i\mathbf{x}_0 n \mathbf{x}_1^{n-1} & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

kde jsme užili první z vlastností (I.50) a druhé z vlastností (I.49), komutativity prvků $\mathbf{x}_\mu$ a toho, že $\Delta^{n-1}P_\alpha = P_\alpha \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_\alpha \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes P_\alpha$ a $\Delta^{n-1}N = N \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes N$. S užitím těchto vztahů vyčíslíme zobrazení $\triangleright$ pro prvky P_0, P_1, N a pro prvky $\mathbf{1}$, $\mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m$ z algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
P_0 \triangleright \mathbf{1} &= \epsilon(P_0) = 0,\\
P_1 \triangleright \mathbf{1} &= \epsilon(P_1) = 0,\\
N \triangleright \mathbf{1} &= \epsilon(N) = 0,\\
P_0 \triangleright \mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m &= (P_{0(1)} \triangleright \mathbf{x}_0^n)(P_{0(2)} \triangleright \mathbf{x}_1^m) = (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_0^n)(P_0 \triangleright \mathbf{x}_1^m) + (P_0 \triangleright \mathbf{x}_0^n)(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_1^m)\\
&= in\mathbf{x}_0^{n-1}\mathbf{x}_1^m = i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m),\\
P_1 \triangleright \mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m &= (P_{1(1)} \triangleright \mathbf{x}_0^n)(P_{1(2)} \triangleright \mathbf{x}_1^m) = (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_0^n)(P_1 \triangleright \mathbf{x}_1^m) + (P_1 \triangleright \mathbf{x}_0^n)(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_1^m)\\
&= -im\mathbf{x}_0^n\mathbf{x}_1^{m-1} = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m),\\
N \triangleright \mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m &= (N_{(1)} \triangleright \mathbf{x}_0^n)(N_{(2)} \triangleright \mathbf{x}_1^m) = (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_0^n)(N \triangleright \mathbf{x}_1^m) + (N \triangleright \mathbf{x}_0^n)(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_1^m)\\
&= i\mathbf{x}_1 n\mathbf{x}_0^{n-1}\mathbf{x}_1^m + i\mathbf{x}_0 m\mathbf{x}_0^n\mathbf{x}_1^{m-1} = \left(i\mathbf{x}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} + i\mathbf{x}_0\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\right)(\mathbf{x}_0^n \mathbf{x}_1^m),
\end{aligned}$$

kde jsme využili komutativity prvků $\mathbf{x}_\mu$ a vlastností (I.49), (I.50) zobrazení $\triangleright$. Jak jsme v těchto vztazích naznačili, působení prvků P_0, P_1, N na algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$ lze výhodně zapsat pomocí vztahů obsahujících derivace. Budeme-li tedy na algebru $Pol(\mathbb{R}^2)$ pohlížet jako na algebru polynomů na $\mathbb{R}^2$, o které jsme se zmínili v odstavci II.6, tak budeme moci pro polynomy f z $Pol(\mathbb{R}^2)$ psát

$$\begin{aligned}
P_0 \triangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) &= i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1),\\
P_1 \triangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) &= -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1),\\
N \triangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) &= \left(i\mathbf{x}_0\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + i\mathbf{x}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}\right) f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1).
\end{aligned} \tag{II.75}$$

II.10 Algebra operátorů

V tomto odstavci užijeme aparátu zavedeného v odstavci I.10 k tomu, abychom vytvořili z $*$-Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ a $U(p(1,1))$-modul algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$ $*$-algebru, a ukážeme, že tato algebra splňuje požadavky kladené na algebru operátorů popisujících speciální teorii relativity.

Přirozenou algebrou generátorů symetrie speciální teorie relativity je univerzální obalující algebra $U(p(1,1))$, to jest algebra, na které jsme vztahy (II.71) zavedli strukturu Hopfovy algebry. Tato algebra je algebrou generovanou prvky P_0, P_1, N s relacemi

$$[N, P_0] = iP_1, \qquad [N, P_1] = iP_0, \qquad [P_0, P_1] = 0. \tag{II.76}$$

Tuto algebru bychom chtěli doplnit tak, aby obsahovala také operátory poloh. Vhodnými kandidáty na operátory poloh by mohli být prvky $\mathbf{x}_\mu$ z algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$. Tato algebra je algebrou generovanou prvky $\mathbf{x}_\mu$ s relací (II.73), to jest

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = 0. \tag{II.77}$$

V algebře generátorů symetrie uvažujme prvek G, který je lineární kombinací prvků P_0, P_1, N s reálnými koeficienty, to jest $G = \alpha_1 P_0 + \alpha_2 P_1 + \alpha_3 N$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. V kvantové mechanice hraje významnou roli prvek $-i\xi G$, $\xi \in \mathbb{R}$, který generuje infinitezimální transformace a prvek $e^{-i\xi G}$, který generuje konečné transformace.

My se nyní podíváme na zobrazení $\triangleright$ definující působení prvků Hopfovy algebry $U(p(1,1))$ na algebru $Pol(\mathbb{R}^2)$, které jsme zavedli v předešlé kapitole, a ukážeme, že prvky $-i\xi G$ a $e^{-i\xi G}$ generují požadované transformace prvků $\mathbf{x}_\mu$.

Nejdříve budeme uvažovat prvky $-i\xi G$ a ukážeme, že infinitezimální transformaci prvku $\mathbf{x}_\mu$ na prvek $\mathbf{x}'_\mu$ generovanou tímto prvkem lze zapsat vztahem

$$\mathbf{x}'_\mu = \mathbf{x}_\mu + (-i\xi G \triangleright \mathbf{x}_\mu) + \mathcal{O}(\xi^2). \tag{II.78}$$

Tento vztah vyčíslíme pro prvky $G = P_0$, P_1, N, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_\mu &= \mathbf{x}_\mu + (-i\xi P_\nu \triangleright \mathbf{x}_\mu) + \mathcal{O}(\xi^2) = \mathbf{x}_\mu + \xi g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\xi^2), \\ \mathbf{x}'_\mu &= \mathbf{x}_\mu + (-i\xi N \triangleright \mathbf{x}_\mu) + \mathcal{O}(\xi^2) = \begin{cases} \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_1 + \mathcal{O}(\xi^2) & \text{pro } \mu = 0 \\ \mathbf{x}_1 + \xi \mathbf{x}_0 + \mathcal{O}(\xi^2) & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

kde jsme užili vztahů (II.74). Z těchto vztahů je vidět, že vztah (II.78) definuje infinitezimální transformace prvků $\mathbf{x}_\mu$, které bychom očekávali v případě, kdy by reprezentovali operátory polohy.

Nyní budeme uvažovat prvky $e^{-i\xi G}$ a ukážeme, že transformaci prvku $\mathbf{x}_\mu$ na prvek $\mathbf{x}'_\mu$ generovanou tímto prvkem lze zapsat vztahem

$$\mathbf{x}'_\mu = e^{-i\xi G} \triangleright \mathbf{x}_\mu. \tag{II.79}$$

Tento vztah opět vyčíslíme pro prvky $G = P_0$, P_1, N. Pro prvky P_ν dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_\mu &= e^{-i\xi P_\nu} \triangleright \mathbf{x}_\mu = (\mathbf{1} - i\xi P_\nu - \tfrac{1}{2}\xi^2 P_\nu^2 + \cdots) \triangleright \mathbf{x}_\mu \\ &= (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu) - i\xi(P_\nu \triangleright \mathbf{x}_\mu) - \tfrac{1}{2}\xi^2 (P_\nu \triangleright (P_\nu \triangleright \mathbf{x}_\mu)) + \cdots = \mathbf{x}_\mu + \xi g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

kde jsme užili vztahů (II.74) a toho, že $P_\nu \triangleright (P_\nu \triangleright \mathbf{x}_\mu) = P_\nu \triangleright (i g_{\mu\nu}) = i g_{\mu\nu} \epsilon(P_\nu) = 0$ a nulové jsou samozřejmě také všechny členy obsahující P_ν v mocnině vyšší než druhé. Tyto vztahy popisují translace o ξ a to ve směru $\mathbf{x}_0$ v případě P_0 a ve směru $\mathbf{x}_1$ v případě P_1. Prvky P_0, P_1 tedy určují vztahem (II.79) transformace prvků $\mathbf{x}_\mu$, které bychom očekávali v případě, kdy by tyto prvky reprezentovali operátory poloh. Zbývá vyjádřit vztah (II.79) pro případ, kdy $G = N$. Abychom tak mohli učinit, tak si všimněme, že můžeme psát

$$\begin{pmatrix} -iN \triangleright \mathbf{x}_0 \\ -iN \triangleright \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix},$$

což je vidět z (II.74). S užitím tohoto vztahu pak můžeme vztah

$$\mathbf{x}'_\mu = e^{-i\xi N} \triangleright \mathbf{x}_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n (-iN)^n \triangleright \mathbf{x}_\mu$$

zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}'_0 \\ \mathbf{x}'_1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi \\ \sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi \mathbf{x}_0 + \sinh\xi \mathbf{x}_1 \\ \sinh\xi \mathbf{x}_0 + \cosh\xi \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Tento vztah popisuje Lorentzovu transformaci. Také v případě $G = N$ dostaneme vztahem (II.79) transformaci, kterou bychom očekávali v případě, kdy by prvky $\mathbf{x}_\mu$ reprezentovali operátory polohy. Vidíme tedy, že vztah (II.78) určuje infinitezimální transformace a vztah (II.79) určuje konečné transformace.

V kvantové mechanice určujeme transformaci operátoru $\mathbf{x}_\mu$ na operátor $\mathbf{x}'_\mu$ určenou prvkem ξG jako

$$\mathbf{x}'_\mu = e^{-i\xi G}\mathbf{x}_\mu e^{i\xi G}. \tag{II.80}$$

Rozvojem tohoto výrazu dostaneme vyjádření pro infinitezimální transformaci

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_\mu &= e^{-i\xi G}\mathbf{x}_\mu e^{i\xi G} = (\mathbf{1} - i\xi G + \mathcal{O}(\xi^2))\mathbf{x}_\mu(\mathbf{1} + i\xi G + \mathcal{O}(\xi^2)) = \mathbf{x}_\mu - i\xi G\mathbf{x}_\mu + i\xi\mathbf{x}_\mu G + \mathcal{O}(\xi^2)\\ &= \mathbf{x}_\mu - i\xi[G, \mathbf{x}_\mu] + \mathcal{O}(\xi^2).\end{aligned} \tag{II.81}$$

Naším úkolem bude vytvořit algebru, která bude obsahovat jak algebru generátorů symetrie (II.76) tak algebru poloh (II.77) takovou, že relace mezi prvky z těchto algeber budou zavedeny tak, aby platilo

$$\begin{aligned}[G, \mathbf{x}_\mu] &= G \triangleright \mathbf{x}_\mu,\\ e^{-i\xi G}\mathbf{x}_\mu e^{i\xi G} &= e^{-i\xi G} \triangleright \mathbf{x}_\mu.\end{aligned} \tag{II.82}$$

Relace mezi algebrou generátorů symetrie a algebrou poloh tedy budeme chtít zavést tak, aby vztah (II.81) popisoval infinitezimální transformaci určenou vztahem (II.78) a aby vztah (II.80) určoval transformaci (II.79).

Užijeme-li struktury Hopfovy algebry zavedené na algebře $U(p(1,1))$, tak můžeme psát

$$\begin{aligned}G_{(1)}\mathbf{x}_\mu S(G_{(2)}) &= G\mathbf{x}_\mu S(\mathbf{1}) + \mathbf{1}\mathbf{x}_\mu S(G) = G\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\mu G = [G, \mathbf{x}_\mu],\\ (e^{-i\xi G})_{(1)}\mathbf{x}_\mu S\left((e^{-i\xi G})_{(2)}\right) &= e^{-i\xi G}\mathbf{x}_\mu S(e^{-i\xi G}) = e^{-i\xi G}\mathbf{x}_\mu e^{i\xi G},\end{aligned}$$

kde $G_{(1)} \otimes G_{(2)} = \Delta G$ a kde jsme užili toho, že

$$\begin{aligned}\Delta e^{-i\xi G} &= \Delta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}G^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}(\Delta G)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}(G\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes G)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(G\otimes\mathbf{1})^k(\mathbf{1}\otimes G)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}(G^k\otimes G^{n-k})\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^{k+l}}{k!l!}G^k\otimes G^l = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^k}{k!}G^k\right)\otimes\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^l}{l!}G^l\right) = e^{-i\xi G}\otimes e^{-i\xi G},\end{aligned}$$

přičemž jsme užili toho, že výrazy $(G\otimes\mathbf{1})$ a $(\mathbf{1}\otimes G)$ spolu komutují a v páté rovnosti jsme zaměnili index n za $k+l$, a dále jsme užili toho, že

$$S(e^{-i\xi G}) = S\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}G^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}S(G)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}(-G)^n = e^{i\xi G}.$$

Vztahy (II.82) tedy můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned}G_{(1)}\mathbf{x}_\mu S(G_{(2)}) &= G \triangleright \mathbf{x}_\mu,\\ (e^{-i\xi G})_{(1)}\mathbf{x}_\mu S\left((e^{-i\xi G})_{(2)}\right) &= e^{-i\xi G} \triangleright \mathbf{x}_\mu.\end{aligned}$$

Tento vztah koresponduje se vztahem (I.59), platným v bicrossproduct algebře s kterou jsme se setkali v odstavci I.10. Bicrossproduct algebra $Pol(\mathbb{R}^2) \rtimes U(p(1,1))$ je tudíž hledanou algebrou operátorů.

Bicrossproduct algebra přiřazená k $*$-Hopfově algebře $U(p(1,1))$ a $U(p(1,1))$-modul algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$ je $*$-algebrou, kterou budeme značit symbolem B, zavedenou na tenzorovém součinu $Pol(\mathbb{R}^2) \otimes U(p(1,1))$ tak, že pro prvky tvaru $v \otimes h$, kde $v \in Pol(\mathbb{R}^2)$ a $h \in U(p(1,1))$, je násobení určeno vztahem (I.54), to jest

$$(v \otimes h)(u \otimes g) = v(h_{(1)} \triangleright u) \otimes h_{(2)}g, \tag{II.83}$$

kde $h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \Delta h$. Pro $*$-algebry $U(so(2,1))$ a $Pol(\mathbb{R}^2)$ dále definujeme injektivní homomorfismy (I.55), (I.55) do $*$-algebry B

$$\begin{aligned} \widehat{v} &= v \otimes \mathbf{1}, \\ \widehat{h} &= \mathbf{1} \otimes h, \end{aligned}$$

kde $v \in Pol(\mathbb{R}^2)$ a $h \in U(p(1,1))$. Tyto homomorfismy identifikují $*$-algebry $U(p(1,1))$ a $Pol(\mathbb{R}^2)$ jako podalgebry algebry B.

Dosazením do definice (II.83) můžeme určit výrazy pro násobení mezi prvky $\widehat{P_0}$, $\widehat{P_1}$, $\widehat{N}$ a prvky $\widehat{\mathbf{x}_\mu}$, které jsou

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}_\mu}\widehat{P_\nu} &= (\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes P_\nu) = \mathbf{x}_\mu(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}P_\nu = \mathbf{x}_\mu \otimes P_\nu, \\ \widehat{P_\nu}\widehat{\mathbf{x}_\mu} &= (\mathbf{1} \otimes P_\nu)(\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}(P_{\nu(1)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes P_{\nu(2)}\mathbf{1} = (P_\nu \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes \mathbf{1} + (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes P_\nu \\ &= ig_{\nu\mu}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{x}_\mu \otimes P_\nu, \\ \widehat{\mathbf{x}_\mu}\widehat{N} &= (\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes N) = \mathbf{x}_\mu(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}N = \mathbf{x}_\mu \otimes N, \\ \widehat{N}\widehat{\mathbf{x}_\mu} &= (\mathbf{1} \otimes N)(\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}(N_{(1)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes N_{(2)}\mathbf{1} = (N \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes \mathbf{1} + (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes N \\ &= \mathbf{x}_\mu \otimes N + \begin{cases} i\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{1} & \text{pro } \mu = 0 \\ i\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{1} & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

kde jsme užili (II.74), a toho, že platí axiomy (I.49), (I.50). Tyto výrazy vedou ke komutátorům

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathbf{x}_\mu}, \widehat{P_\nu}] &= \widehat{\mathbf{x}_\mu}\widehat{P_\nu} - \widehat{P_\nu}\widehat{\mathbf{x}_\mu} = -ig_{\mu\nu}, \\ [\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_0}] &= \widehat{N}\widehat{\mathbf{x}_0} - \widehat{\mathbf{x}_0}\widehat{N} = i\widehat{\mathbf{x}_1}, \\ [\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_1}] &= \widehat{N}\widehat{\mathbf{x}_1} - \widehat{\mathbf{x}_1}\widehat{N} = i\widehat{\mathbf{x}_0}, \end{aligned}$$

které spolu s relacemi (II.71) z algebry $U(p(1,1))$ a relacemi (II.58) z algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$ určují strukturu algebry B.

Hledanou algebrou B, která je algebrou operátorů speciální teorie relativity, je tedy algebra generovaná prvky $\widehat{P_0}$, $\widehat{P_1}$, $\widehat{N}$, $\widehat{\mathbf{x}_0}$, $\widehat{\mathbf{x}_1}$ s relacemi

$$\begin{aligned} &[\widehat{N}, \widehat{P_0}] = i\widehat{P_1}, && [\widehat{N}, \widehat{P_1}] = i\widehat{P_0}, && [\widehat{P_0}, \widehat{P_1}] = 0, \\ &[\widehat{\mathbf{x}_0}, \widehat{\mathbf{x}_1}] = 0, \\ &[\widehat{\mathbf{x}_\mu}, \widehat{P_\nu}] = -ig_{\mu\nu}, && [\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_0}] = i\widehat{\mathbf{x}_1}, && [\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_1}] = i\widehat{\mathbf{x}_0}. \end{aligned} \tag{II.84}$$

Protože Hopfova algebra $U(p(1,1))$ je $*$-Hopfovou algebrou a algebra $Pol(\mathbb{R}^2)$ je $*$-algebrou, bude vzniklá algebra operátorů B $*$-algebrou. Operace $*$ bude v této algebře určena vztahy

(II.71) určujícími operaci $*$ v $*$-Hopfově algebře $U(p(1,1))$ a vztahy (II.73) určujícími operaci $*$ v algebře $Pol(\mathbb{R}^2)$, to jest vztahy

$$\begin{aligned} &\widehat{P_0}^* = \widehat{P_0}, && \widehat{P_1}^* = \widehat{P_1}, && \widehat{N}^* = \widehat{N}, \\ &\widehat{\mathbf{x}_\mu}^* = \widehat{\mathbf{x}_\mu}. \end{aligned} \tag{II.85}$$

Fyzikálně bychom mohli operaci $*$ interpretovat jako operaci, která přiřazuje operátoru $\hat{O} \in B$ adjungovaný operátor $\hat{O}^*$, operátory $\widehat{P_0}$, $\widehat{P_1}$, $\widehat{N}$, $\widehat{\mathbf{x}_0}$, $\widehat{\mathbf{x}_1}$, které reprezentují fyzikální veličiny jsou pak samoadjungované.

V odstavci I.10 jsme se zmínili o tom, že pro bicrossproduct algebru lze reprezentovat na modul algebře, kterou jsme užili při její definici. V našem případě tedy můžeme definovat reprezentaci algebry $B = Pol(\mathbb{R}^2) \rtimes U(p(1,1))$ na vektorovém prostoru $Pol(\mathbb{R}^2)$, to jest na prostoru všech polynomů na $\mathbb{R}^2$. Tato reprezentace je definována vztahem

$$(v \otimes h) \blacktriangleright u = v(h \triangleright u),$$

kde $(v \otimes h) \in B$ a $u \in Pol(\mathbb{R}^2)$. Dosadíme-li do tohoto vztahu prvky $\widehat{P_0}$, $\widehat{P_1}$, $\widehat{N}$, $\widehat{\mathbf{x}_0}$, $\widehat{\mathbf{x}_1}$ a polynomy f z $Pol(\mathbb{R}^2)$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}_\mu} \blacktriangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) &= (\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1}) \blacktriangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_\mu(\mathbf{1} \triangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)) = \mathbf{x}_\mu f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), \\ \widehat{P_\mu} \blacktriangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) &= (\mathbf{1} \otimes P_\mu) \blacktriangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \mathbf{1}(P_\mu \triangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)) = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\nu} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), \\ \widehat{N} \blacktriangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) &= (\mathbf{1} \otimes N) \blacktriangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \mathbf{1}(N \triangleright f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)) = \left(i\mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + i\mathbf{x}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), \end{aligned} \tag{II.86}$$

kde jsme užili vztahu (II.75). Tato reprezentace je známou souřadnicovou reprezentací.

III Užití Hopfovy algebry při konstrukci dvojité speciální teorie relativity

V této kapitole bude užito stejného postupu jako v kapitole II k tomu, aby bylo na jednom příkladě ukázáno, jak lze užít struktury Hopfovy algebry k doplnění algebry generátorů dvojité speciální teorie relativity s jednou časovou a jednou prostorovou dimenzí o operátory polohy a vytvoření algebry operátorů popisující dvojitou speciální teorii relativity.

V odstavci III.1 zavedeme Hopfovu algebru $U_q(so(2,1))$, která je q-deformovanou Hopfovou algebrou vytvořenou postupem, který zavedl Drinfeld a Jimbo. V odstavcích III.2 až III.5 zavedeme Hopfovu algebru $SO_q(2,1)$ duální k této algebře a pravou $SO_q(2,1)$-komodul algebru. V odstavci III.6 pak z těchto Hopfových algeber a komodul algebry vytvoříme Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$, $P_q(1,1)$ a pravou $P_q(1,1)$-komodul algebru. V odstavci III.7 doplníme tyto Hopfovy algebry a komodul algebru o $*$-strukturu a v odstavci III.8 užijeme duality Hopfových algeber $U_q(p(1,1))$ a $P_q(1,1)$ k tomu, abychom z pravé $P_q(1,1)$-komodul algebry vytvořili také levou $U_q(p(1,1))$-modul algebru. V odstavci III.9 vytvoříme z Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$ zavedené na algebře generátorů symetrie dvojité speciální teorie relativity a z levé $U_q(p(1,1))$-modul algebry, která bude představovat algebru operátorů poloh, algebru, která bude algebrou operátorů popisující dvojitou speciální teorii relativity.

III.1 Hopfova algebra $U_q(so(2,1))$

V odstavci II.1 jsme zavedli Lieovu algebru $so(2,1)$, která byla tvořena třídimenzionálním vektorovým prostorem s bázovými vektory P_0, P_1, N a Lieovou závorkou určenou vztahy

$$[N,P_0]=P_1, \qquad [N,P_1]=P_0, \qquad [P_0,P_1]=-N. \tag{III.1}$$

V této Lieově algebře provedeme změnu báze a místo vektorů P_0, P_1, N budeme uvažovat vektory H, X_+, X_- zavedené vztahy

$$H=2P_0, \qquad X_\pm = N\mp P_1, \tag{III.2}$$

S užitím matic můžeme tuto změnu báze spolu s inverzní změnou zapsat jako

$$\begin{pmatrix} H\\ X_+\\ X_-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & 2 & .\\ 1 & . & -1\\ 1 & . & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} N\\ P_0\\ P_1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} N\\ P_0\\ P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & \frac12 & \frac12\\ \frac12 & . & .\\ . & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H\\ X_+\\ X_-\end{pmatrix}. \tag{III.3}$$

Lieovy závorky pro nové bázové vektory H, X_+, X_- určíme pomocí Lieových závorek (III.1) pro původní bázové vektory

$$[H,X_\pm]=[2P_0,N\mp P_1]=2([P_0,N]\mp[P_0,P_1])=2(-P_1\pm N)=\pm 2(N\mp P_1)=\pm 2X_\pm,$$
$$[X_+,X_-]=[N-P_1,N+P_1]=[N,N]+[N,P_1]-[P_1,N]-[P_1,P_1]=P_0+P_0=2P_0=H.$$

Vytvořenou Lieovu algebru, která je totožná s původní Lieovou algebrou $so(2,1)$ budeme značit jako $sl(2)$, protože prvky H, X_+, X_- tvoří standardní volbu báze v Lieově algebře $sl(2)$ tvořené 2×2 maticemi s nulovou stopou [1].

[1] Prvkům H, X_+, X_- v Lieově algebře $sl(2)$ odpovídají matice

$$H=\begin{pmatrix} 1 & .\\ . & -1\end{pmatrix}, \qquad X_+=\begin{pmatrix} . & 1\\ . & .\end{pmatrix}, \qquad X_-=\begin{pmatrix} . & .\\ 1 & .\end{pmatrix},$$

Postupem popsaným v odstavci II.2 bychom mohli pro Lieovu algebru $sl(2)$ zavést Hopfovu algebru definovanou na univerzální obalující algebře $U(sl(2))$, která by byla Hopfovou algebrou generovanou prvky H, X_+, X_- s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem

$$\begin{aligned} &[H, X_\pm] = \pm 2X_\pm, && [X_+, X_-] = H, \\ &\Delta H = H \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H, && \Delta X_\pm = X_\pm \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X_\pm, \\ &\epsilon(H) = 0, && \epsilon(X_\pm) = 0, \\ &S(H) = -H, && S(X_\pm) = -X_\pm. \end{aligned} \tag{III.4}$$

Quasitriangulární strukturu pro tuto Hopfovu algebru bychom mohli definovat následovně

$$\mathcal{R} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \tag{III.5}$$

Jinou možností, jak přiřadit Lieově algebře s relacemi (III.1) Hopfovu algebru, je užití postupu, který zavedl Drinfeld a Jimbo. Tento postup, o kterém je pojednáno například v [10, Kap 3], přiřazuje každé polojednoduché Lieově algebře $\mathcal{L}$ a nenulovému komplexnímu parametru q Hopfovu algebru $U_q(\mathcal{L})$. V našem případě tedy přiřadíme k Lieově algebře $sl(2)$ Hopfovu algebru $U_q(sl(2))$, která je [10, Kap 3] Hopfovou algebrou generovanou prvky H, X_+, X_- s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem

$$\begin{aligned} &[H, X_\pm] = \pm 2X_\pm, && [X_+, X_-] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}, \\ &\Delta H = H \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H, && \Delta X_\pm = X_\pm \otimes q^{\frac{H}{2}} + q^{-\frac{H}{2}} \otimes X_\pm, \\ &\epsilon(H) = 0, && \epsilon(X_\pm) = 0, \\ &S(H) = -H, && S(X_\pm) = -q^{\pm 1} X_\pm, \end{aligned} \tag{III.6}$$

kde q je nějaký nenulový komplexní parametr. Aby měli výrazy $q^{\pm\frac{H}{2}}$, $q^{\pm H}$ nějaký smysl, budeme parametr q zapisovat jako $q = e^{\frac{\lambda}{2}}$ a výrazy obsahující q pak budeme interpretovat pomocí mocninného rozvoje. Například výraz $q^{\pm\frac{H}{2}}$ rozepíšeme jako

$$q^{\pm\frac{H}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \left(\pm\frac{H}{2}\right)^n.$$

Pro Hopfovu algebru $U_q(sl(2))$ existuje také quasitriangulární struktura [10, Kap 3]

$$\mathcal{R} = q^{\frac{1}{2}H\otimes H} e_{q^{-2}}^{(q-q^{-1})X_+ q^{\frac{H}{2}} \otimes q^{-\frac{H}{2}} X_-}, \tag{III.7}$$

kde q-exponenciála $e_{q^{-2}}$ je definována vztahy

$$e_{q^{-2}}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n; q^{-2}]!}, \qquad [n; q^{-2}]! = [n; q^{-2}][n-1; q^{-2}] \cdots [1; q^{-2}], \qquad [n; q^{-2}] = \frac{1 - q^{-2n}}{1 - q^{-2}}.$$

Prvními členy v rozvoji této q-exponenciály jsou

$$e_{q^{-2}}^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 + q^{-2}} + \frac{x^3}{(1 + q^{-2})(1 + q^{-2} + q^{-4})} + \mathcal{O}(x^4). \tag{III.8}$$

Provedeme-li záměnu prvků H, X_+, X_- za prvky P_0, P_1, N, to jest záměnu inverzní k záměně (III.2), kterou jsme provedli v případě přechodu od bázových prvků P_0, P_1, N k bázovým prvkům H, X_+, X_-, tak získáme vztahy

$$\begin{aligned}
&[N, P_0] = P_1, && [N, P_1] = \frac{1}{2}\frac{q^{2P_0} - q^{-2P_0}}{q - q^{-1}}, && [P_0, P_1] = -N,\\
&\Delta P_0 = P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0, && \Delta P_1 = P_1 \otimes q^{P_0} + q^{-P_0} \otimes P_1, && \Delta N = N \otimes q^{P_0} + q^{-P_0} \otimes N,\\
&\epsilon(P_0) = 0, && \epsilon(P_1) = 0, && \epsilon(N) = 0,\\
&S(P_0) = -P_0, && S(P_1) = -\tfrac{q+q^{-1}}{2}P_1 - \tfrac{q-q^{-1}}{2}N, && S(N) = -\tfrac{q-q^{-1}}{2}P_1 - \tfrac{q+q^{-1}}{2}N.
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Hopfovu algebru generovanou prvky P_0, P_1, N s uvedenými s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem budeme značit symbolem $U_q(so(2,1))$.

Lze ukázat, že provedeme-li ve vztazích (III.6), (III.7) limitu $q \to 1$ ($\lambda \to 0$) tak získáme vztahy (III.4), (III.5) a podobně, provedeme-li ve vztazích (III.9) limitu $q \to 1$ tak získáme vztahy (II.6), (II.10). Na Hopfovy algebry $U_q(sl(2))$, $U_q(so(2,1))$ tedy můžeme pohlížet jako na deformace Hopfových algeber $U(sl(2))$, $U(so(2,1))$, přičemž míra deformace je určena parametrem q (λ).

V dalších výpočtech budeme potřebovat výraz pro konásobení vyčíslené na prvcích $q^{\pm P_0}$, to jest

$$\begin{aligned}
\Delta q^{\pm P_0} &= \Delta\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^n P_0^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^n(\Delta P_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^n(P_0\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes P_0)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(P_0\otimes\mathbf{1})^k(\mathbf{1}\otimes P_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^n P_0^k\otimes P_0^{n-k}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!l!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^{k+l}P_0^k\otimes P_0^l = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^k P_0^k\otimes\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)^l P_0^l = q^{\pm P_0}\otimes q^{\pm P_0},
\end{aligned}$$

kde jsme užili toho, že prvky $(P_0 \otimes \mathbf{1})$ a $(\mathbf{1} \otimes P_0)$ spolu komutují.

III.2 Reprezentace algebry $U_q(so(2,1))$

V odstavci II.4 jsme vytvořili Hopfovu algebru duální k Hopfově algebře $U(so(2,1))$ jako maticovou bialgebru a při definici bilineární formy jsme užili reprezentace algebry $U(so(2,1))$ pomocí 3×3 matic. Abychom mohli postupovat stejným způsobem i v případě konstrukce Hopfovy algebry duální k Hopfově algebře $U_q(so(2,1))$, budeme potřebovat reprezentaci této algebry pomocí 3×3 matic.

Tuto reprezentaci zavedeme stejným způsobem jako v případě $U(so(2,1))$. Pro jednotkový prvek definujeme

$$\rho(\mathbf{1}) = \delta, \tag{III.10}$$

kde δ je jednotková matice, pro prvky z $U_q(so(2,1))$, které jsou lineárními kombinacemi prvků P_0, P_1, N určíme reprezentaci ρ tak, že zadáme matice

$$\rho(P_0), \qquad \rho(P_1), \qquad \rho(N), \tag{III.11}$$

a pro prvky z $U_q(so(2,1))$, které jsou tvaru $X_1X_2\cdots X_k$, kde $k = 2,3,\ldots$ a X_1, $X_2,\ldots,X_k$ jsou lineární kombinace prvků P_0, P_1, N vyčíslíme zobrazení ρ vztahem

$$\rho(X_1X_2\cdots X_k) = \rho(X_1)\rho(X_2)\cdots\rho(X_k), \tag{III.12}$$

kde násobení na pravé straně je násobením matic. V kapitole II.2 jsme ukázali, že takto zavedené zobrazení ρ je definováno pro celou algebru generovanou prvky P_0, P_1, N.

Při určování vztahů (III.11) zkusíme využít toho, že algebra $U_q(so(2,1))$ je podobná s algebrou $U(so(2,1))$, a budeme předpokládat, že také matice (III.11) budou podobné s maticemi (II.9). Budeme předpokládat, že

$$\rho(P_0) = \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \qquad \rho(P_1) = \begin{pmatrix} . & . & -A \\ . & . & . \\ B & . & . \end{pmatrix}, \qquad \rho(N) = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & C \\ . & D & . \end{pmatrix}, \tag{III.13}$$

kde A, B, C, D jsou nějaká, zatím neurčená čísla. Reprezentací první a třetí relace z (III.9) získáme rovnice

$$[\rho(N), \rho(P_0)] = \left[\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & C \\ . & D & . \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} . & . & -C \\ . & . & . \\ D & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & -A \\ . & . & . \\ B & . & . \end{pmatrix} = \rho(P_1),$$

$$[\rho(P_0), \rho(P_1)] = \left[\begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} . & . & -A \\ . & . & . \\ B & . & . \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & -A \\ . & -B & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & -C \\ . & -D & . \end{pmatrix} = \rho(-N).$$

Aby bylo zobrazení ρ dobře definováno i poté co zavedeme tyto relace, musí být tyto rovnice splněny, musí tedy platit $C = A$, $D = B$. Reprezentací zbývající relace z (III.9) získáme rovnici

$$\begin{aligned}
[\rho(N), \rho(P_1)] &= \left[\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & A \\ . & B & . \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} . & . & -A \\ . & . & . \\ B & . & . \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} . & AB & . \\ AB & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \\
&= \rho\left(\frac{1}{2}\frac{q^{2P_0} - q^{-2P_0}}{q - q^{-1}}\right) = \frac{1}{2(q - q^{-1})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n 2^n (1 - (-1)^n) \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}^n \\
&= \frac{\sinh\left(2\frac{\lambda}{2}\right)}{q - q^{-1}} \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} = \frac{q + q^{-1}}{2} \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aby byla splněna i tato rovnice tak musí platit $AB = \frac{q+q^{-1}}{2}$. Zvolíme $A = B = \sqrt{\frac{q+q^{-1}}{2}}$. Prvky P_0, P_1, N pak budou reprezentovány maticemi

$$\rho(P_0) = \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \quad \rho(P_1) = \sqrt{\tfrac{q+q^{-1}}{2}} \begin{pmatrix} . & . & -1 \\ . & . & . \\ 1 & . & . \end{pmatrix}, \quad \rho(N) = \sqrt{\tfrac{q+q^{-1}}{2}} \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & 1 \\ . & 1 & . \end{pmatrix}. \tag{III.14}$$

Tyto matice spolu se vztahy (III.10), (III.12) definují reprezentaci algebry $U_q(so(2,1))$. Je vidět, že limitou $q \to 1$ bychom z těchto matic získali matice (II.9), které jsme v odstavci II.2 užili k definici reprezentace algebry $U(so(2,1))$.

Protože quasitriangulární strukturu $\mathcal{R}$ máme vyjádřenu pomocí prvků H, X_+, X_-, budeme potřebovat také reprezentaci těchto prvků. Prvky H, X_+, X_- zavedené vztahy (III.2) jsou reprezentovány maticemi

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} . & 2 & . \\ 2 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \quad \rho(X_+) = \sqrt{\tfrac{q+q^{-1}}{2}} \begin{pmatrix} . & . & 1 \\ . & . & 1 \\ -1 & 1 & . \end{pmatrix}, \quad \rho(X_-) = \sqrt{\tfrac{q+q^{-1}}{2}} \begin{pmatrix} . & . & -1 \\ . & . & 1 \\ 1 & 1 & . \end{pmatrix}. \tag{III.15}$$

III.3 R-matice

Při konstrukci Hopfovy algebry duální k Hopfově algebře $U(so(2,1))$ jsme užili R-matice, která je reprezentací quasitriangulární struktury $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}$, definované vztahem

$$R^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = \langle \mathcal{R}, \mathbf{t}^{i_1}{}_{j_1} \otimes \mathbf{t}^{i_2}{}_{j_2} \rangle = \rho(\mathcal{R}^{(1)})^{i_1}{}_{j_1} \rho(\mathcal{R}^{(2)})^{i_2}{}_{j_2}. \tag{III.16}$$

V případě konstrukce Hopfovy algebry duální k Hopfově algebře $U_q(so(2,1))$ budeme tuto matici také potřebovat, a protože narozdíl od jednoduché quasitriangulární struktury (II.12) v případě Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ máme poněkud složitější quasitriangulární strukturu (III.7), věnujeme výpočtu R-matice zvláštní kapitolu.

Při výpočtu R-matice budeme postupovat tak, že odděleně vypočteme reprezentaci první části quasitriangulární struktury $q^{\frac{1}{2}H\otimes H}$ a druhé části quasitriangulární struktury $e_{q^{-2}}^{(q-q^{-1})X_+ q^{\frac{H}{2}} \otimes q^{-\frac{H}{2}} X_-}$ a R-matici pak získáme vynásobením matic vzniklých reprezentací těchto výrazů.

Pro první část quasitriangulární struktury dostáváme

$$\begin{aligned}
\rho\left(q^{\frac{1}{2}H\otimes H}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} . & 2 & . \\ 2 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}^n \otimes \begin{pmatrix} . & 2 & . \\ 2 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n 2^n \begin{pmatrix}
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{q^2+q^{-2}}{2} & . & . & . & \frac{q^2-q^{-2}}{2} & . & . & . & . \\
. & \frac{q^2+q^{-2}}{2} & . & \frac{q^2-q^{-2}}{2} & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & \frac{q^2-q^{-2}}{2} & . & \frac{q^2+q^{-2}}{2} & . & . & . & . & . \\
\frac{q^2-q^{-2}}{2} & . & . & . & \frac{q^2+q^{-2}}{2} & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{III.17}$$

přičemž jsme užili zápisu R-matice pomocí 9×9 matice, stejného jako v případě R-matice (II.27).

Při výpočtu druhé části quasitriangulární struktury budeme potřebovat znát reprezentaci prvků $q^{\pm\frac{H}{2}}$, to jest

$$\begin{aligned}
\rho\left(q^{\pm\frac{H}{2}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n (\pm 1)^n \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\frac{\lambda}{2} & \pm\sinh\frac{\lambda}{2} & . \\ \pm\sinh\frac{\lambda}{2} & \cosh\frac{\lambda}{2} & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q+q^{-1}}{2} & \pm\frac{q-q^{-1}}{2} & . \\ \pm\frac{q-q^{-1}}{2} & \frac{q+q^{-1}}{2} & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

S užitím tohoto výrazu můžeme určit reprezentace mocnin prvků $X_+q^{\frac{H}{2}}$, $q^{-\frac{H}{2}}X_-$ vystupujících v q-exponenciále. S užitím tohoto vztahu a (III.15) dostáváme

$$\rho\left(X_+q^{\frac{H}{2}}\right) = \sqrt{\tfrac{q+q^{-1}}{2}}\begin{pmatrix} . & . & 1 \\ . & . & 1 \\ -q^{-1} & q^{-1} & . \end{pmatrix}, \qquad \rho\left(q^{-\frac{H}{2}}X_-\right) = \sqrt{\tfrac{q+q^{-1}}{2}}\begin{pmatrix} . & . & -q \\ . & . & q \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho\left(X_+q^{\frac{H}{2}}\right)^2 = \tfrac{(q+q^{-1})}{2q}\begin{pmatrix} -1 & 1 & . \\ -1 & 1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \qquad \rho\left(q^{-\frac{H}{2}}X_-\right)^2 = \tfrac{q(q+q^{-1})}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix},$$

$$\rho\left(X_+q^{\frac{H}{2}}\right)^3 = 0, \qquad \rho\left(q^{-\frac{H}{2}}X_-\right)^3 = 0.$$

Reprezentace třetích a tedy i vyšších mocnin prvků $X_+q^{\frac{H}{2}}$, $q^{-\frac{H}{2}}X_-$ jsou rovny nule, při výpočtu reprezentace druhé části quasitriangulární struktury tedy bude stačit, když budeme uvažovat rozvoj (III.8) q-exponenciály pouze do členu obsahujícího x^2.

$$\begin{aligned}
&\rho\left(e_{q^{-2}}^{(q-q^{-1})X_+q^{\frac{H}{2}}\otimes q^{-\frac{H}{2}}X_-}\right) = \\
&= \rho\left(\mathbf{1} + (q-q^{-1})X_+q^{\frac{H}{2}}\otimes q^{-\frac{H}{2}}X_- + \frac{(q-q^{-1})^2}{1+q^{-2}}(X_+q^{\frac{H}{2}}\otimes q^{-\frac{H}{2}}X_-)^2\right) \\
&= \rho(\mathbf{1})\otimes\rho(\mathbf{1}) + (q-q^{-1})\rho(X_+q^{\frac{H}{2}})\otimes\rho(q^{-\frac{H}{2}}X_-) + \frac{(q-q^{-1})^2}{1+q^{-2}}\rho(X_+q^{\frac{H}{2}})^2\otimes\rho(q^{-\frac{H}{2}}X_-)^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} + (q-q^{-1})\frac{q+q^{-1}}{2}\begin{pmatrix} . & . & 1 \\ . & . & 1 \\ -q^{-1} & q^{-1} & . \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} . & . & -q \\ . & . & q \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{(q-q^{-1})^2}{1+q^{-2}}\frac{(q+q^{-1})^2}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & . \\ -1 & 1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} -1 & -1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix}
\frac{q^6-q^4+3q^2+1}{4q^2} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q} \\
-\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & -\frac{q^6-q^4-5q^2+1}{4q^2} & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q} \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot \\
\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \cdot & -\frac{q^6-q^4-5q^2+1}{4q^2} & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q} \\
-\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^2} & \frac{q^6-q^4+3q^2+1}{4q^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot & 1 & \cdot \\
-\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
$$

Vynásobením matice (III.17) touto maticí získáme R-matici

$$
R = \begin{pmatrix}
\frac{3q^6-q^4+q^2+1}{4q^4} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \frac{(q^2+1)^2(q^2-1)}{4q^4} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} \\
-\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \frac{q^6+q^4+3q^2-1}{4q^4} & \cdot & \frac{3q^6-q^4-3q^2+1}{4q^4} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot \\
\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \frac{3q^6-q^4-3q^2+1}{4q^4} & \cdot & \frac{q^6+q^4+3q^2-1}{4q^4} & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} \\
\frac{(q^2+1)^2(q^2-1)}{4q^4} & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)^2}{4q^4} & \frac{3q^6-q^4+q^2+1}{4q^4} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^2} & \cdot & 1 & \cdot \\
-\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & -\frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & \cdot & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{2q^3} & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
\qquad \text{(III.18)}
$$

III.4 Bialgebra $SO_q(2,1)$

Při konstrukci Hopfovy algebry duální k Hopfově algebře $U_q(so(2,1))$ budeme postupovat stejně, jako jsme postupovali v případě konstrukce duální Hopfovy algebry k Hopfově algebře $U(so(2,1))$. Zavedeme maticovou bialgebru M, generovanou prvky $\mathbf{t}^i{}_j$, $i,j=1,2,3$ s konásobením a kojednotkou

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{t} &= \mathbf{t}\otimes\mathbf{t},\\ \epsilon(\mathbf{t}) &= \delta,\end{aligned} \tag{III.19}$$

to jest stejným způsobem, jako v případě maticové bialgebry zavedené v odstavci II.3. Dále definujeme bilineární formu

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : U_q(so(2,1))\otimes M \to \mathbb{C}, \tag{III.20}$$

kterou určíme vztahy

$$\begin{aligned}\langle X,\mathbf{1}\rangle &= \epsilon(X),\\ \langle X,\mathbf{t}^i{}_j\rangle &= \rho(X)^i{}_j,\\ \langle X,\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\ldots\mathbf{t}_k\rangle &= \rho_1(X_{(1)})\rho_2(X_{(2)})\ldots\rho_k(X_{(k)}),\end{aligned} \tag{III.21}$$

kde ρ je reprezentace algebry $U_q(so(2,1))$ zavedená v odstavci III.2. Tato bilineární forma je zavedena stejným způsobem, jako bilineární forma (II.21) definovaná v odstavci II.4 pomocí vztahů (II.22), (II.24).

Abychom postupovali v souladu s postupem užitým ke konstrukci duální Hopfovy algebry k Hopfově algebře $U(so(2,1))$, měli bychom nyní najít relace v maticové bialgebře M, které snižují degeneraci bilineární formy (III.20), to jest relace splňující podmínku (I.40).

Protože je Hopfova algebra $U_q(so(2,1))$, stejně jako Hopfova algebra $U(so(2,1))$, quasitriangulární, můžeme v bialgebře M zavést relace

$$\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} = R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2, \tag{III.22}$$

kde R-matice

$$R_{12} = \langle\mathcal{R},\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2\rangle = \rho_1(\mathcal{R}^{(1)})\rho_2(\mathcal{R}^{(2)}), \tag{III.23}$$

je R-maticí spočtenou v odstavci III.3. To, že po zavedení této relace zůstane konásobení a kojednotka dobře definována bylo ukázáno v odstavci II.3, a to, že tato relace sníží degeneraci bilineární formy, to jest, že splňuje podmínku (I.40) bylo ukázáno v odstavci II.4.

Nalezení dalších relací, které by snížili degeneraci bilineární formy není vzhledem k složitější struktuře Hopfovy algebry $U_q(so(2,1))$ tak snadným úkolem, jako v případě Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, a z tohoto důvodu identifikujeme naší bialgebru s Hopfovou algebrou $SO_Q(2,1)$, pro kterou jsou tyto relace známy.

III.5 Hopfova algebra $SO_Q(N)$

Standardní kvantová grupa $SO_Q(N)$ [10, Kap 4], [11] je definována následujícím způsobem.

Označme celočíselnou část výrazu $\frac{N}{2}$ jako M, čárkované indexy zaveďme jako $i' = N+1-i$, a pro $1\le i\le M$ definujme čísla ρ

$$\rho_i = \frac{N}{2} - i, \qquad \rho_{i'} = -\rho_i, \qquad \rho_{M+1} = 0 \text{ (pro lichá } N).$$

Dále označme $\mathbf{e}_{ij}$ matici s 1 v i-tém řádku a j-tém sloupci a s nulami na ostatních pozicích. Pro nenulový komplexní parametr Q definujme R-matici $\hat{R}$

$$\begin{aligned}\hat{R} =& Q\sum_{i\neq i'}^{N}\mathbf{e}_{ii}\otimes\mathbf{e}_{ii} + \sum_{i,j;i\neq j,j'}^{N}\mathbf{e}_{ii}\otimes\mathbf{e}_{jj} + Q^{-1}\sum_{i\neq i'}^{N}\mathbf{e}_{i'i'}\otimes\mathbf{e}_{ii}\\ &+(Q-Q^{-1})\sum_{i>j}^{N}\mathbf{e}_{ij}\otimes\mathbf{e}_{ji} - (Q-Q^{-1})\sum_{i>j}^{N}Q^{\rho_i-\rho_j}\mathbf{e}_{ij}\otimes\mathbf{e}_{i'j'}\\ &+^{odd}\mathbf{e}_{M+1,M+1}\otimes\mathbf{e}_{M+1,M+1},\end{aligned} \tag{III.24}$$

kde $+^{odd}$ znamená, že tento člen je přítomen pouze pro lichá N. Dále definujme $N\times N$ matici

$$\hat{\eta} = \sum_{i=1}^{N}Q^{\rho_i}\mathbf{e}_{ii'}.$$

Standardní kvantovou grupou $SO_Q(N)$ je Hopfova algebra generovaná N^2 prvky $\hat{\mathbf{t}}^i{}_j$, $i,j = 1,2,\ldots,N$ s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}}_2\hat{\mathbf{t}}_1\hat{R}_{12} &= \hat{R}_{12}\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2,\\ \hat{\mathbf{t}}\hat{\eta}\hat{\mathbf{t}}^T &= \hat{\eta}, \qquad\qquad \hat{\mathbf{t}}^T\hat{\eta}^{-1}\hat{\mathbf{t}} = \hat{\eta}^{-1},\\ \Delta\hat{\mathbf{t}} &= \hat{\mathbf{t}}\otimes\hat{\mathbf{t}},\\ \epsilon(\hat{\mathbf{t}}) &= \delta,\\ S(\hat{\mathbf{t}}) &= \hat{\eta}\hat{\mathbf{t}}^T\hat{\eta}^{-1},\end{aligned} \tag{III.25}$$

kde $\hat{\eta}^{-1}$ je matice inverzní k matici $\hat{\eta}$. Konkrétní vyjádření R-matice $\hat{R}$ a matic $\hat{\eta}$, $\hat{\eta}^{-1}$ pro $N=3$ je

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \begin{pmatrix} Q & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & Q^{-1} & . & . & . & . & . & . \\ . & Q-Q^{-1} & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & -Q^{-\frac{1}{2}}(Q-Q^{-1}) & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & (1-Q^{-1})(Q-Q^{-1}) & . & -Q^{-\frac{1}{2}}(Q-Q^{-1}) & . & Q^{-1} & . & . \\ . & . & . & . & . & Q-Q^{-1} & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & Q \end{pmatrix},\\ \hat{\eta} = \hat{\eta}^{-1} &= \begin{pmatrix} . & . & Q^{-\frac{1}{2}} \\ . & 1 & . \\ Q^{\frac{1}{2}} & . & . \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{III.26}$$

Je vidět, že Hopfova algebra $SO_Q(3)$ je zavedena stejnými vztahy, jako Hopfova algebra $Pol(SO(2,1))$ zavedená vztahy (II.18), (II.20), (II.29) a (II.31), pouze s jinou R-maticí a jinými maticemi η, η^{-1}.

Dále můžeme zavést pravou $SO_Q(N)$-komodul algebru generovanou N prvky $\hat{\mathbf{x}}_i$, $i=1,\ldots,N$ s relacemi a zobrazením β

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{1}}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{2}}(P\hat{R}_{12}-Q)(P\hat{R}_{12}-Q^{-2}) &= 0,\\ \hat{\beta}(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{t}},\end{aligned} \tag{III.27}$$

kde $P = P_{12} = P_{21}$ je permutační matice definovaná vztahem $P^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}$. Také tato komodul algebra je zavedena podobným způsobem, jako pravá $Pol(SO(2,1))$-komodul algebra $Pol(\mathbb{R}^3)$, zavedená vztahy (II.34), (II.37), což je vidět zvláště tehdy, když přepíšeme vztah (II.37) do tvaru $\hat{\mathbf{x}}_{\bar{1}}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{2}}(PR_{12} - \lambda) = 0$. Podobně, jako jsme ověřili podmínku (I.47) pro relaci (II.37), můžeme tuto podmínku ověřit také pro relaci (III.27), to jest nulovost výrazu

$$\begin{aligned}\hat{\beta}\left(\hat{\mathbf{x}}_{\bar{1}}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{2}}(P\hat{R} - Q)(P\hat{R} - Q^{-2})\right) &= \hat{\mathbf{x}}_{\bar{1}}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{2}} \otimes \hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2(P\hat{R}_{12} - Q)(P\hat{R}_{12} - Q^{-2}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{\bar{1}}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{2}} \otimes (P\hat{R}_{12} - Q)\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2(P\hat{R}_{12} - Q^{-2}) = \hat{\mathbf{x}}_{\bar{1}}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{2}} \otimes (P\hat{R}_{12} - Q)(P\hat{R}_{12} - Q^{-2})\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2 \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{\bar{1}}\hat{\mathbf{x}}_{\bar{2}}(P\hat{R}_{12} - Q)(P\hat{R}_{12} - Q^{-2}) \otimes \hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2 = 0,\end{aligned}$$

kde jsme užili toho, že

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2(P\hat{R}_{12} - k) &= (P\hat{\mathbf{t}}_2\hat{\mathbf{t}}_1P)P\hat{R}_{12} - k\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2 = P(\hat{\mathbf{t}}_2\hat{\mathbf{t}}_1\hat{R}_{12}) - k\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2 = P(\hat{R}_{12}\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2) - k\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2 \\ &= (P\hat{R}_{12} - k)\hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2,\end{aligned}$$

kde jsme užili identit $P^2 = id$ a $P\hat{\mathbf{t}}_2\hat{\mathbf{t}}_1P = \hat{\mathbf{t}}_1\hat{\mathbf{t}}_2$. Podmínka (I.47) je splněna a zobrazení β je tedy definováno i poté, co v algebře generované prvky $\mathbf{x}_i$ zavedeme tuto relaci, vztahy (III.27) tudíž definují pravou $SO_Q(N)$-komodul algebru.

Nyní uvažujme záměnu generujících prvků $\hat{\mathbf{t}}^i{}_j$, $\hat{\mathbf{x}}_i$ za prvky $\mathbf{t}^i{}_j$, $\mathbf{x}_i$, definované pomocí regulární 3×3 matice M jako

$$\mathbf{t}^i{}_j = M^i{}_k\hat{\mathbf{t}}^k{}_l(M^{-1})^l{}_j, \qquad\qquad \mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}_jM^j{}_i,$$

což s užitím maticového značení zapíšeme pomocí vztahů

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= M\hat{\mathbf{t}}M^{-1}, & \hat{\mathbf{t}} &= M^{-1}\mathbf{t}M, \\ \mathbf{x} &= \hat{\mathbf{x}}M^{-1}, & \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}M.\end{aligned} \tag{III.28}$$

Tyto vztahy dosadíme do vztahů (III.25) určujících relace, konásobení, kojednotku a antipode, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}&M_1^{-1}M_2^{-1}\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1M_1M_2\hat{R}_{12} = \hat{R}_{12}M_1^{-1}M_2^{-1}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2M_1M_2 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1(M_1M_2\hat{R}_{12}M_1^{-1}M_2^{-1}) = (M_1M_2\hat{R}_{12}M_1^{-1}M_2^{-1})\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2, \\ &M^{-1}\mathbf{t}M\hat{\eta}M^T\mathbf{t}^TM^{-1T} = \hat{\eta} && \Rightarrow \quad \mathbf{t}(M\hat{\eta}M^T)\mathbf{t}^T = M\hat{\eta}M^T, \\ &M^T\mathbf{t}^TM^{-1T}\hat{\eta}^{-1}M^{-1}\mathbf{t}M = \hat{\eta}^{-1} && \Rightarrow \quad \mathbf{t}^T(M^{-1T}\hat{\eta}^{-1}M^{-1})\mathbf{t} = M^{-1T}\hat{\eta}^{-1}M^{-1}, \\ &\Delta(M^{-1}\mathbf{t}M) = M^{-1}\mathbf{t}M \otimes M^{-1}\mathbf{t}M && \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{t} = \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, \\ &\epsilon(M^{-1}\mathbf{t}M) = M^{-1}\delta M = \delta && \Rightarrow \quad \epsilon(\mathbf{t}) = \delta, \\ &S(M^{-1}\mathbf{t}M) = \hat{\eta}M^T\mathbf{t}^TM^{-1T}\hat{\eta}^{-1} && \Rightarrow \quad S(\mathbf{t}) = (M\hat{\eta}M^T)\mathbf{t}^T(M^{-1T}\hat{\eta}^{-1}M^{-1}).\end{aligned}$$

Označíme-li v těchto vztazích

$$\begin{aligned}R_{12} &= M_1M_2\hat{R}_{12}M_1^{-1}M_2^{-1}, \\ \eta &= M\hat{\eta}M^T, & \eta^{-1} &= M^{-1T}\hat{\eta}^{-1}M^{-1},\end{aligned} \tag{III.29}$$

tak je budeme moci zapsat jako

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} &= R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2,\\
\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T &= \eta, \qquad\qquad \mathbf{t}^T\eta^{-1}\mathbf{t} = \eta^{-1},\\
\Delta\mathbf{t} &= \mathbf{t}\otimes\mathbf{t},\\
\epsilon(\mathbf{t}) &= \delta,\\
S(\mathbf{t}) &= \eta\mathbf{t}^T\eta^{-1}.
\end{aligned} \tag{III.30}$$

Je vidět, že tyto definiční vztahy pro prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ jsou totožné se definičními vztahy pro prvky $\hat{\mathbf{t}}^i{}_j$ (III.25), přičemž matice R, η a η^{-1} je třeba transformovat pomocí vztahů (III.29).

Transformace (III.28) dosadíme také do vztahů (III.27) definujících pravou komodul algebru, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{\bar{1}}M_1\mathbf{x}_{\bar{2}}M_2(P\hat{R}_{12}-Q)(P\hat{R}_{12}-Q^{-2})\\
&\quad= \mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}M_1M_2(P\hat{R}_{12}-Q)M_1^{-1}M_2^{-1}M_1M_2(P\hat{R}_{12}-Q^{-2})M_1^{-1}M_2^{-1}M_1M_2\\
&\quad= \mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}[(M_1M_2P)\hat{R}_{12}-M_1M_2Q]M_1^{-1}M_2^{-1}[(M_1M_2P)\hat{R}_{12}-M_1M_2Q^{-2}]M_1^{-1}M_2^{-1}M_1M_2\\
&\quad= \mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}[P(M_1M_2\hat{R}_{12}M_1^{-1}M_2^{-1})-Q][P(M_1M_2\hat{R}_{12}M_1^{-1}M_2^{-1})-Q^{-2}]M_1M_2 = 0,\\
&\beta(\mathbf{x}M) = \mathbf{x}M\otimes M^{-1}\mathbf{t}M,
\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že

$$\begin{aligned}
(PM_1M_2)^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} &= \delta^{i_1}_{k_2}\delta^{i_2}_{k_1}M^{k_1}{}_{j_1}M^{k_2}{}_{j_2} = M^{i_2}{}_{j_1}M^{i_1}{}_{j_2} = M^{i_2}{}_{k_2}M^{i_1}{}_{k_1}\delta^{k_1}_{j_2}\delta^{k_2}_{j_1} = (M_2M_1P)^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2}\\
&= (M_1M_2P)^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2},
\end{aligned}$$

to jest toho, že M_1M_2 komutuje s permutační maticí P. S užitím označení (III.29) tyto vztahy zapíšeme jako

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\bar{1}}\mathbf{x}_{\bar{2}}(PR_{12}-Q)(PR_{12}-Q^{-2}) &= 0,\\
\beta(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}\otimes\mathbf{t}.
\end{aligned} \tag{III.31}$$

Dosadíme-li za parametr Q ve výrazech (III.26) pro R-matici $\hat{R}$ a matice $\hat{\eta}$, $\hat{\eta}^{-1}$ hodnotu $Q=q^2$, a provedeme transformaci (III.29) definovanou maticemi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & -i\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{III.32}$$

tak získáme R-matici (III.18) a matice

$$\eta = \begin{pmatrix} -\frac{q+q^{-1}}{2} & \frac{q-q^{-1}}{2} & 0\\ -\frac{q-q^{-1}}{2} & \frac{q+q^{-1}}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{q+q^{-1}}{2} & \frac{q-q^{-1}}{2} & 0\\ -\frac{q-q^{-1}}{2} & \frac{q+q^{-1}}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{III.33}$$

Protože jsme dostali R-matici totožnou s R-maticí užitou v definici bialgebry zavedené v odstavci III.4, dosazení $Q=q^2$ a provedení transformace (III.28) definované maticemi (III.32) identifikuje standardní kvantovou grupu $SO_Q(3)$ s touto bialgebrou. Hopfovu algebru generovanou prvky $\mathbf{t}^i{}_j$

s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem (III.30), kde R-matice je (III.18) a matice η, η^{-1} jsou (III.33), budeme značit symbolem $SO_q(2,1)$.

Abychom určili relace v pravé komodul algebře, tak spočteme matici $(PR_{12}-q^2)(PR_{12}-q^{-4})$, kterou je

$$\frac{q^6}{q^2+1}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^2 & \cdot & -q^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q(q^2-1) \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(q^4+1) & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(q^4-1) & -q^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -q^2 & \cdot & q^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -q(q^2-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(q^4-1) & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(q^4+1) & \cdot & -q^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -q^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(q^4+1) & -\frac{1}{2}(q^4-1) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -q^2 & -\frac{1}{2}(q^4-1) & \frac{1}{2}(q^4+1) & \cdot \\ \cdot & q(q^2-1) & \cdot & -q(q^2-1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (q^2-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Vyčíslením relací (III.31) pak získáme 9 lineárních rovnic v proměnných $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3$, přičemž každému sloupci odpovídá jedna lineární rovnice a prvky v těchto sloupcích tvoří koeficienty u těchto proměnných. Tyto rovnice nejsou lineárně nezávislé a lze je upravit na systém tří lineárně nezávislých rovnic

$$\begin{aligned} q\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 - q\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1 + (q^2-1)\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3 &= 0, \\ q^2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 + q^2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 &= 0, \\ \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 - q^2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 + q^2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{III.34}$$

Algebru generovanou prvky $\mathbf{x}_i$ s těmito relacemi budeme značit symbolem V. Tato algebra je pravou $SO_q(2,1)$-komodul algebrou se zobrazením β definovaným vztahem (III.31). Tato komodul algebra se od komodul algebry zavedené v odstavci II.5 liší pouze R-maticí. Taktéž působení zobrazení β na prvek $\mathbf{x}\eta^{-1}\mathbf{x}^T$, to jest (II.38), je stejné, jako v případě komodul algebry zavedené v odstavci II.5.

III.6 Kontrakce

V tomto odstavci provedeme kontrakci Hopfových algeber $SO_q(2,1)$ a $U_q(so(2,1))$ na Hopfovy algebry $P_q(1,1)$ a $U_q(p(1,1))$. Užitý postup bude téměř stejný jako postup užitý při kontrakci Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$ a $U(so(2,1))$, popsané v odstavci II.7. Aby proběhla kontrakce požadovaným způsobem, budeme při provádění limity společně se zvětšováním parametru r zmenšovat hodnotu parametru λ. To znamená, že za parametr λ dosadíme

$$\lambda = \frac{\lambda'}{r}, \tag{III.35}$$

kde λ' je nějaká konstanta. Výraz q tedy nebudeme rozepisovat jako $q = e^{\frac{\lambda}{2}}$ ale jako $q = e^{\frac{\lambda'}{2r}}$. Důsledkem této záměny bude to, že R-matice a matice η, η^{-1} budou závislé na parametru r, což se projeví tím, že výpočty budou o něco složitější než v případě kontrakce Hopfových algeber $Pol(SO(2,1))$, $U(so(2,1))$.

Pro další výpočty budeme potřebovat rozvoj R-matice a matic η, η^{-1}. Budeme psát

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_{(n)}}{r^n}, \qquad \eta^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^{-1}_{(n)}}{r^n}, \qquad R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{(n)}}{r^n}. \tag{III.36}$$

Při konkrétních výpočtech budeme potřebovat rozvoje až do druhého řádu v $\frac{1}{r}$, kterými v jsou případě (III.18) a (III.33) rozvoje

$$\eta = \eta^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\frac{\lambda'}{2}\begin{pmatrix} . & 1 & . \\ -1 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2}\frac{\lambda'^2}{8}\begin{pmatrix} -1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix} + \mathcal{O}(r^{-3}),$$

$$\begin{aligned} R = &\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\lambda' \begin{pmatrix} . & . & . & . & 1 & . & . & . & -1 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & -1 \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & -1 & . & . & . \\ . & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . \\ -1 & -1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{r^2}\frac{\lambda'^2}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & . & -1 & -1 & . & . & . & 1 \\ -1 & . & . & 1 & 1 & . & . & . & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & -1 & . & . & . & 1 \\ -1 & -1 & . & 1 & 2 & . & . & . & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & -1 & -1 & . & . & . & . \end{pmatrix} + \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned} \tag{III.37}$$

Pro kladný reálný parametr r budeme v pravé $SO_q(2,1)$-komodul algebře V uvažovat relaci

$$\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T = -r^2\frac{q+q^{-1}}{2}. \tag{III.38}$$

Stejným způsobem, jako v případě podmínky (II.46) zavedené v odstavci II.7 můžeme ukázat, že tato relace splňuje podmínku (I.47), což znamená, že algebra vzniklá z algebry V zavedením této relace je rovněž pravou $SO_q(2,1)$-komodul algebrou. Tuto algebru budeme značit symbolem V'. Tato podmínka se od podmínky $\mathbf{x}\eta\mathbf{x}^T = -r^2$ zavedené v odstavci II.7 liší pouze faktorem $\frac{q+q^{-1}}{2}$, který je v limitě $r \to \infty$ roven jedné.

Prvek $\mathbf{x}_1$ z této algebry můžeme vyjádřit pomocí vztahu (III.38) jako funkci prvků $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$. Pro tento účel budeme předpokládat, že $\mathbf{x}_1 = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\mathbf{x}_{(n)1}}{r^n}$ a dosadíme tento rozvoj do (III.38), čímž dostaneme

$$\begin{aligned} -r^2 - \tfrac{\lambda'^2}{8} = &-r^2\mathbf{x}_{(-1)1}^2 - r(\mathbf{x}_{(-1)1}\mathbf{x}_{(0)1} + \mathbf{x}_{(0)1}\mathbf{x}_{(-1)1}) \\ &- (\mathbf{x}_{(-1)1}\mathbf{x}_{(1)1} + \mathbf{x}_{(1)1}\mathbf{x}_{(-1)1} + \mathbf{x}_{(0)1}^2 + \tfrac{\lambda'^2}{8}\mathbf{x}_{(-1)1}^2) \\ &- \tfrac{\lambda'}{2}\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{(-1)1} + \tfrac{\lambda'}{2}\mathbf{x}_{(-1)1}\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_3^2 + \mathcal{O}(r^{-1}), \end{aligned}$$

Hodnoty výrazů $\mathbf{x}_{(n)1}$ určíme z této rovnice tak, že porovnáme členy se stejnou mocninnou r na obou stranách rovnice. Pro nejvyšší mocniny v r pak dostaneme rozvoj

$$\mathbf{x}_1 = r\mathbf{1} + \frac{1}{2r}(\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_3^2) + \mathcal{O}(r^{-2}). \tag{III.39}$$

Je vidět, že pro tyto nejvyšší řády je získaný rozvoj totožný s rozvojem (II.47), získaným v odstavci II.7.

Stejně jako v případě kontrakce Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$ budeme předpokládat, že také prvky $\mathbf{t}^i{}_j$ tvoří rozvoje v r, to jest

$$\mathbf{t}^i{}_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{t}^i_{(n)j}}{r^n}. \tag{III.40}$$

Tyto rozvoje a rozvoj (III.39) bychom nyní měli dosadit do vyjádření pro zobrazení β (III.31) a vyšetřit, jak se toto zobrazení chová pro členy spojené s různými mocninnami r. Protože je zobrazení β totožné se zobrazením β (II.34), užitým v případě Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$, a rozvoje (III.39), (III.40) jsou pro nejvyšší mocniny totožné s rozvoji (II.47), (II.48), dospěli bychom ke stejným výsledkům jako v odstavci II.7, to jest k tomu, že musí platit

$$\mathbf{t}^1_{(0)1} = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{t}^1_{(1)1} = 0, \qquad \mathbf{t}^a_{(0)1} = 0, \qquad \mathbf{t}^1_{(0)a} = 0, \tag{III.41}$$

což znamená, že zobrazení β je tvaru

$$\beta(\mathbf{x}_a) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{x}_b \otimes \mathbf{t}^b_{(0)a} + \mathcal{O}(r^{-1}). \tag{III.42}$$

Nyní dosadíme rozvoje (III.40) také do výrazů (III.30) určujících relace, konásobení, kojednotku a antipode. Stejně jako v případě kontrakce Hopfovy algebry $Pol(SO(2,1))$ popsané v odstavci II.7 se budeme zajímat pouze o vztahy pro vedoucí členy rozvojů (III.40), to jest pro prvky $\mathbf{t}^a_{(0)b}$, $\mathbf{t}^a_{(1)1}$, $\mathbf{t}^1_{(1)a}$ a $\mathbf{t}^1_{(0)1}$, přičemž výrazy pro prvek $\mathbf{t}^1_{(0)1}$ nebudeme uvádět, protože je roven jednotkovému prvku, čímž je jeho chování jednoznačně určeno.

Dosazením rozvojů (III.40) do relací $\mathbf{t}^T\eta^{-1}\mathbf{t} = \eta^{-1}$ a $\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T = \eta$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^T\eta^{-1}\mathbf{t} &= [\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})]^T[\eta^{-1}_{(0)} + \frac{1}{r}\eta^{-1}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})][\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})] \\
&= \mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}_{(0)}\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}[\mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}_{(0)}\mathbf{t}_{(1)} + \mathbf{t}^T_{(1)}\eta^{-1}_{(0)}\mathbf{t}_{(0)} + \mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}_{(1)}\mathbf{t}_{(0)}] + \mathcal{O}(r^{-2}) \\
&= \eta^{-1}_{(0)} + \frac{1}{r}\eta^{-1}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2}), \\
\mathbf{t}\eta\mathbf{t}^T &= [\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})][\eta_{(0)} + \frac{1}{r}\eta_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})][\mathbf{t}_{(0)} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2})]^T \\
&= \mathbf{t}_{(0)}\eta_{(0)}\mathbf{t}^T_{(0)} + \frac{1}{r}[\mathbf{t}_{(0)}\eta_{(0)}\mathbf{t}^T_{(1)} + \mathbf{t}_{(1)}\eta_{(0)}\mathbf{t}_{(0)} + \mathbf{t}_{(0)}\eta_{(1)}\mathbf{t}_{(0)}] + \mathcal{O}(r^{-2}) \\
&= \eta_{(0)} + \frac{1}{r}\eta_{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2}).
\end{aligned}$$

Porovnáme-li členy spojené s mocninnami r^0 a $\frac{1}{r}$ tak získáme rovnice

$$\begin{aligned}
&\mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}_{(0)}\mathbf{t}_{(0)} = \eta^{-1}_{(0)}, &&\mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}_{(0)}\mathbf{t}_{(1)} + \mathbf{t}^T_{(1)}\eta^{-1}_{(0)}\mathbf{t}_{(0)} + \mathbf{t}^T_{(0)}\eta^{-1}_{(1)}\mathbf{t}_{(0)} = \eta^{-1}_{(1)}, \\
&\mathbf{t}_{(0)}\eta_{(0)}\mathbf{t}^T_{(0)} = \eta_{(0)}, &&\mathbf{t}_{(0)}\eta_{(0)}\mathbf{t}^T_{(1)} + \mathbf{t}_{(1)}\eta_{(0)}\mathbf{t}^T_{(0)} + \mathbf{t}_{(0)}\eta_{(1)}\mathbf{t}^T_{(0)} = \eta_{(1)}.
\end{aligned}$$

Dosazením vztahů (III.41) a výrazů $\eta_{(0)}$, $\eta^{-1}_{(0)}$, $\eta_{(1)}$ a $\eta^{-1}_{(1)}$ uvedených v (III.37) získáme

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \eta^{-1}_{(0)ab} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(0)b} \end{array}\right), \\
&\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \eta^{ab}_{(0)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^b_{(0)d} \end{array}\right), \\
&\left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{\lambda'}{2}\delta^2_b \\ \hline -\frac{\lambda'}{2}\delta^2_a & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbf{t}^1_{(1)b} + \frac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^2_{(0)b} + \mathbf{t}^c_{(1)1}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(0)b} \\ \hline -\mathbf{t}^1_{(1)a} - \frac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^2_{(0)a} + \mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(1)1} & \mathbf{t}^c_{(1)a}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(0)b} + \mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(1)b} \end{array}\right), \\
&\left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{\lambda'}{2}\delta^b_2 \\ \hline -\frac{\lambda'}{2}\delta^a_2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbf{t}^b_{(1)1} + \frac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^b_{(0)2} + \mathbf{t}^1_{(1)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^b_{(0)d} \\ \hline -\mathbf{t}^a_{(1)1} - \frac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^a_{(0)2} + \mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^1_{(1)d} & \mathbf{t}^a_{(1)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^b_{(0)d} + \mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^b_{(1)d} \end{array}\right).
\end{aligned}
\tag{III.43}
$$

Vztahu $-\mathbf{t}^a_{(1)1} - \frac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^a_{(0)2} + \mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^1_{(1)d} = -\delta^a_2\frac{\lambda'}{2}$ uvedeného v poslední rovnici můžeme využít k tomu, abychom prvky $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ vyjádřili jako funkce prvků $\mathbf{t}^a_{(0)b}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)a}$. Prvky $\mathbf{t}^a_{(1)1}$ tedy můžeme chápat pouze jako označení výrazu $-\frac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^a_{(0)2} + \mathbf{t}^a_{(0)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^1_{(1)d} + \delta^a_2\frac{\lambda'}{2}$, a vztahy pro tyto prvky pak můžeme získat ze vztahů pro prvky $\mathbf{t}^a_{(0)b}$, $\mathbf{t}^1_{(1)a}$, a nebudeme je proto uvádět.

Dosazením rozvojů (III.40) do relace $\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1R_{12} = R_{12}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\left[\mathbf{t}_{(0)2} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)2} + \frac{1}{r^2}\mathbf{t}_{(2)2} + \mathcal{O}(r^{-3})\right]\left[\mathbf{t}_{(0)1} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)1} + \frac{1}{r^2}\mathbf{t}_{(2)1} + \mathcal{O}(r^{-3})\right] \times \\
&\qquad \times \left[R_{(0)12} + \frac{1}{r}R_{(1)12} + \frac{1}{r^2}R_{(2)12} + \mathcal{O}(r^{-3})\right] \\
&= \left[R_{(0)12} + \frac{1}{r}R_{(1)12} + \frac{1}{r^2}R_{(2)12} + \mathcal{O}(r^{-3})\right] \times \\
&\qquad \times \left[\mathbf{t}_{(0)1} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)1} + \frac{1}{r^2}\mathbf{t}_{(2)1} + \mathcal{O}(r^{-3})\right]\left[\mathbf{t}_{(0)2} + \frac{1}{r}\mathbf{t}_{(1)2} + \frac{1}{r^2}\mathbf{t}_{(2)2} + \mathcal{O}(r^{-3})\right].
\end{aligned}
$$

Porovnáním členů spojených s mocninnami r^0, $\frac{1}{r}$ a $\frac{1}{r^2}$ získáme rovnice

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(0)12} = R_{(0)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(0)2}, \\
&\mathbf{t}_{(1)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(0)12} + \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(1)1}R_{(0)12} + \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(1)12} \\
&\qquad = R_{(0)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(1)2} + R_{(0)12}\mathbf{t}_{(1)1}\mathbf{t}_{(0)2} + R_{(1)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(0)2}, \\
&\mathbf{t}_{(2)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(0)12} + \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(2)1}R_{(0)12} + \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(2)12} + \mathbf{t}_{(1)2}\mathbf{t}_{(1)1}R_{(0)12} \\
&\qquad + \mathbf{t}_{(1)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(1)12} + \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(1)1}R_{(1)12} \\
&\qquad = R_{(0)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(2)2} + R_{(0)12}\mathbf{t}_{(2)1}\mathbf{t}_{(0)2} + R_{(2)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(0)2} + R_{(0)12}\mathbf{t}_{(1)1}\mathbf{t}_{(1)2} \\
&\qquad + R_{(1)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(1)2} + R_{(1)12}\mathbf{t}_{(1)1}\mathbf{t}_{(0)2}.
\end{aligned}
$$

Tyto rovnice můžeme dále zjednodušit, pokud si uvědomíme, že první člen v rozvoji (III.37) R-matice je roven jednotkové matici, to jest $R_{(0)j_1}^{i_1}{}^{i_2}{}_{j_2} = \delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}$. Dosazením tohoto výrazu upravíme tyto rovnice do tvaru

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] =& 0, \\
[\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(1)2}] + [\mathbf{t}_{(1)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] =& \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(1)12} - R_{(1)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(0)2}, \\
[\mathbf{t}_{(0)1}, \mathbf{t}_{(2)2}] + [\mathbf{t}_{(2)1}, \mathbf{t}_{(0)2}] + [\mathbf{t}_{(1)1}, \mathbf{t}_{(1)2}] =& \mathbf{t}_{(1)2}, \mathbf{t}_{(0)1}R_{(1)12} + \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(1)1}R_{(1)12} + \mathbf{t}_{(0)2}\mathbf{t}_{(0)1}R_{(2)12} \\
& -R_{(1)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(1)2} - R_{(1)12}\mathbf{t}_{(1)1}\mathbf{t}_{(0)2} - R_{(2)12}\mathbf{t}_{(0)1}\mathbf{t}_{(0)2}.
\end{aligned}
\tag{III.44}
$$

Při konkrétním dosazování do těchto vztahů využijeme toho, že pro prvky matic $R_{(1)12}$ a $R_{(2)12}$ platí

$$\begin{aligned}
&R^1_{(1)1}{}^1{}_1 = 0, && R^1_{(1)1}{}^1{}_a = 0, && R^1_{(1)a}{}^1{}_1 = 0,\\
&R^1_{(1)a}{}^1{}_b = \lambda'\eta^{-1}_{(0)ab}, && R^1_{(2)a}{}^1{}_b = -\tfrac{\lambda'^2}{2}\eta^{-1}_{(0)ab},\\
&R^c_{(1)a}{}^1{}_b = \lambda'\delta^3_b(\delta^c_a - 1), && R^1_{(1)a}{}^c{}_b = \lambda'\delta^3_a(1-\delta^c_b),
\end{aligned} \tag{III.45}$$

což je možné určit z rozvoje R-matice (III.37). První rovnice z (III.44) užijeme k tomu, abychom určili komutátory mezi prvky $\mathbf{t}^{a_1}_{(0)b_1}$ a $\mathbf{t}^{a_2}_{(0)b_2}$. Dosazením (III.44) a (III.45) dostaneme

$$[\mathbf{t}^{a_1}_{(0)b_1}, \mathbf{t}^{a_2}_{(0)b_2}] = 0. \tag{III.46}$$

Druhé rovnice z (III.44) užijme k tomu, abychom určili komutátory mezi prvky $\mathbf{t}^a_{(0)b}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)c}$. Po dosazení (III.44) a (III.45) dostaneme

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}^a_{(0)b}, \mathbf{t}^1_{(1)c}] &= -[\mathbf{t}^a_{(1)b}, \mathbf{t}^1_{(0)c}] + \mathbf{t}^1_{(0)l}\mathbf{t}^a_{(0)k}R^k_{(1)b}{}^l{}_c - R^a_{(1)k}{}^1{}_l\mathbf{t}^k_{(0)b}\mathbf{t}^l_{(0)c}\\
&= \mathbf{t}^a_{(0)d}R^d_{(1)b}{}^1{}_c - R^a_{(1)d}{}^1{}_e\mathbf{t}^d_{(0)b}\mathbf{t}^e_{(0)c}\\
&= \lambda'\delta^3_c(\delta^d_b - 1)\mathbf{t}^a_{(0)d} - \lambda'\delta^3_e(\delta^a_d - 1)\mathbf{t}^d_{(0)b}\mathbf{t}^e_{(0)c}\\
&= \lambda'\left(\delta^3_c(\delta^d_b - 1)\mathbf{t}^a_{(0)d} + (1-\delta^a_d)\mathbf{t}^d_{(0)b}\mathbf{t}^3_{(0)c}\right).
\end{aligned} \tag{III.47}$$

Vyčíslením tohoto komutátoru pro konkrétní hodnoty indexů a, b, c získáme

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{t}^2_{(0)2}, \mathbf{t}^1_{(1)2}] = \lambda'\mathbf{t}^3_{(0)2}\mathbf{t}^3_{(0)2}, && [\mathbf{t}^2_{(0)3}, \mathbf{t}^1_{(1)2}] = \lambda'\mathbf{t}^3_{(0)3}\mathbf{t}^3_{(0)2},\\
&[\mathbf{t}^3_{(0)2}, \mathbf{t}^1_{(1)2}] = \lambda'\mathbf{t}^2_{(0)2}\mathbf{t}^3_{(0)2}, && [\mathbf{t}^3_{(0)3}, \mathbf{t}^1_{(1)2}] = \lambda'\mathbf{t}^2_{(0)3}\mathbf{t}^3_{(0)2},\\
&[\mathbf{t}^2_{(0)2}, \mathbf{t}^1_{(1)3}] = \lambda'\left(-\mathbf{t}^2_{(0)3} + \mathbf{t}^3_{(0)2}\mathbf{t}^3_{(0)3}\right), && [\mathbf{t}^2_{(0)3}, \mathbf{t}^1_{(1)3}] = \lambda'\left(-\mathbf{t}^2_{(0)2} + \mathbf{t}^3_{(0)3}\mathbf{t}^3_{(0)3}\right),\\
&[\mathbf{t}^3_{(0)2}, \mathbf{t}^1_{(1)3}] = \lambda'\left(-\mathbf{t}^3_{(0)3} + \mathbf{t}^2_{(0)2}\mathbf{t}^3_{(0)3}\right), && [\mathbf{t}^3_{(0)3}, \mathbf{t}^1_{(1)3}] = \lambda'\left(-\mathbf{t}^3_{(0)2} + \mathbf{t}^2_{(0)3}\mathbf{t}^3_{(0)3}\right).
\end{aligned}$$

Poslední rovnice z (III.44) užijeme při výpočtu komutátorů mezi prvky $\mathbf{t}^1_{(0)a}$, $\mathbf{t}^1_{(1)b}$. Po dosazení (III.44) a (III.45) dostaneme

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}^1_{(1)a}, \mathbf{t}^1_{(1)b}] = &-[\mathbf{t}^1_{(0)a}, \mathbf{t}^1_{(2)b}] - [\mathbf{t}^1_{(2)a}, \mathbf{t}^1_{(0)b}] + \mathbf{t}^1_{(1)l}\mathbf{t}^1_{(0)k}R^k_{(1)a}{}^l{}_b + \mathbf{t}^1_{(0)l}\mathbf{t}^1_{(1)k}R^k_{(1)a}{}^l{}_b + \mathbf{t}^1_{(0)l}\mathbf{t}^1_{(0)k}R^k_{(2)a}{}^l{}_b\\
&- R^1_{(1)k}{}^1{}_l\mathbf{t}^k_{(0)a}\mathbf{t}^l_{(1)b} - R^1_{(1)k}{}^1{}_l\mathbf{t}^k_{(1)a}\mathbf{t}^l_{(0)b} - R^1_{(2)k}{}^1{}_l\mathbf{t}^k_{(0)a}\mathbf{t}^l_{(0)b}\\
= &\;\mathbf{t}^1_{(1)c}\mathbf{1}R^1_{(1)a}{}^c{}_b + \mathbf{1}\mathbf{t}^1_{(1)c}R^c_{(1)a}{}^1{}_b + \mathbf{1}\mathbf{1}R^1_{(2)a}{}^1{}_b\\
&- R^1_{(1)c}{}^1{}_l\mathbf{t}^c_{(0)a}\mathbf{t}^l_{(1)b} - R^1_{(1)k}{}^1{}_c\mathbf{t}^k_{(1)a}\mathbf{t}^c_{(0)b} - R^1_{(2)c}{}^1{}_d\mathbf{t}^c_{(0)a}\mathbf{t}^d_{(0)b}\\
= &\;\lambda'\delta^3_a(1-\delta^c_b)\mathbf{t}^1_{(1)c} + \lambda'\delta^3_b(\delta^c_a - 1)\mathbf{t}^1_{(1)c} - \tfrac{\lambda'^2}{2}\eta^{-1}_{(0)ab}\\
&- \lambda'\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^c_{(0)a}\mathbf{t}^d_{(1)b} - \lambda'\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^c_{(1)a}\mathbf{t}^d_{(0)b} + \tfrac{\lambda'^2}{2}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^c_{(0)a}\mathbf{t}^d_{(0)b}\\
= &\;\lambda'\left((\delta^3_a(1-\delta^c_b) + \delta^3_b(\delta^c_a - 1)\right)\mathbf{t}^1_{(1)c}\\
&+ \tfrac{\lambda'^2}{2}\left(-\eta^{-1}_{(0)ab} + \mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(0)b}\right) - \lambda'\left(\mathbf{t}^c_{(0)a}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(1)b} + \mathbf{t}^c_{(1)a}\eta^{-1}_{(0)cd}\mathbf{t}^d_{(0)b}\right)\\
= &\;\lambda'\left(\delta^3_a(1-\delta^c_b) + \delta^3_b(\delta^c_a - 1)\right)\mathbf{t}^1_{(1)c},
\end{aligned}$$

kde jsme užili vztahů z první a třetí rovnosti v (III.43) k tomu, abychom zjednodušili výsledný výraz. Konkrétní hodnotu tohoto komutátoru získáme, vyčíslíme-li indexy a, b pro $a = 2$, $b = 3$, čímž dostaneme

$$[\mathbf{t}^1_{(1)2}, \mathbf{t}^1_{(1)3}] = -\lambda'\mathbf{t}^1_{(1)3}. \tag{III.48}$$

Zbývá dosadit rozvoj (III.40) a vztahy (III.41) do vztahů (III.30) určujících konásobení, kojednotku a antipode, čímž dostaneme

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathbf{t}^a{}_b &= \Delta\left(\mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1})\right) = \Delta \mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1}) = \mathbf{t}^a{}_i \otimes \mathbf{t}^i{}_b = \mathbf{t}^a_{(0)c} \otimes \mathbf{t}^c_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
\Delta \mathbf{t}^1{}_a &= \Delta\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) = \tfrac{1}{r}\Delta \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathcal{O}(r^{-2}) = \mathbf{t}^1{}_i \otimes \mathbf{t}^i{}_a\\
&= \tfrac{1}{r}\left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{t}^1_{(1)b} \otimes \mathbf{t}^b_{(0)a}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}),\\
\epsilon\left(\mathbf{t}^a{}_b\right) &= \epsilon(\mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1})) = \epsilon\left(\mathbf{t}^a_{(0)b}\right) + \mathcal{O}(r^{-1}) = \delta^a_b,\\
\epsilon\left(\mathbf{t}^1{}_a\right) &= \epsilon\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^1_{(0)a} + \mathcal{O}(r^{-1})\right) = \tfrac{1}{r}\epsilon\left(\mathbf{t}^1_{(0)a}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) = 0,\\
S\left(\mathbf{t}^a{}_b\right) &= S(\mathbf{t}^a_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1})) = S\left(\mathbf{t}^a_{(0)b}\right) + \mathcal{O}(r^{-1}) = \eta^{ac}_{(0)}\mathbf{t}^d_{(0)c}\eta^{-1}_{(0)}{}_{db} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
S\left(\mathbf{t}^1{}_a\right) &= S\left(\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathcal{O}(r^{-2})\right) = \tfrac{1}{r}S\left(\mathbf{t}^1_{(1)a}\right) + \mathcal{O}(r^{-2})\\
&= \eta^{1c}_{(0)}\mathbf{t}^d_{(0)c}\eta^{-1}_{(0)}{}_{db} + \tfrac{1}{r}\left(\eta^{1j}_{(1)}\mathbf{t}^k_{(0)j}\eta^{-1}_{(0)}{}_{ka} + \eta^{1j}_{(0)}\mathbf{t}^k_{(1)j}\eta^{-1}_{(0)}{}_{ka} + \eta^{1j}_{(0)}\mathbf{t}^k_{(0)j}\eta^{-1}_{(1)}{}_{ka}\right) + \mathcal{O}(r^{-2})\\
&= \eta^{11}_{(0)}\mathbf{t}^d_{(0)1}\eta^{-1}_{(0)}{}_{db} + \tfrac{1}{r}\left(\eta^{1b}_{(1)}\mathbf{t}^c_{(0)b}\eta^{-1}_{(0)}{}_{ca} + \eta^{11}_{(0)}\mathbf{t}^b_{(1)1}\eta^{-1}_{(0)}{}_{ba} + \eta^{11}_{(0)}\mathbf{t}^1_{(0)1}\eta^{-1}_{(1)}{}_{1a}\right) + \mathcal{O}(r^{-2})\\
&= \tfrac{1}{r}\left(\tfrac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^b_{(0)2}\eta^{-1}_{(0)}{}_{ba} + \eta^{11}_{(0)}\mathbf{t}^b_{(1)1}\eta^{-1}_{(0)}{}_{ba} + \eta^{11}_{(0)}\mathbf{t}^1_{(0)1}\tfrac{\lambda'}{2}\delta^2_a\right) + \mathcal{O}(r^{-2})\\
&= \tfrac{1}{r}\left(\tfrac{\lambda'}{2}\mathbf{t}^b_{(0)2} - \mathbf{t}^b_{(1)1} - \tfrac{\lambda'}{2}\delta^2_a\right)\eta^{-1}_{(0)}{}_{ba} + \mathcal{O}(r^{-2})\\
&= -\tfrac{1}{r}\mathbf{t}^1_{(1)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^b_{(0)d}\eta^{-1}_{(0)}{}_{ba} + \mathcal{O}(r^{-2}),
\end{aligned}
$$

přičemž výrazy pro antipode vyčíslené na prvcích $\mathbf{t}^1{}_a$ jsme upravili s užitím vztahů z poslední matice z (III.43) tak, aby obsahovaly pouze prvky $\mathbf{t}^a_{(0)b}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)a}$. Z těchto vztahů můžeme určit výrazy pro konásobení, kojednotku a antipode vyčíslené na prvcích $\mathbf{t}^a_{(0)b}$ a $\mathbf{t}^1_{(1)a}$, které jsou

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathbf{t}^a_{(0)b} &= \mathbf{t}^a_{(0)c} \otimes \mathbf{t}^c_{(0)b} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
\Delta \mathbf{t}^1_{(1)a} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{t}^1_{(1)a} + \mathbf{t}^1_{(1)b} \otimes \mathbf{t}^b_{(0)a} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
\epsilon(\mathbf{t}^a_{(0)b}) &= \delta^a_b,\\
\epsilon(\mathbf{t}^1_{(1)a}) &= 0,\\
S(\mathbf{t}^a_{(0)b}) &= \eta^{ac}_{(0)}\mathbf{t}^d_{(0)c}\eta^{-1}_{(0)}{}_{db} + \mathcal{O}(r^{-1}),\\
S(\mathbf{t}^1_{(1)a}) &= -\eta^{-1}_{(0)}{}_{ba}\mathbf{t}^b_{(0)c}\eta^{cd}_{(0)}\mathbf{t}^1_{(1)d} + \mathcal{O}(r^{-1}).
\end{aligned} \tag{III.49}
$$

Nyní provedeme v získaných vztazích limitu $r \to \infty$. Pro tento účel zavedeme symboly $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$, $g_{\mu\nu}$ a $g^{\mu\nu}$, μ, $\nu = 0, 1$, stejné jako v odstavci II.7, to jest

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \lim_{r\to\infty} \eta^{-1}_{\mu+2,\nu+2} = \eta^{-1}_{(0)}{}_{\mu+2,\nu+2}, & g^{\mu\nu} &= \lim_{r\to\infty} \eta^{\mu+2,\nu+2} = \eta^{\mu+2,\nu+2}_{(0)},\\
\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu &= \lim_{r\to\infty} \mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2} = \mathbf{t}^{\mu+2}_{(0)}{}_{\nu+2}, & \mathbf{h}_\mu &= \lim_{r\to\infty} r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2} = \mathbf{t}^1_{(1)\mu+2},
\end{aligned} \tag{III.50}
$$

Relace (III.43), (III.46), (III.47), (III.48) a limitu $r \to \infty$ vztahů (III.49) pak zapíšeme jako

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\beta] &= 0, & [\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1] &= -\lambda' \mathbf{h}_1, \\
[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{h}_\alpha] &= \lambda' \left(\delta^1_\alpha (\delta^\rho_\nu - 1) \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\rho - (\delta^\mu_\rho - 1) \mathbf{\Lambda}^\rho{}_\nu \mathbf{\Lambda}^1{}_\alpha \right), \\
\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^\beta{}_\nu &= g_{\mu\nu}, & \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\beta &= g^{\mu\nu}, \\
\Delta \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu &= \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha \otimes \mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\nu, & \Delta \mathbf{h}_\mu &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{h}_\mu + \mathbf{h}_\nu \otimes \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu, \\
\epsilon(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu) &= \delta^\mu_\nu, & \epsilon(\mathbf{h}_\mu) &= 0, \\
S(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu) &= g^{\mu\alpha} \mathbf{\Lambda}^\beta{}_\alpha g_{\beta\nu}, & S(\mathbf{h}_\mu) &= -g_{\mu\nu} \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\alpha g^{\alpha\beta} \mathbf{h}_\beta,
\end{aligned} \tag{III.51}$$

kde matice $g_{\mu\nu}$ a $g^{\mu\nu}$ jsou

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}. \tag{III.52}$$

Vzniklou Hopfovu algebru, to jest Hopfovu algebru generovanou prvky $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$ a $\mathbf{h}_\mu$ s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem (III.51) budeme značit symbolem $P_q(1,1)$.

Stejně jako jsme provedli limitu $r \to \infty$ a získali tak z Hopfovy algebry $SO_q(1,1)$ Hopfovu algebru $P_q(1,1)$, provedeme limitu $r \to \infty$ také v případě $SO_q(2,1)$-komodul algebry V'. Pro tento účel dosadíme rozvoj (III.39) do relací (III.34) zavedených v komodul algebře V', čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2r} \left[([\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] + \lambda' \mathbf{x}_3) \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_3 ([\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] + \lambda' \mathbf{x}_3) \right] + \mathcal{O}(r^{-2}) &= 0, \\
[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] + \lambda' \mathbf{x}_3 + \mathcal{O}(r^{-1}) &= 0, \\
-[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] - \lambda' \mathbf{x}_3 + \mathcal{O}(r^{-1}) &= 0.
\end{aligned}$$

Provedeme-li přeznačení $\mathbf{x}_{\mu+2} \to \mathbf{x}_\mu$, což znamená, že místo symbolu $\mathbf{x}_2$ budeme psát $\mathbf{x}_0$ a místo symbolu $\mathbf{x}_3$ budeme psát $\mathbf{x}_1$, pak můžeme limitu $r \to \infty$ těchto relací a vztahu (III.42) určujícího zobrazení β zapsat jako

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] &= -\lambda' \mathbf{x}_1, \\
\beta(\mathbf{x}_\mu) &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{h}_\mu + \mathbf{x}_\nu \otimes \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu.
\end{aligned} \tag{III.53}$$

Vzniklou algebru, to jest algebru generovanou prvky $\mathbf{x}_\mu$, $\mu = 0, 1$ s relacemi (III.53) budeme značit symbolem W. Tato algebra je pravou $P_q(1,1)$-komodul algebrou se zobrazením β určeným vztahem (III.53). V odstavci II.7 jsme ukázali, že pro to, abychom mohli vyčíslit bilineární formu pro libovolný prvek z Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ a z Hopfovy algebry $Pol(P(1,1))$ stačí zadat výrazy

$$\langle P_\alpha, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle, \qquad \langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu \rangle, \qquad \langle N, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle, \qquad \langle N, \mathbf{h}_\mu \rangle. \tag{III.54}$$

Také v případě bilineární formy definované pro Hopfovy algebry $U_q(so(2,1))$ a $P_q(1,1)$ stačí zadat tyto výrazy, a pro ostatní prvky ji vyčíslit s užitím vztahů (II.60), (II.61) a (II.62), to jest

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 1, \qquad \langle X, \mathbf{1} \rangle = \epsilon(X), \qquad \langle \mathbf{1}, \phi \rangle = \epsilon(\phi), \\
&\langle X_1 X_2 \cdots X_k, \mathbf{\Lambda} \rangle = \langle X_1, \mathbf{\Lambda} \rangle \langle X_2, \mathbf{\Lambda} \rangle \cdots \langle X_k, \mathbf{\Lambda} \rangle, \\
&\langle X_1 X_2 \cdots X_k, \mathbf{h} \rangle = \langle X_1, \mathbf{h} \rangle \langle X_2, \mathbf{\Lambda} \rangle \cdots \langle X_{k-1}, \mathbf{\Lambda} \rangle \langle X_k, \mathbf{\Lambda} \rangle, \\
&\langle X, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \mathbf{h}_{\alpha_1} \mathbf{h}_{\alpha_2} \cdots \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle \qquad \text{(III.55)} \\
&\quad = \langle X_{(1)}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \rangle \langle X_{(2)}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2} \rangle \cdots \langle X_{(k)}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k} \rangle \langle X_{(k+1)}, \mathbf{h}_{\alpha_1} \rangle \langle X_{(k+2)}, \mathbf{h}_{\alpha_2} \rangle \cdots \langle X_{(k+l)}, \mathbf{h}_{\alpha_l} \rangle,
\end{aligned}$$

kde $X \in U_q(so(2,1))$, $\phi \in P_q(1,1)$, $k, l = 2, 3, \ldots$, X_i značí lineární kombinace prvků P_0, P_1, N pro které jsou výrazy $\langle X_i, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle$ a $\langle X_i, \mathbf{h}_\mu \rangle$ určeny vztahy (III.54) a kde $X_{(1)} \otimes \cdots \otimes X_{(k+l)} = \Delta^{k+l-1} X$. Kdybychom se pokusili vyčíslit výrazy (III.54), tak bychom získali

$$\begin{aligned}
\langle P_\alpha, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle P_\alpha, \mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2} \rangle = 0, \\
\langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle P_\alpha, r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2} \rangle = \lim_{r\to\infty} r g_{\alpha\mu}, \\
\langle N, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle N, \mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mu = 1, \nu = 0 \text{ nebo } \mu = 0, \nu = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \\
\langle N, \mathbf{h}_\mu \rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle N, r\mathbf{t}^1{}_{\mu+2} \rangle = 0,
\end{aligned}$$

kde jsme užili vztahů (III.21), (III.14) a (III.40). Protože reprezentace (III.14) je v limitě $r \to \infty$ totožná s reprezentací (II.9), získané vztahy jsou totožné se vztahy (II.63), které jsme získali pro Hopfovy algebry $U(so(2,1))$ a $Pol(P(1,1))$. Je vidět, že některé z výrazů $\langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu \rangle$ jsou divergentní. Abychom odstranili tento nedostatek, provedeme v Hopfově algebře $U_q(so(2,1))$ záměnu generujících prvků P_0, P_1, N za nové prvky P'_0, P'_1, N', definované vztahy

$$N' = N, \qquad P'_0 = \frac{1}{r} P_0, \qquad P'_1 = \frac{1}{r} P_1.$$

Provedeme-li tuto záměnu, tak bychom měli pomocí nových prvků P'_0, P'_1, N' přepsat také relace a vztahy pro konásobení, kojednotku a antipode (III.9) v Hopfově algebře $U_q(so(2,1))$. Těmito relacemi a vztahy budou

$$\begin{aligned}
&[N', P'_0] = P'_1, && [N', P'_1] = \frac{e^{\lambda' P'_0} - e^{-\lambda' P'_0}}{2\lambda'} + \mathcal{O}(r^{-1}), && [P'_0, P'_1] = -\tfrac{1}{r^2} N', \\
&\Delta P'_0 = P'_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P'_0, && \Delta P'_1 = P'_1 \otimes e^{\frac{\lambda'}{2} P'_0} + e^{-\frac{\lambda'}{2} P'_0} \otimes P'_1, && \Delta N' = N' \otimes e^{\frac{\lambda'}{2} P'_0} + e^{-\frac{\lambda'}{2} P'_0} \otimes N', \\
&\epsilon(P'_0) = 0, && \epsilon(P'_1) = 0, && \epsilon(N') = 0, \\
&S(P'_0) = -P'_0, && S(P'_1) = -P'_1 + \mathcal{O}(r^{-1}), && S(N') = -N' - \tfrac{\lambda'}{2} P'_1 + \mathcal{O}(r^{-1}).
\end{aligned}$$

Provedením limity $r \to \infty$ získáme z těchto relací a vztahů

$$\begin{aligned}
&[N', P'_0] = P'_1, && [N', P'_1] = \tfrac{1}{2\lambda'}(e^{\lambda' P'_0} - e^{-\lambda' P'_0}), && [P'_0, P'_1] = 0, \\
&\Delta P'_0 = P'_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P'_0, && \Delta P'_1 = P'_1 \otimes e^{\frac{\lambda'}{2} P'_0} + e^{-\frac{\lambda'}{2} P'_0} \otimes P'_1, && \Delta N' = N' \otimes e^{\frac{\lambda'}{2} P'_0} + e^{-\frac{\lambda'}{2} P'_0} \otimes N', \\
&\epsilon(P'_0) = 0, && \epsilon(P'_1) = 0, && \epsilon(N') = 0, \\
&S(P'_0) = -P'_0, && S(P'_1) = -P'_1, && S(N') = -N' - \tfrac{\lambda'}{2} P'_1.
\end{aligned} \tag{III.56}$$

Tuto Hopfovu algebru, to jest Hopfovu algebru generovanou prvky P'_0, P'_1, N' s relacemi, konásobením, kojednotkou a antipodem (III.56) budeme značit symbolem $U_q(p(1,1))$. Důvodem pro toto označení je to, že limitou $\lambda' \to 0$ bychom získali relace (II.65) definující Hopfovu algebru zavedenou na univerzální obalující algebře Lieovy algebry $P(1,1)$, Hopfovu algebru $U_q(p(1,1))$ tedy můžeme považovat za deformaci Hopfovy algebry $U(p(1,1))$, přičemž míra deformace je určena parametrem λ'.

Vyčíslíme-li nyní výrazy (III.54) tak dostaneme

$$
\begin{aligned}
\langle P'_\alpha, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle \tfrac{1}{r}P_\alpha, \mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2}\rangle = 0,\\
\langle P'_\alpha, \mathbf{h}_\mu\rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle \tfrac{1}{r}P_\alpha, r\mathbf{t}^{1}{}_{\mu+2}\rangle = g_{\alpha\mu},\\
\langle N', \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle N, \mathbf{t}^{\mu+2}{}_{\nu+2}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mu=1,\nu=0 \text{ nebo } \mu=0,\nu=1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases},\\
\langle N', \mathbf{h}_\mu\rangle &= \lim_{r\to\infty} \langle N, r\mathbf{t}^{1}{}_{\mu+2}\rangle = 0,
\end{aligned}
\tag{III.57}
$$

kde jsme užili vztahů (III.21), (III.14) a (III.40). Tyto výrazy definují spolu se vztahy (III.55) bilineární formu pro Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$ a $P_q(1,1)$, která určuje dualitu těchto Hopfových algeber.

III.7 $*$-struktura

$*$-strukturu na Hopfově algebře $P_q(1,1)$ se pokusíme zavést stejným způsobem jako na Hopfově algebře $Pol(SO(2,1))$, to jest tak, že pro prvky $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$ a $\mathbf{h}_\mu$ zavedeme operaci $*$ jako

$$
\mathbf{\Lambda}^{\mu *}_{\nu} = \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \qquad\qquad \mathbf{h}^*_\mu = \mathbf{h}_\mu. \tag{III.58}
$$

To že takto zavedená operace $*$ splňuje pro prvky $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$ axiomy (I.29) lze ukázat stejným způsobem jako jsme učinili v odstavci II.8. Vztahy (III.58) tudíž zavádějí operaci $*$ na Hopfově algebře generované prvky $\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu$, $\mathbf{h}_\mu$. Rovněž podmínku (I.33) pro relace $\mathbf{\Lambda} g \mathbf{\Lambda}^T = g$ a $\mathbf{\Lambda}^T g \mathbf{\Lambda} = g$ je možné ověřit stejným způsobem jako jsme učinili v odstavci II.8. Zbývá ověřit podmínku (I.33) pro zbývající relace z (III.51), to jest nulovost výrazů

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\beta]^* &= -[\mathbf{\Lambda}^{\mu *}_{\nu}, \mathbf{\Lambda}^{\alpha *}_{\beta}] = -[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\beta] = 0,\\
\big([\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{h}_\alpha] - \lambda'\big(\delta^1_\alpha(\delta^\rho_\nu - 1)\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\rho &- (\delta^\mu_\rho - 1)\mathbf{\Lambda}^\rho{}_\nu\mathbf{\Lambda}^1{}_\alpha\big)\big)^*\\
&= -[\mathbf{\Lambda}^{\mu *}_{\nu}, \mathbf{h}^*_\alpha] - \overline{\lambda'}\left(\delta^1_\alpha(\delta^\rho_\nu - 1)\mathbf{\Lambda}^{\mu *}_{\rho} - (\delta^\mu_\rho - 1)\mathbf{\Lambda}^{\rho *}_{\nu}\mathbf{\Lambda}^{1 *}_{\alpha}\right)\\
&= -[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{h}_\alpha] - \overline{\lambda'}\left(\delta^1_\alpha(\delta^\rho_\nu - 1)\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\rho - (\delta^\mu_\rho - 1)\mathbf{\Lambda}^\rho{}_\nu\mathbf{\Lambda}^1{}_\alpha\right) = 0,\\
\big([\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1] + \lambda'\mathbf{h}_1\big)^* &= -[\mathbf{h}^*_0, \mathbf{h}^*_1] + \overline{\lambda'}\mathbf{h}^*_1 = -[\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1] + \overline{\lambda'}\mathbf{h}_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že tyto rovnice budou splněny právě tehdy, když $\overline{\lambda'} = -\lambda'$, to jest tehdy, kdy bude parametr λ' imaginární.

Na Hopfově algebře $U_q(p(1,1))$ zavedeme operaci $*$ stejným způsobem jako jsme zavedli operaci $*$ v případě Hopfovy algebry $U(so(2,1))$, to jest tak, aby byla splněna poslední z podmínek (I.37), to jest podmínka

$$
\langle X, \phi^*\rangle = \overline{\langle S(X)^*, \phi\rangle}, \tag{III.59}
$$

kde $X \in U_q(so(2,1))$ a $\phi \in P_q(1,1)$.

Ze vztahů (III.55) a (III.57) definujících bilineární formu je zřejmé, že platí

$$
\begin{array}{llll}
\langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_\mu\rangle = \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{h}_\mu\rangle}, & \langle P'_0, \mathbf{h}_\mu\rangle = \overline{\langle P'_0, \mathbf{h}_\mu\rangle}, & \langle P'_1, \mathbf{h}_\mu\rangle = \overline{\langle P'_1, \mathbf{h}_\mu\rangle}, & \langle N', \mathbf{h}_\mu\rangle = \overline{\langle N', \mathbf{h}_\mu\rangle},\\
\langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle = \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle}, & \langle P'_0, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle = \overline{\langle P'_0, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle}, & \langle P'_1, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle = \overline{\langle P'_1, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle}, & \langle N', \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle = \overline{\langle N', \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle}.
\end{array}
\tag{III.60}
$$

Pro prvek P'_0 můžeme postupovat stejným způsobem jako v odstavci II.8, protože výraz pro konásobení vyčíslené na tomto prvku je stejný jako v případě Hopfovy algebry $U(so(2,1))$.

Výpočtem (II.69) bychom tedy ukázali, že musí platit platí $S(P_0')^* = P_0'$, z čehož plyne, že $P_0'^* = S(P_0') = -P_0'$. Pro prvky P_1' a N' bude výpočet o něco složitější. Nejdříve si všimněme, že pro prvek $e^{\pm\frac{\lambda'}{2}P_0}$ a prvek $\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$ platí

$$
\begin{aligned}
\langle e^{\pm\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle &= \langle \mathbf{1} \pm \tfrac{\lambda}{2}P_0' + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\lambda'}{2}\right)^2 P_0'^2 \pm \cdots, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle \\
&= \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle \pm \tfrac{\lambda'}{2}\langle P_0', \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\lambda'}{2}\right)^2 \langle P_0', \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\alpha}\rangle\langle P_0', \mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\nu}\rangle} \pm \cdots \\
&= \overline{\langle \mathbf{1}, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle \mp \tfrac{\lambda'}{2}\langle P_0', \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\lambda'}{2}\right)^2} \langle P_0', \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\alpha}\rangle\langle P_0', \mathbf{\Lambda}^{\alpha}{}_{\nu}\rangle \mp \cdots \\
&= \overline{\langle \mathbf{1} \mp \tfrac{\lambda}{2}P_0' + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\lambda'}{2}\right)^2} P_0'^2 \pm \cdots, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle \\
&= \langle e^{\mp\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}\rangle,
\end{aligned}
$$

kde jsme užili toho, že $\overline{\lambda'} = -\lambda'$ a vztahů (III.60). Nahradíme-li v tomto výpočtu prvek $\mathbf{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$ prvkem $\mathbf{h}_{\mu}$, tak uvidíme, že platí také

$$
\langle e^{\pm\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\mu}\rangle = \overline{\langle e^{\mp\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\mu}\rangle}.
$$

S užitím těchto vztahů můžeme ukázat, že pro prvky tvaru $e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes P_1'\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}$ z Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))^{k+l}$ a prvky $\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{h}_{\alpha_l}$ z Hopfovy algebry $P_q(1,1)^{k+l}$, kde k, $l = 1, 2, \dots$ platí

$$
\begin{aligned}
&\langle e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes P_1'\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\alpha_l}\otimes\cdots\otimes\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\rangle \\
&\quad= \langle e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle\cdots\langle e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\alpha_{p+1}}\rangle\langle P_1', \mathbf{h}_{\alpha_p}\rangle\langle e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\alpha_{p-1}}\rangle\cdots\langle e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\rangle \\
&\quad= \overline{\langle e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\rangle\cdots\langle e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\alpha_{p-1}}\rangle\langle P_1', \mathbf{h}_{\alpha_p}\rangle\langle e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\alpha_{p+1}}\rangle\cdots\langle e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle} \\
&\quad= \overline{\langle e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes P_1'\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle}.
\end{aligned}
$$

Uvážíme-li, že prvek $\Delta^{k+l}P_1'$ je součtem prvků tvaru $e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes P_1'\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}\otimes\cdots\otimes e^{\frac{\lambda'}{2}P_0'}$, tak můžeme pro prvek P_1' z $U_q(p(1,1))$, jednotkový prvek a prvky tvaru $\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}$ $\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l}$ z Hopfovy algebry $P_q(1,1)$ psát

$$
\begin{aligned}
\langle P_1', \mathbf{1}^*\rangle =& \langle P_1', \mathbf{1}\rangle = \epsilon(P_1') = 0 = \overline{\epsilon(P_1')} = \overline{\langle P_1', \mathbf{1}\rangle} = \overline{\langle S(P_1')^*, \mathbf{1}\rangle}, \\
\langle P_1', (&\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l})^*\rangle \\
&= \langle P_1', \mathbf{h}^*_{\alpha_l}\cdots\mathbf{h}^*_{\alpha_2}\mathbf{h}^*_{\alpha_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_k *}{}_{\nu_k}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_2 *}{}_{\nu_2}\mathbf{\Lambda}^{\mu_1 *}{}_{\nu_1}\rangle \\
&= \langle P_1', \mathbf{h}_{\alpha_l}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_2}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\rangle \\
&= \langle P_{0(1)}', \mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle\cdots\langle P_{0(l)}', \mathbf{h}_{\alpha_1}\rangle\langle P_{0(l+1)}', \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\rangle\cdots\langle P_{0(k+l)}', \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\rangle \\
&= \overline{\langle P_{0(1)}', \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\rangle\cdots\langle P_{0(k)}', \mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\rangle\langle P_{0(k+1)}', \mathbf{h}_{\alpha_1}\rangle\cdots\langle P_{0(k+l)}', \mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle} \\
&= \overline{\langle P_1', \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle} \\
&= \overline{\langle S(P_1')^*, \mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l}\rangle}.
\end{aligned}
$$

přičemž poslední rovnost plyne z podmínky (III.59). Protože libovolný prvek z Hopfovy algebry $P_q(1,1)$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci jednotkového prvku a prvků tvaru

$\mathbf{\Lambda}^{\mu_1}{}_{\nu_1}\mathbf{\Lambda}^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\mathbf{\Lambda}^{\mu_k}{}_{\nu_k}\mathbf{h}_{\alpha_1}\mathbf{h}_{\alpha_2}\cdots\mathbf{h}_{\alpha_l}$, musí platit $S(P_1)^* = P_1$, a tedy $P_1'^* = S(P_1) = -P_1'$. Stejným způsobem můžeme postupovat i v případě prvku N', čímž bychom dostali $N'^* = S(N') = N' - \frac{\lambda'}{2}P_1'$. Na Hopfově algebře $U_q(p(1,1))$ tedy operaci $*$ zavedeme pomocí vztahů

$$P_0'^* = -P_0', \qquad P_1'^* = -P_1', \qquad N'^* = -N' - \tfrac{\lambda'}{2}P_1'. \tag{III.61}$$

Abychom získali prvky, které zůstanou nezměněny při působení operace $*$ a abychom mohli místo imaginárního parametru λ' uvažovat reálný parametr λ provedeme záměnu prvků P_0', P_1', N' a parametru λ' za nové prvky P_0, P_1, N a parametr λ definované vztahy

$$P_0 = iP_0', \qquad P_1 = ie^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}P_1', \qquad N = ie^{-\frac{\lambda'}{2}P_0'}N', \qquad \lambda = -i\lambda'. \tag{III.62}$$

Ačkoliv jsme pro nové prvky generující Hopfovu algebru $U_q(p(1,1))$ užili stejného označení jako pro prvky generující Hopfovu algebru $U_q(so(2,1))$, zavedené v odstavci III.1, nemají spolu tyto prvky nic společného. Taktéž parametr λ nemá nic společného s parametrem λ zavedeným v odstavci III.1. Vztahy (III.56) a (III.61) pomocí těchto nových prvků zapíšeme jako

$$\begin{aligned}
&[N,P_0] = iP_1, && [N,P_1] = i\tfrac{1}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda P_0}) - i\tfrac{\lambda}{2}P_1^2, && [P_0,P_1] = 0,\\
&\Delta P_0 = P_0\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes P_0, && \Delta P_1 = P_1\otimes\mathbf{1} + e^{-\lambda P_0}\otimes P_1, && \Delta N = N\otimes\mathbf{1} + e^{-\lambda P_0}\otimes N,\\
&\epsilon(P_0) = 0, && \epsilon(P_1) = 0, && \epsilon(N) = 0,\\
&S(P_0) = -P_0, && S(P_1) = -e^{\lambda P_0}P_1, && S(N) = e^{\lambda P_0}(-N - i\lambda P_1)\\
&P_0^* = P_0, && P_1^* = P_1, && N^* = N.
\end{aligned} \tag{III.63}$$

Vztahy (III.51) a (III.58) zapíšeme jako

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\beta] = 0, && [\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1] = -i\lambda\mathbf{h}_1,\\
&[\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, \mathbf{h}_\alpha] = i\lambda\left(\delta^1_\alpha(\delta^\rho_\nu - 1)\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\rho - (\delta^\mu_\rho - 1)\mathbf{\Lambda}^\rho{}_\nu\mathbf{\Lambda}^1{}_\alpha\right), &&\\
&\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta}\mathbf{\Lambda}^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}, && \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta}\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\beta = g^{\mu\nu},\\
&\Delta\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu = \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\alpha\otimes\mathbf{\Lambda}^\alpha{}_\nu, && \Delta\mathbf{h}_\mu = \mathbf{1}\otimes\mathbf{h}_\mu + \mathbf{h}_\nu\otimes\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu,\\
&\epsilon(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu) = \delta^\mu_\nu, && \epsilon(\mathbf{h}_\mu) = 0,\\
&S(\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu) = g^{\mu\alpha}\mathbf{\Lambda}^\beta{}_\alpha g_{\beta\nu}, && S(\mathbf{h}_\mu) = -g_{\mu\nu}\mathbf{\Lambda}^\nu{}_\alpha g^{\alpha\beta}\mathbf{h}_\beta,\\
&\mathbf{\Lambda}^{\mu *}_\nu = \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu, && \mathbf{h}^*_\mu = \mathbf{h}_\mu.
\end{aligned} \tag{III.64}$$

Vztahy (III.57) definující bilineární formu přepíšeme jako

$$\begin{aligned}
\langle P_\alpha, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle &= 0,\\
\langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu\rangle &= ig_{\alpha\mu},\\
\langle N, \mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu\rangle &= \begin{cases} i & \text{pokud } \mu=1,\nu=0 \text{ nebo } \mu=0,\nu=1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases},\\
\langle N, \mathbf{h}_\mu\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{III.65}$$

Stejným způsobem jako jsme zavedli operaci $*$ na Hopfově algebře $P_q(1,1)$ zavedeme i operaci $*$ na algebře W, která je pravou $P_q(1,1)$-komodul algebrou. Pro prvky $\mathbf{x}_\mu$ generující tuto algebru určíme operaci $*$ pomocí vztahu

$$\mathbf{x}^*_\mu = \mathbf{x}_\mu, \tag{III.66}$$

to jest stejným vztahem jako (II.73), který jsme užili v případě pravé $Pol(SO(2,1))$-komodul algebry $Pol(\mathbb{R}^2)$. Aby tyto vztahy zaváděli operaci $*$, musí být pro relaci (III.53) splněna podmínka (I.33), to jest nulovost výrazu

$$\big([\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] + \lambda' \mathbf{x}_1\big)^* = -[\mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_1^*] + \overline{\lambda'} \mathbf{x}_1^* = -[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] - \lambda' \mathbf{x}_1 = 0.$$

Vztah (III.66) tedy zavádí operaci $*$ na algebře W a vytváří z ní $*$-algebru. Relaci (III.53) zavedenou v této algebře přepíšeme pomocí nového parametru λ jako

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = -i\lambda \mathbf{x}_1. \tag{III.67}$$

III.8 Modul algebra

V tomto odstavci provedeme s $P_q(1,1)$-komodul algebrou W to stejné, co jsme provedli v odstavci II.9 s pravou $Pol(P(1,1))$-komodul algebrou $Pol(\mathbb{R}^2)$, což znamená, že k pravé $P_q(1,1)$-komodul algebře W přiřadíme levou $U_q(p(1,1))$-modul algebru. Touto levou modul algebrou bude algebra W, přičemž zobrazení $\triangleright$ které určuje působení $*$-Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$ na $*$-algebru W definujeme vztahem (I.52), to jest

$$X \triangleright v = v^{(\bar{1})} \langle X, v^{(\bar{2})} \rangle, \tag{III.68}$$

kde $X \in U_q(p(1,1))$ a $v \in W$. Vyčíslíme-li tento vztah pro prvky $X = P_0$, P_1, N z $*$-Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$ a prvky $\mathbf{x}_\mu$ z $*$-algebry W tak získáme vztahy

$$\begin{aligned} P_\alpha \triangleright \mathbf{x}_\mu &= \mathbf{1}\langle P_\alpha, \mathbf{h}_\mu \rangle + \mathbf{x}_\nu \langle P_\alpha, \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu \rangle = i g_{\alpha\mu}, \\ N \triangleright \mathbf{x}_\mu &= \mathbf{1}\langle N, \mathbf{h}_\mu \rangle + \mathbf{x}_\nu \langle N, \mathbf{\Lambda}^\nu{}_\mu \rangle = \begin{cases} i\mathbf{x}_1 & \text{pro } \mu = 0 \\ i\mathbf{x}_0 & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{III.69}$$

V dalších výpočtech budeme ještě potřebovat vědět, jak působí prvky $e^{\pm\lambda P_0}$ z $*$-Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$ na prvky $\mathbf{x}_\mu$ z $*$-algebry W, to jest

$$\begin{aligned} e^{\pm\lambda P_0} \triangleright \mathbf{x}_\mu &= (\mathbf{1} \pm \lambda P_0 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 P_0^2 \pm \cdots) \triangleright \mathbf{x}_\mu \\ &= \mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu \pm \lambda(P_0 \triangleright \mathbf{x}_\mu) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 (P_0 \triangleright (P_0 \triangleright \mathbf{x}_\mu)) \pm \cdots = \mathbf{x}_\mu \pm i g_{0\mu}. \end{aligned} \tag{III.70}$$

III.9 Algebra operátorů

V tomto odstavci zkusíme užít stejného postupu, jako jsme užili v odstavci II.10, k tomu, abychom z $*$-Hopfovy algebry $U_q(p(1,1))$ a levé $U_q(p(1,1))$-modul algebry W vytvořili algebru operátorů. Stejně jako v odstavci II.10 užijeme bicrossproduct algebry zavedené v odstavci I.10.

Bicrossproduct algebra $B = W \rtimes U_q(p(1,1))$ je algebrou zavedenou na tenzorovém součinu $W \otimes U_q(p(1,1))$ s násobením určeným vztahem (I.54), to jest vztahem

$$(v \otimes h)(u \otimes g) = v(h_{(1)} \triangleright u) \otimes h_{(2)} g,$$

kde $v, y \in W$ a $h, g \in U_q(p(1,1))$. Pro $*$-algebry $U_q(p(1,1))$ a W definujeme injektivní homomorfismy (I.55) (I.56)

$$\begin{aligned} \widehat{v} &= v \otimes \mathbf{1}, \\ \widehat{h} &= \mathbf{1} \otimes h, \end{aligned}$$

kde $v \in W$ a $h \in U_q(p(1,1))$. Tyto homomorfismy identifikují $*$-algebry $U_q(p(1,1))$ a W jako podalgebry algebry B.

Dosazením do definice (III.9) můžeme určit výrazy pro násobení mezi prvky $\widehat{P_0}$, $\widehat{P_1}$, $\widehat{N}$ a prvky $\widehat{\mathbf{x}_\mu}$, které jsou

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{x}_\mu}\widehat{P_\nu} &= (\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes P_\nu) = \mathbf{x}_\mu(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}P_\nu = \mathbf{x}_\mu \otimes P_\nu,\\
\widehat{P_0}\widehat{\mathbf{x}_\mu} &= (\mathbf{1} \otimes P_0)(\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}(P_{0(1)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes P_{0(2)}\mathbf{1} = (P_0 \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes \mathbf{1} + (\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes P_0\\
&= ig_{0\mu}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{x}_\mu \otimes P_0,\\
\widehat{P_1}\widehat{\mathbf{x}_\mu} &= (\mathbf{1} \otimes P_1)(\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}(P_{1(1)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes P_{1(2)}\mathbf{1} = (P_1 \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes \mathbf{1} + (e^{-\lambda P_0} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes P_1\\
&= ig_{1\mu}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{x}_\mu \otimes P_1 - i\lambda g_{0\mu}\mathbf{1} \otimes P_1,\\
\widehat{\mathbf{x}_\mu}\widehat{N} &= (\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes N) = \mathbf{x}_\mu(\mathbf{1} \triangleright \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}N = \mathbf{x}_\mu \otimes N,\\
\widehat{N}\widehat{\mathbf{x}_\mu} &= (\mathbf{1} \otimes N)(\mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}(N_{(1)} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes N_{(2)}\mathbf{1} = (N \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes \mathbf{1} + (e^{-\lambda P_0} \triangleright \mathbf{x}_\mu) \otimes N\\
&= \begin{cases} i\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{x}_0 \otimes N - i\lambda\mathbf{1} \otimes N & \text{pro } \mu = 0\\ i\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{x}_1 \otimes N & \text{pro } \mu = 1 \end{cases},
\end{aligned}
$$

kde jsme užili (III.69), (III.70) a toho, že platí axiomy (I.49), (I.50). Tyto výrazy vedou ke komutátorům

$$
\begin{aligned}
[\widehat{\mathbf{x}_\mu}, \widehat{P_\nu}] &= \widehat{\mathbf{x}_\mu}\widehat{P_\nu} - \widehat{P_\nu}\widehat{\mathbf{x}_\mu} = -ig_{\mu\nu} + i\lambda\delta^0_\mu\delta^1_\nu\widehat{P_1},\\
[\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_0}] &= \widehat{N}\widehat{\mathbf{x}_0} - \widehat{\mathbf{x}_0}\widehat{N} = i\widehat{\mathbf{x}_1} - i\lambda\widehat{N},\\
[\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_1}] &= \widehat{N}\widehat{\mathbf{x}_1} - \widehat{\mathbf{x}_1}\widehat{N} = i\widehat{\mathbf{x}_0},
\end{aligned}
$$

které spolu s relacemi (III.63) z algebry $U_q(p(1,1))$ a relacemi (III.67) z algebry W určují strukturu algebry B.

Vzniklou algebrou operátorů B je tedy algebra generovaná prvky $\widehat{P_0}$, $\widehat{P_1}$, $\widehat{N}$, $\widehat{\mathbf{x}_0}$, $\widehat{\mathbf{x}_1}$ s relacemi

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{N}, \widehat{P_0}] = i\widehat{P_1}, \qquad [\widehat{N}, \widehat{P_1}] = i\tfrac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda\widehat{P_0}}) - i\tfrac{\lambda}{2}\widehat{P_1}^2, \qquad [\widehat{P_0}, \widehat{P_1}] = 0,\\
&[\widehat{\mathbf{x}_0}, \widehat{\mathbf{x}_1}] = -i\lambda\widehat{\mathbf{x}_1},\\
&[\widehat{\mathbf{x}_\mu}, \widehat{P_\nu}] = -ig_{\mu\nu} + i\lambda\delta^0_\mu\delta^1_\nu\widehat{P_1}, \qquad [\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_0}] = i\widehat{\mathbf{x}_1} - i\lambda\widehat{N}, \qquad [\widehat{N}, \widehat{\mathbf{x}_1}] = i\widehat{\mathbf{x}_0}, \qquad \text{(III.71)}
\end{aligned}
$$

přičemž parametru λ, který má rozměr délky, přiřadíme právě hodnotu Planckovy délky L_p. Tato algebra je dvojdimenzionální verzí algebry operátorů uvedenou například v pracích [6], [8] a v pracích [4], [5], [7], ve kterých ovšem nejsou uvedeny všechny relace pro prvek $\widehat{N}$. Snadno bychom mohli pro tuto algebru ověřit to, že limitou $\lambda \to 0$, která odpovídá limitě malých hybností a velkých rozměrů, získáme algebru operátorů (II.84), která popisuje speciální teorii relativity.

Hopfova algebra $U_q(p(1,1))$ je $*$-Hopfovou algebrou a algebra W je $*$-algebrou, vzniklá bicrossproduct algebra B je tudíž $*$-algebrou, přičemž operace $*$ je v této algebře určena vztahy (III.63) určujícími operaci $*$ v $*$-Hopfově algebře $U_q(p(1,1))$ a vztahy (III.66) určujícími operaci $*$ v $*$-algebře W, to jest vztahy

$$
\begin{aligned}
&\widehat{P_0}^* = \widehat{P_0}, \qquad \widehat{P_1}^* = \widehat{P_1}, \qquad \widehat{N}^* = \widehat{N},\\
&\widehat{\mathbf{x}_\mu}^* = \widehat{\mathbf{x}_\mu}. \qquad \text{(III.72)}
\end{aligned}
$$

Stejným postupem, kterým jsme vytvořili reprezentaci algebry operátorů speciální teorie relativity, bychom mohli vytvořit také reprezentaci této algebry operátorů. Pomocí vztahu (I.61) a levé modul algebry, zavedené v odstavci III.8 bychom tedy mohli zavést reprezentaci algebry operátorů dvojité speciální teorie relativity na algebře W.

Závěr

V práci jsme užili struktury Hopfovy algebry k tomu, abychom doplnili algebru generátorů symetrie speciální teorie relativity o operátory polohy a získali tak algebru operátorů (II.84), která popisuje speciální teorii relativity v jedné časové a jedné prostorové dimenzi. Tuto algebru operátorů jsme doplnili o operaci $*$ (II.85), přiřazující operátoru operátor k němu adjungovaný. Užitý postup nám navíc umožnil sestrojit reprezentaci (II.86) této algebry na prostoru polynomů v souřadnicích.

Stejného postupu jako při konstrukci algebry operátorů speciální teorie relativity jsme užili také při konstrukci algebry operátorů dvojité speciální teorie relativity. Algebru generátorů symetrie jsme doplnili o operátory polohy a vytvořili jsme tak algebru (III.71), která by mohla být na algebrou operátorů popisující dvojitou speciální teorii relativity. Stejně jako v případě algebry operátorů speciální teorie relativity jsme tuto algebru doplnili o operaci $*$ (III.72), která přiřazuje operátoru operátor k němu adjungovaný. Rovněž jsme naznačili, jakým způsobem bychom mohli vytvořit reprezentaci této algebry, která by byla analogií reprezentace, kterou jsme zavedli v případě speciální teorie relativity.

Vytvořená algebra operátorů dvojité speciální teorie relativity je dvojdimenzionální verzí algebry operátorů uvedené například v pracích [4], [5], [6], [7], [8]. Získaná algebra operátorů je pouze jednou z mnoha algeber operátorů splňujících požadavky dvojité speciální teorie relativity. Není tedy jediným řešením, ale pouze příkladem takové algebry operátorů.

Literatura

[1] G. Amelino-Camelia, *Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale*, arXiv:gr-qc/0012051

[2] J. Maguejo, L. Smolin, *Lorentz invariance with an invariant energy scale*, arXiv:hep-th/0112090v2

[3] G. Amelino-Camelia, D. Benedetti, F. D'Andrea, A. Procaccini, *Comparison of relativity theories with observer-independent scales of both velocity and length/mass*, arXiv:hep-th/0201245v2

[4] J. Kowalski-Glikman, S. Nowak, *Doubly special Relativity theories as different bases of κ-Poincaré algebra*, arXiv:hep-th/0203040v1

[5] A. Nowicki, *Kappa-Deformed Phase Space and Uncertainity Relations*, arXiv:math.QA/9803064v1

[6] J. Kowalski-Glikman, S. Nowak, *Non-commutative space-time od Doubly Special Relativity theories*, arXiv:hep-th/0204245v1

[7] J. Kowalski-Glikman, *Introduction to Doubly Special Relativity*, arXiv:hep-th/0405273v1

[8] J. Kowalski-Glikman, *De Sitter space as an arena for Doubly Special Relativity*, arXiv:hep-th/0207279v2

[9] A. O. Barut, R. Rączka, *Theory of group representations and applications*, Polish scientific publishers 1977

[10] S. Majid, *Foundations of Quantum group theory*, Cambridge University Press 1995

[11] P. Zaugg, *The guantum Poincaré group from quantum group contraction*, arXiv:hep-th/9409100v1

[12] T. H. Koornwinder, *General Compact Quantum Groups, a Tutorial*, arXiv:hep-th/9401114v1