MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

TRETÍ NEWTONOV ZÁKON A TEÓRIA RELATIVITY

EMÍLIA KUBALOVÁ

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jan Novotný, CSc.

BRNO 2008

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovanej literatúry.

V Brne 14.5.2008 Emília Kubalová

Abstrakt: Práca sa zaoberá platnosťou Newtonových pohybových zákonov v teórii relativity s dôrazom na tretí Newtonov zákon. Súčasťou zadania je paradox zo Špeciálnej teórie relativity. Po uvedení príslušných teórií je problém riešený tromi prístupmi: vo Všeobecnej teórii relativity, cez post-newtonovskú aproximáciu a nakoniec pomocou relativistickej Lagrangeovej funkcie. Počas riešenia sa kladie dôraz na jednotlivé sily, analyzuje sa ich vzájomný vzťah a hľadajú sa súvislosti medzi jednotlivými prístupmi.

Kľúčové slová: Newtonove zákony, Einsteinova teória relativity, sila, väzby

Abstract: This work focuses on Newton's Laws of Motion - particularly the Third Newton's Law - in the relativity theory. A problem, paradox in Special Theory of Relativity, is to be resolved as a part of the assignment. First, the theoretical background is laid. Then, solution to the problem is given through General Theory of Relativity, post-newtonian approximation and relativistic Lagrange function. Last, the importance of forces and constraints is analysed and the results of all three approaches are discussed.

Keywords: Newton's Laws, Einstein Relativity Theory, force, constraints

Ďakujem prof. Novotnému za vedenie práce, venovaný čas a obrovskú pomoc, rodičom za jazykové a typografické úpravy a sestrám a Ondrejovi za podporu a železné uši.

Obsah

Úvod

Za prvý pokus o relativistickú teóriu je možné považovať Galileove experimenty, ktorých výsledky boli neskôr sformulované do transformačných vzťahov nesúcich Galileovo meno. Na Galileovu prácu nadviazal Newton vo svojich Princípiách z roku 1666 popisujúc pohybové zákony, dnes známe ako tri Newtonove zákony (prvý zákon je vylepšením Galileovho princípu zotrvačnosti) a gravitačný zákon. Hlavnými Newtonovými predpokladmi boli absolútny čas a absolútny priestor, voči ktorému je možné vzťahovať všetok pohyb, pretože podľa neho relatívny pohyb voči nejakým telesám je zdanlivý a skutočný je len pohyb absolútny.

Posúdenie pohybu vzťažnej sústavy voči absolútnemu priestoru navrhol Newton urobiť na základe experimentu s vedierkom vody. Ak sa vzťažná sústava otáča, potom voda vo vedierku bude tiež rotovať a vytvorí sa konkávny profil. Ak sa vzťažná sústava vzhľadom k absolútnemu priestoru pohybuje so zrýchlením, povrch vody sa nakloní.

Každý pozorovateľ, ktorý bude mať k dispozícii vedierko vody, bude schopný určiť povahu pohybu svojej vzťažnej sústavy a vzhľadom k absolútnemu priestoru bude v pokoji práve vtedy, keď povrch vody v jeho vedierku bude rovný. Newtonovo vysvetlenie ale nehovorí nič o tom, ako sa zachovať v prípade, že sa vzťažná sústava pohybuje rovnomerne priamočiaro vzhľadom k absolútnemu priestoru.

Newton vo svojej Optike vytvoril teóriu éteru, ktorá neskôr poslúžila i Maxwellovi ako médium pre šírenie svetla a pre zachovanie platnosti jeho rovníc. Pokusy na "zmeranie" éteru k cieľu neviedli a v roku 1905 vytvorením Špeciálnej teórie relativity, ktorá sa bez neho úplne zaobišla, bolo od tohto konceptu upustené úplne.

K relativite priestoru sa pridala aj relativita času; navyše sa Einstein rozhodol do relativistickej teórie zapracovať i teóriu gravitácie a v roku 1915 prezentoval Pruskej Akadémii cez svoje rovnice poľa Všeobecnú teóriu rela-

tivity. Tvrdenie: *Všetky vzťažné sústavy sú ekvivalentné ak berieme do úvahy formuláciu základných fyzikálnych zákonov* nazývame všeobecným princípom relativity.

Napriek elegancii Einsteinovej teórie nájdu sa i odporcovia relativity, ktorí, ľudovo povedané, v relativitu neveria. Či už to dokazujú vymýšľaním alternatívnych teórií (ako napríklad balistická teória) alebo predkladaním myšlienkových experimentov, ktoré v relativistickej teórii zdanlivo vedú k paradoxnému riešeniu, doposiaľ sa nepodarilo základmi Einsteinovej teórie relativity otriasť.

Tak, ako sa príchodom newtonovskej fyziky upustilo od dovtedy zažitého vnímania prírodných zákonov, mohlo by sa zdať, že s Einsteinovou teóriou relativity môžeme zabudnúť na Newtonovu teóriu. Argumentov, prečo tak neurobiť, je hneď niekoľko, no azda najzávažnejším je fakt, že pre každodenné interakcie v "obyčajnom" svete newtonovská mechanika úplne postačuje.

Môžeme sa spýtať, či Einsteinova relativita Newtonove zákony nejakým spôsobom modifikuje, alebo či je v rámci nej výhodnejšie pracovať s inými, všeobecnejšími princípmi. V tejto práci sa budeme zaoberať touto otázkou hlavne v spojitosti s Tretím Newtonovým zákonom a aby bol problém jasnejší, pomôžeme si rozborom myšlienkového experimentu.

Kapitola 1

Newtonovská Mechanika

Spojenie sily a zrýchlenia ako príčiny a následku prvý pochopil a sformuloval Sir Isaac Newton. Jeho tri zákony popisujú oblasť fyziky, ktorú nazývame newtonovská mechanika.

Newton opiera svoj pohľad na prírodné javy a zákony o absolútny priestor a absolútny čas, všetky javy popisuje privilegovaný pozorovateľ v absolútnej vzťažnej sústave. Takto vznikol koncept éteru, látky, ktorá je všade naokolo v absolútnom pokoji a voči ktorej meriame pohyb presným meraním rýchlosti svetla. Z tejto predstavy vychádza aj jeho známy vedierkový experiment, pomocou ktorého je každý pozorovateľ schopný identifikovať povahu svojej vzťažnej sústavy ako inerciálnu, alebo neinerciálnu.

Newton sa dokázal odpútať od dovtedajších predsudkov a okrem svojich troch zákonov sformuloval aj gravitačný zákon, ktorým ukázal, že rovnako, ako Zem pôsobí na všetky jablká, pôsobia na seba navzájom i veľké nebeské telesá ako sú planéty našej Slnečnej sústavy (a hviezdy, galaxie atď.)

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{1.1}$$

kde m_1 a m_2 sú hmotnosti[1] telies, r je ich vzájomná vzdialenosť a G je univerzálna gravitačná konštanta. Záporné znamienko označuje fakt, že gravitačná interakcia je vždy príťažlivá.

Z Galileiho pokusov a neskoršej formulácie transformácie súradníc medzi rôznymi vzťažnými sústavami pohybujúcimi sa navzájom konštantnou rýchlos-

[1] V newtonovskej mechanike nie je potreba rozlišovať zotrvačnú hmotnosť (definovanú druhým Newtonovým zákonom), ani aktívnu (určuje silu poľa, ktoré táto hmota vytvára.) a pasívnu (určuje, ako na túto hmotu pôsobí externé pole) gravitačnú hmotnosť

ťou nesúcej jeho meno bolo jasné, že absolútna vzťažná sústava neexistuje. Nahradil ju pojem inerciálnej vzťažnej sústavy, v ktorej sa voľné častice buď pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom, alebo zotrvávajú v pokoji.

1.1 Newtonove Zákony

1.1.1 Prvý Newtonov Zákon

Prvý Newtonov zákon je zákonom zotrvačnosti. Jeho znenie je: "Teleso zotrvá-va v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe, pokým naň nepôsobí výsledná sila." V dnešnej dobe tento zákon interpretujeme ako definíciu inerciálnych vzťažných sústav.

1.1.2 Druhý Newtonov Zákon

Druhý Newtonov zákon matematicky popisuje zmenu stavu telesa o hmotnosti m, na ktoré pôsobí sila $\mathbf{F}$ ako časovú zmenu jeho hybnosti: $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}$. Toto je definícia sily ako fyzikálnej veličiny. Takto definovaná sila je trojrozmerným vektorom v euklidovskom priestore a je invariantná voči Galileovej transformácii.

Druhý Newtonov zákon teda hovorí, že sila udeľuje telesám zrýchlenie, ktoré je úmerné ich hmotnosti. Pre sústavu dvoch interagujúcich telies silové pôsobenie prebieha zmenou hybnosti jednotlivých telies - informáciu o tom, ako takáto interakcia prebieha, podáva tretí Newtonov zákon.

Inerciálne vzťažné sústavy neponúkajú žiadne nečakané pozorovania, naproti tomu pozorovanie udalosti (silového pôsobenia dvoch telies) v rôznych vzťažných sústavách začne byť zaujímavé, keď dovolíme sústavám neinerciálny pohyb. Je zrejmé, že ak pre popis situácie zvolíme sústavu, ktorá sa pohybuje so zrýchlením, bude toto zrýchlenie odrazené na výslednej sile, ktorú zmeriame (vo výslednej sile sa prejavia všetky sily, ktoré skúmanému telesu dodávajú zrýchlenie). Môže sa nám teda stať, že pri popise pokusu dospejeme napríklad k výsledku, že výsledná sila na predmet je vo zvolenej vzťažnej sústave nulová, kým v inej vzťažnej sústave nulová byť nemusí.

1.1.3 Tretí Newtonov Zákon

Tretí Newtonov zákon je zrejme najznámejším fyzikálnym zákonom. Táto skutočnosť je spôsobená úderným názvom (Zákon akcie a reakcie) a jednoduchým znením: Ku každej akcii existuje rovnako veľká a opačne orientovaná reakcia. Ukazuje sa však, že za zdanlivo triviálnou definíciou sa skrýva veľmi dôležitý a často nesprávne pochopený princíp.

Identifikácia situácie vhodnej na aplikáciu tretieho Newtonovho zákona môže byť komplikovaná najmä v systémoch s mnohými telesami a ich vzájomnými interakciami. Častou chybou je nesprávny záver, že tretí Newtonov zákon hovorí, že sily pôsobiace na teleso sa vyrušia. Nesprávnosť záveru spočíva v tom, že tretí Newtonov zákon popisuje sily pôsobiace na dve rôzne telesá, no o vyrušení pôsobiacich síl môžeme hovoriť len v prípade, že popisujeme silové pôsobenie na jedno teleso.

Predstavme si knihu ležiacu na stole. Sila, ktorou pôsobí Zem na knihu je F_{KZ} a reakciou na ňu je sila, ktorou kniha pôsobí na Zem F_{ZK}. Druhým párom síl akcie a reakcie sú kniha pôsobiaca na stôl silou F_{SK} a stôl pôsobiaci na knihu silou F_{KS}. Fakt, že kniha nezačne padať smerom ku stredu Zeme je spôsobený rovnosťou veľkostí síl F_{KZ} a F_{KS}. Tieto dve sily pôsobia na ten istý objekt, knihu, a keďže ich veľkosť je rovnaká a smer pôsobenia je opačný, sily sa navzájom vyrušia a kniha sa nebude pohybovať.

Z príkladu je ihneď vidno, že ak by sme odstránili stôl, kniha by sa vplyvom sily F_{KZ} začala pohybovať so zrýchlením $g_K = GM/r^2$ a takisto Zem by sa vplyvom sily F_{ZK} začala pohybovať so zrýchlením $g_Z = Gm/r^2$. Za predpokladu, že zvolenou knihou bude Møllerova kniha The Relativity Theory, 1952, ktorej hmotnosť je približne $1kg$, a hmotnosť Zeme vezmeme ako $6 * 10^{24}kg$, budú udelené zrýchlenia v pomere $1 : 6 * 10^{-24}$ v prospech Møllerovej knihy.

Druhý Newtonov zákon popisuje zmeny spojené s pohybom telesa, na ktoré pôsobí známa sila F, tretí zákon zase umožňuje porovnať pôsobenie danej sily na dve rôzne telesá. Hmotnosti telies a im udelené zrýchlenia sú spojené nepriamou úmerou a silové efekty v situáciach, na ktoré možno aplikovať tretí Newtonov zákon, sú teda vždy lepšie viditeľné na menej hmotnom telese.

V prípade, že do systému dvoch interagujúcich telies pridáme ďalšie teleso, ktoré s nimi neleží na jednej priamke, nie je už možné vyhlásiť, že sily, ktorými na seba teleso B a teleso C pôsobia, sú rovnaké, pretože na obe pôsobí i teleso C. Každú silu ale vieme rozdeliť na časti pochádzajúce z pôsobenia jednotlivých telies. Tretí Newtonov zákon sa teraz uplatní pri porovnávaní

zložiek síl pôsobiacich na jednotlivé telesá od zvyšných telies v systéme.

Za zjednodušujúceho predpokladu, že systém tvoria len dve častice, ktoré na seba pôsobia silami $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$, žiadne vonkajšie sily nie sú prítomné, a zmena hybnosti $\mathbf{p}_1$ prvej častice sa rovná záporne vzatej zmene hybnosti druhej častice $\mathbf{p}_2$ potom platí

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\right)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.3}$$

a teda v systéme, kde na telesá nepôsobia iné ako ich vzájomné sily, sa hybnosť sústavy zachováva. I v prípade systému viacerých telies sa dá ukázať platnosť zákona zachovania hybnosti, keď uvážime, že zmena hybnosti prvého telesa pôsobením druhého telesa je presne kompenzovaná zmenou hybosti druhého telesa v dôsledku pôsobenia telesa prvého. Všetky vnútorné sily systému sa vyrušia a hybnosť celej sústavy sa zachováva.

V newtonovskej mechanike sa objavuje ešte jeden veľmi dôležitý princíp. Stavia na druhom Newtonovom zákone a dáva tak možnosť vyjadriť pohybové rovnice systému a zároveň v sebe zahŕňa i popis väzbových síl prítomných v systéme. Nazýva sa D'Alembertov princíp a podrobnejšie sa ním budeme zaoberať v podkapitole 1.3.

1.2 Newtonove zákony v relativistickej teórii

Newtonovskú mechaniku nemôžeme použiť pre popis každej sústavy [2]. Problémy nastávajú hlavne vtedy, keď sa skúmané pohybujúce sa telesá začínajú rýchlosťami signifikantne približovať rýchlosti svetla, vtedy je potrebné nahradiť newtonovskú mechaniku Einsteinovou Špeciálnou teóriou relativity.

Prvý Newtonov zákon prechádza do relativistickej teórie hladko, k druhému Newtonovmu zákonu sa zavádza modifikácia v podobe zavedenia kľudovej hmotnosti m_0 pomocou $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{v}$, potom hmotnosť m je chápaná ako relativistická hmotnosť telesa a je závislá na rýchlosti, ktorou sa dané teleso pohybuje. V newtonovskej mechanike je relativistická hmotnosť rovná kľudovej hmotnosti. Landau v The Classical Theory of Fields, 1975 relativistickú hmotnosť nezavádza a pracuje len s pojmom kľudovej hmotnosti, čo dodáva jeho práci na prehľadnosti.

[2] O limitnom prípade z hľadiska kvantovej fyziky nebudeme v tejto práci uvažovať.

V lagrangeovskej formulácii mechaniky je zavedenie sily trochu problematickejšie. Jej definícia je tu totiž závislá na predpokladoch kladených na kinetickú a potenciálnu energiu systému, a občas by sa mohlo zdať, že sila je v tom-ktorom prípade definovaná práve takým spôsobom, aby dala súhlas s Newtonovými pohybovými rovnicami. Týmto spôsobom môže v prípade veľmi všeobecného zadania problému nastať v definícii sily zmätok.

Ďalšia zmena pre druhý Newtonov zákon nastáva v Einsteinovej relativite, kde sila je definovaná vo všeobecnej geometrii, a to ako kovariantná derivácia hybnosti, ktorá sa prirodzene redukuje na druhý Newtonov zákon v prípade, že priestor, v ktorom ju popisujeme, nie je zakrivený. Relativistické vyjadrenie sily je štvorvektorom a je invariantné voči Lorentzovej transformácii (teda ak je sila nulová resp. nenulová v nejakej vzťažnej sústave, je potom nulová resp. nenulová v každej inej sústave). Takto definovaná štvorsila popisuje správne silové interakcie i medzi telesami pohybujúcimi sa rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla, čo má význam pre použitie tretieho Newtonovho zákona.

Pre tretí Newtonov zákon je významný i Einsteinov postulát konečnej rýchlosti šírenia svetla. Newton vo svojej teórii predpokladal, že interakcie sú okamžité, Einstein ukázal, že to tak nie je. Predstavme si, že do existujúceho systému telies vložíme nové teleso. Po dobu potrebnú k prenosu tejto informácie musíme zahrnúť do rozboru nielen jednotlivé telesá ale i pole sústavy, pretože i na ňom prebiehajú zmeny. Vhodnejšie ako silovým pôsobením je popisovať situáciu cez zmenu hybnosti sústavy. Výhodným popisom je potom popis pomocou tenzoru energie-hybnosti, kde okrem telies nesie hybnosť i pole.

Problematickou časťou prechodu tretieho zákona do relativistickej teórie môže byť jeho prepojenosť s väzbami. Pri popisoch v newtonovskej mechanike sa väzbami zaoberá podrobnejšie D'Alembertov princíp, istým spôsobom je možné väzby zapojiť i do Lagrangeovej formulácie mechaniky (obmedzenie pohybu častice obmezdením počtu stupňov voľnosti), no v Einstenovej relativite sa s výnimkou Møllera[3] nikto problémom príliš nezaoberá.

[3]Møller v The Relativity Theory, 1952 uvádza akúsi "relativistickú" verziu D'Alembertovho princípu, podrobnejšie sa budeme zaoberať v časti 3.2.

1.3 D'Alembertov princíp

D'Alembertov princíp je podrobne rozobraný v Horský, Novotný, Štefaník, Mechanika ve fyzice, 2001, tu len zhrnieme hlavné myšlienky.

Nech je daná sústava N hmotných bodov, ktorých kartézske súradnice označíme $x_i = (x_1, y_1, z_1; ...; x_N, y_N, z_N)$, pretože každý z hmotných bodov je popísaný tromi súradnicami, index i bude nadobúdať hodnoty $1, .., 3N$. Priestor, ktorý popisujeme súradnicami x_i budeme označovať P^{3N}.

Newtonove pohybové rovnice v priestore P^{3N} môžeme popísať ako

$$m_i a_i = F_i + R_i \tag{1.4}$$

pre $i = 1, 2, ..3N$, kde a_i je výsledné zrýchlenie, s ktorým sa hmotný bod v danej súradnici pohybuje, F_i je vtisknutá sila a R_i je väzbová sila. Ľavú stranu rovnice je rovnako dobre možné písať ako $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$ vyjadrujúc zmenu hybnosti častice vplyvom pôsobenia vtisknutých a väzbových síl.

Ďalej uvažujme r väzobných podmienok $f_A(x_i, t) = 0$, pre $A = 1..r$, z ktorých každá vymedzuje väzobnú nadplochu v P^{3N}. V každom bode môžeme gradientom väzobnej podmienky vytvoriť vektor $\frac{\partial f_A}{\partial x_i}$, a ďalej vybrať vektor δx_i, ktorý je kolmý k väzobnej nadploche a teda aj na všetky gradienty väzobných plôch a spĺňa podmienku $\frac{\partial f_A}{\partial x_i}\delta x_i = 0$. Vektor tejto vlastnosti sa nazýva vektor virtuálneho posunutia.

Pre jednoduché väzby platí, že sily spôsobené väzbami sú kolmé na väzbové plochy a teda aj k virtuálnym posunutiam. Označme virtuálne posunutie v trojrozmernom systéme $\delta\mathbf{r}$ a pre väzbovú silu $\mathbf{R} = \lambda \mathrm{grad} f$, kde λ je ľubovoľná konštantná funkcia, môžeme písať $\mathbf{R}\delta\mathbf{r} = 0$, teda virtuálna práca väzbových síl je nulová.

D'Alembertov princíp vyjadruje požiadavku, aby pre všetky virtuálne posunutia platilo $\sum_i (F_i - m_i a_i)\,\delta x_i = 0$, čo bolo získané vynásobením (1.4) virtuálnym posunutím δx_i a sčítaním cez všetky i.

Ak by systém nebol podrobený väzbám, boli by virtuálne posunutia na sebe nezávislé a mohli by sme prejsť na systém Newtonových rovníc

$$F_i - m_i a_i = 0. \tag{1.5}$$

Ak ale posunutia nie sú nezávislé, potom pravá strana predchádzajúceho výrazu nebude nulová, a bude vyjadrovať koeficienty väzbovej sily R_i.

Plynulým pokračovaním môžeme prejsť na lagrangeovskú formuláciu mechaniky, keď z D'Alembertovho princípu ďalej odvodíme Lagrangeove rovnice prvého a druhého druhu.

Kapitola 2

Lagrangeovská mechanika

Rozbor lagrangeovskej mechaniky je dostupný v mnohých učebniciach, nasledovný postup sleduje knihu Landau, Mechanics, 1993.

Lagrangeovská mechanika popisuje stav systému na základe pohybových rovníc odvodených z jeho kinetickej a potenciálnej energie a robí tak použitím zovšeobecnených súradníc q. Vyberme si popis systému pomocou Lagrangeových rovníc 2.druhu. Pred samotným odvodením pohybových rovníc si ešte zadefinujeme Lagrangeovu funkciu častice L, ktorá je daná ako rozdiel jej kinetickej T a potenciálnej U energie danej častice

$$L = \sum_{i,k} \frac{1}{2} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q), \tag{2.1}$$

kde kinetická energia je daná $T = \sum_{i,k} \frac{1}{2} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k$ a potenciálna energia je funkciou súradníc $U = U(q)$.

Pohybové rovnice systému je možné odvodiť z princípu najmenšieho účinku. Pre jednoduchosť zvolíme systém s jedným stupňom voľnosti, odvodenie pre s stupňov voľnosti prebieha rovnakým spôsobom pre každý z nich. Nech je daná funkcia $L(q, \dot{q}, t)$, ktorá úplne popisuje stav systému. Systém sa v čase vyvíja z t_1 do t_2 a prechádza z q_1 do q_2 a to tak, že účinok S funkcie L, daný jej integrálom cez časový interval $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t$, nadobúda minimálnu hodnotu. Princíp najmenšieho účinku dostaneme variáciou integrálu

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \right) \mathrm{d}t = 0. \tag{2.2}$$

Variácie sa zbavíme dosadením $\delta\dot{q}^i = \frac{\mathrm{d}\delta q^i}{\mathrm{d}t}$ a integrovaním per partes, výsledkom

je

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q \mathrm{d}t = 0. \tag{2.3}$$

Aby princíp platil, integrand musí byť nulový, teda $\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0$. Pohybové rovnice majú potom tvar

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{2.4}$$

kde q^i je i-ta súradnica.

Ďalej sa dá ukázať, že za istých podmienok je možné z Lagrangeových pohybových rovníc odvodiť druhý Newtonov zákon. Za predpokladu, že kinetická energia systému je daná súčtom

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 \tag{2.5}$$

a potenciálna energia je funkciou súradníc $U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 ...)$, potom je možné odvodiť pohybové rovnice systému častíc

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}. \tag{2.6}$$

Dosadením lagrangiánu do pohybových rovníc dostaneme ich jednoduchší tvar

$$-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} = m_a \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_a}{\mathrm{d}t}, \tag{2.7}$$

kde ľavá strana rovnice $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ je vektorom sily, ktorá pôsobí na a časticu a jej dosadením môžeme vzťah (2.8) interpretovať ako druhý Newtonov zákon. Pohybové rovnice v tomto tvare sa nazývajú Newtonove pohybové rovnice.

Zavedenie väzieb (podložky, pružiny, závesy atď.) by mohlo čiste mechanický problém previesť vznikom trenia v styčných bodoch na problém komplikovanejší. Ak zanedbáme trenie o podložku a takisto predpokladáme, že závesy a pružiny sú nehmotné, potom nám väzby iba obmedzia počet stupňov voľnosti a pohyb systému môžeme i teraz popísať rovnicou (2.1), ale pre redukovaný počet súradníc.

Popis situácie v zovšeobecnených súradnicach má ďaľšiu výhodu v tom, že tvar Lagrangeovej funkcie je nezávislý na voľbe vzťažnej sústavy. Popis z viacerých vzťažných sústav vyžaduje len zmenu parametrov ako rýchlosť, dĺžka apod. a dáva rovnaké výsledky. Riešenie, ktoré z Lagrangeovej funkcie získame, je jednoznačným riešením problému.

2.1 Definícia sily v lagrangeovskej mechanike

Problematike sily sa ešte chvíľu budeme venovať. Pokiaľ sa zaujímame o situácie, kedy potenciál je závislý na rýchlosti, stretávame sa v literatúre s dvoma definíciami sily.

V predchádzajúcom odstavci boli odvodené pohybové rovnice pre systém častíc a sila na ne pôsobiaca bola definovaná pomocou derivácie potenciálu podľa súradnice

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{2.8}$$

V podkapitole 4.1 je naznačený Landauov prístup z The Classical Theory of Fields, 1975, pre post-newtonovskú aproximáciu, v ktorej je sila definovaná

$$\mathbf{F}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_a. \tag{2.9}$$

Landau tu používa vlastne tú istú definíciu sily ako v nerelativistickom prípade a to napriek tomu, že v nerelativistickom prípade ukladá ako podmienku závislosť potenciálu iba na súradnici, čo zrejme v post-newtonovskej aproximácii nesplnil.

V publikácii Horský, Novotný, Štefaník, Mechanika ve fyzice, 2001 je definícia sily iná a to

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}, \tag{2.10}$$

kde $U = U(\dot{x}_k, x_k, t)$ je zovšeobecnená potenciálová funkcia a potenciálna energia, ktorá nezávisí na rýchlosti, je jej špeciálnym prípadom. Táto definícia sily dá napríklad pri riešení pohybových rovníc nabitej častice v elektrickom poli správnu hodnotu sily, kým Landauova definícia by viedla k výrazu, ktorý zahŕňa len časť Lorentzovej sily.

V relativistickej teórii sa Møller v The Relativity Theory (1952) konkrétne zaujíma o gravitačnú silu K_i a uvádza

$$K_i = -\frac{\partial L}{\partial x^i}, \tag{2.11}$$

kde L je relativistická Lagrangeova funkcia definovaná vzťahom (4.9).

Invernov variačný prístup ku klasickej mechanike v Introducing Einstein's Relativity, 1992 pracuje v zovšeobecnených súradniciach x^μ a zavádza zovšeobecnenú rýchlosť $\dot{x}^\mu$. Kinetická energia je potom $T = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ a potenciálna energia je znovu závislá iba na polohe, $U = U(x)$ a dáva vznikať zovšeobecneným silám $F_\mu = -\frac{\partial U}{\partial x^\mu}$. Pohybové rovnice nachádzame potom v tvare $\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = F^\mu$. Inverno ešte podáva kovariantnú verziu druhého Newtonovho zákona

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{2.12}$$

kde p^μ je štvorhybnosť, ktorú získame z lagrangiánu $p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial x^\mu}$.

Definícia hybnosti sa zákonite musí v týchto prístupoch líšiť.

Celkovo sú teda bežné dva spôsoby definovania sily a k nej príslušnej hybnosti a to buď

$$\mathbf{F_I} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}; \qquad \mathbf{p_I} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \mathbf{v}}, \tag{2.13}$$

alebo

$$\mathbf{F_{II}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}}; \qquad \mathbf{p_{II}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}. \tag{2.14}$$

Keďže vtisknutá a väzbová sila sú pevne spojené D'Alembertovým princípom, otázkou zostáva, aký vplyv majú rozdielne definície sily na silu väzbovú. Vychádzajúc z (1.4), kde ľavú stranu nahradíme časovou zmenou hybnosti, väzbovú silu dostaneme ako

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{F} = \mathbf{R}. \tag{2.15}$$

Dosadením za hybnosť a silu z prvej definície a následným rozpísaním dostávame

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p_I}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{F_I} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial (T - U)}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial (T)}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial (U)}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p_{II}}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{F_{II}}.$$

Z toho pre príslušné väzbové sily plynie $\mathbf{R_I} = \mathbf{R_{II}}$. Podarilo sa nám teda ukázať, že väzbová sila nie je ovplyvnená definíciou sily.

Kapitola 3

Relativistická mechanika

Dôsledkom newtonových pohybových rovníc je fakt, že fyzikálne javy sa dejú rovnako vo vzťažných sústavách v pokoji ako v rovnomerne priamočiaro sa pohybujúcich sústavách. Toto si všimol už Newton a tým vlastne prišiel na princíp relativity. Einstein vytvoril svoju teóriu relativity ako odpoveď na nezrovnalosť v newtonovskej mechanike pri popise vysokých rýchlostí.

3.1 Špeciálna teória relativity

Špeciálna teória relativity vznikla z dôvodu nedostatočnosti newtonovskej mechaniky pre popis vysokých rýchlostí. Jej dvoma základnými postulátmi sú

- Všetci inerciálni pozorovatelia sú ekvivalentní
- Rýchlosť svetla je rovnaká v každej inerciálnej vzťažnej sústave

Posledným úderom teórii éteru bolo práve potvrdenie druhého postulátu špeciálnej teórie relativity experimentom Michelsona a Morleyho.

Aby teória spĺňala všetky požiadavky, ktoré na ňu boli kladené, bolo potrebné, aby vyhovovala nejakej modifikovanej Galileovej transformácii, ktorá by umožnila popisovať javy v rôznych vzťažných sústavách. Takou transformáciou je Lorentzova transformácia (ako Lorentz ukázal pri vyriešení problému s Maxwellovými rovnicami). Einstein v tejto myšlienke pokračoval a prepísal druhý Newtonov zákon tak, aby bol tento voči Lorentzovej transformácii invariantný (zavedením Lorentzovho faktoru gama $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$)

a získal známu formulu pre vzťah relativistickej m a kľudovej m_0 hmotnosti

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.1}$$

Z Lorentzovej transformácie vyplývali popri náraste hmotnosti pri približovaní sa rýchlosti svetla ďalšie dôležité následky ako kontrakcia dĺžky a dilatácia času.

Špeciálna teória relativity v sebe zahŕňa aj najslávnešiu rovnicu fyziky, zákon ekvivalencie energie a hmoty

$$E = mc^2. \tag{3.2}$$

Jednou z najdôležitejších zmien, ktorá sa udiala, je zmena pohľadu na priestor, v ktorom sa odohrávajú všetky deje. Do Einsteina sa fyzika popisovala v trojdimenzionálnom priestore a separátne od neho existoval čas. Einstein zaviedol priestoročas, kde priestor a čas sú neoddeliteľné. Nový spôsob popisu prešiel od vektorov k štvorvektorom, ktoré pridávajú časovú zložku, teda každá udalosť je popísaná súradnicami t, x, y, z.

3.1.1 Špeciálna Lorentzova transformácia

Lorentzova transformácia je transformácia súradníc vyplývajúca zo vzájomného pohybu dvoch vzťažných sústav. Je relativistickým rozšírením Galileovej transformácie.

Špeciálna Lorentzova transformácia udáva, akým spôsobom sa transformujú súradnice pri prechode popisu zo sústavy S do sústavy S'. Obe sústavy S i S' boli v čase $t = t_0$ v ľubovoľne zvolenom počiatku. Sústava S' sa začne vzhľadom k S pohybovať rýchlosťou v. Pre popis javu, ktorý sa v starej sústave S odohral v mieste priestoročasu popísanom súradnicami t, x, y, z je potrebné nájsť nové čiarkované súradnice t', x', y', z'. Lorentz ukázal, že transformačné vzťahy sú

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{3.3}$$

Transformácia času okrem dilatácie času predkladá ďalší problém a to problém súčasnosti dvoch javov. Z tohto ďalej vyplýva potreba synchronizácie hodín.

3.2 Všeobecná teória relativity

Všeobecná teória relativity je postavená tak, aby spĺňala nasledovné požiadavky:

- princíp ekvivalencie
- princíp všeobecnej kovariancie
- princíp minimálneho gravitačného pôsobenia
- korešpondenčný princíp

Všeobecná teória relativity tak ako špeciálna relativita pracuje so štvorveličinami, tj. štvorrýchlosťou, štvorhybnosťou, štvorzrýchlením atď. Tieto veličiny majú štyri zložky: jednu časovú a tri priestorové.

Predpokladajme, že častica sa v priestoročase pohybuje po krivke, ktorú môžeme popísať súradnicami $x^\mu = (x^i, ct)$, kde i nadobúda hodnoty priestorových indexov[1]. Štvorrýchlosť U^μ [2] a štvorhybnosť P^μ sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} U^\mu &= \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \\ P^\mu &= \mathring{m}_0 U^\mu, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde $\mathring{m}_0$ je vlastná hmotnosť častice, tj. kľudová hmotnosť, ktorú by sme zmerali v lokálnom inerciálnom systéme súradníc. Lokálny inerciálny systém súradníc je taký súradnicový systém, pre ktorý sú v danom bode koeficienty konexie nulové. Vzťah kľudovej a relativistickej hmotnosti je daný

$$m = \mathring{m}_0 \Gamma = \mathring{m}_0 \left[\left\{ \left(1 + \frac{2\chi}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_k u^k}{c} \right\}^2 - \frac{u^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.5}$$

kde faktor Γ je zovšeobecnený Lorentzov faktor.

Keďže naším hlavným záujmom budú sily, je potrebné objasniť si koncept štvorsily vo všeobecnej teórii relativity. Teória hovorí, že voľná častica je taká

[1] Konzistentne s prvou a druhou kapitolou pokračujeme v jednotnom značení: rímska abeceda prebieha priestorové indexy, grécka abeceda priestorové a časový index.

[2] Rovnako by bolo možné definovať veličiny v kovariantných indexoch, ale keďže prevod medzi kovariantným a kontravariantným vyjadrením je veľmi jednoduchý, $P^\mu = g^{\mu\nu} P_\nu$, obmedzíme sa v texte len na jednu formuláciu.

častica, na ktorú nepôsobia iné sily okrem síl gravitačných. Pre takúto časticu potom platí

$$F^\rho = \frac{\mathrm{D}P^\rho}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}P^\rho}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} U^\mu P^\nu = 0. \tag{3.6}$$

Rozpísaním tohto výrazu dostaneme pohybové rovnice[3] pre voľnú časticu v danom externom gravitačnom poli (=rovnice geodetiky). V prípade, že výsledkom výpočtu podľa tohto vzťahu nie je nula, je v systéme prítomná sila iného pôvodu ako gravitačného[4], napríklad coulombovské pôsobenie apod.

Neznámou vo vzťahu pre výpočet štvorsily zostáva veličina $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, ktorá je spojená so vzťažnou sústavou/typom priestoročasu - tento môžeme popísať metrikou a koeficienty gama, Christoffelove symboly, sú potom koeficientami konexie spojenej s metrikou, určené definičným vzťahom

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right). \tag{3.7}$$

Otázkou zostáva, ako určiť gravitačnú silu, ktorú cíti častica pri pobyte v externom gravitačnom poli.

Zaveďme dynamické gravitačné potenciály γ_i a χ.

Prepíšeme (3.4) na trojrozmerné vektorové rovnice veličiny $p^i = mu^i$ a to tak, že za predpokladu časovej závislosti hybnosti $p_i = p_i(t)$ môžeme skonštruovať nový priestorový vektor

$$\frac{\mathrm{d}_c p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} - \gamma_{l,ik} u^k p^l = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\gamma_{kl}}{\mathrm{d}t} u^k p^l, \tag{3.8}$$

kde index c označuje kovariantnú deriváciu vzťahujúcu sa k metrickému tenzoru γ_{ik} určenému

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i \gamma_k, \tag{3.9}$$

[3]Ako bolo spomenuté v prvej kapitole, okrem popisu sústavy z pohľadu silového pôsobenia v nej môžeme k získaniu pohybových rovníc použiť všeobecnejší prístup využívajúci zákony zachovaní: zákon zachovania energie a zákon zachovania hybnosti. Vo všeobecnej teórii relativity sú zákony zachovania energie a hybnosti vyjadrené pomocou tenzoru energie-hybnosti a pohybové rovnice potom dostaneme ako jeho derivácie: $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$.

[4]Okrem Møllera sa problematike externých síl venuje krátko i Stephani v General relativity, 1990

kde vektorový potenciál γ_i je daný

$$\gamma_i = \frac{g_{i4}}{\sqrt{-g_{44}}}. \tag{3.10}$$

Z toho vidíme, že (3.4) v priestorových indexoch prejde na

$$\frac{\mathrm{d}_c p_i}{\mathrm{d}t} = K_i = mG_i, \tag{3.11}$$

kde G_i je priestorový vektor závislý na dynamických gravitačných potenciáloch (γ_i, χ) a ich prvých deriváciách. Ak $p_i = mu_i(t)$ interpretujeme ako hybnosť častice, potom K_i je gravitačná sila pôsobiaca na časticu.

Konštanta úmernosti m bola vyššie definovaná ako zotrvačná hmotnosť, a podľa (3.11) je i gravitačnou hmotnosťou[5] častice. Pre časticu v pokoji sa hmotnosť redukuje na $m_0 = \frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1+2\chi/c^2}}$. Tu m_0 je kľudová hmotnosť častice v gravitačnom poli.

Gravitačná sila K_i je vo všeobecnosti komplikovaným výrazom potenciálov, ich derivácií, rýchlosti častice a jej zrýchlenia. Existuje však špeciálny prípad, kedy sila nadobúda jednoduchý výraz, a tým je situácia, kedy je súradnicový systém časovo-ortogonálny – potenciály γ_i sú nulové. Potom priestorová časť rovníc z (3.4) je identická s (3.7) keď položíme

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \\ \mathbf{K} &= m\mathbf{G} = -m\,\mathrm{grad}\chi. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Gravitačná sila vyvstávajúca zo skalárneho gravitačného potenciálu je totožná s Newtonovým gravitačným zákonom, a platí pre ľubovoľne silné polia a všetky rýchlosti. Ďalej, ak $\gamma_i = 0$, hmotnosť pre relativistickú časticu sa zredukuje na

$$m = \frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{3.13}$$

Podrobnejšie sa budeme zaoberať porovnávaním zložiek newtonovskej sily a zložiek štvorsily. Priestorové zložky štvorvektoru nie sú tvorené jednoducho

[5] Túto skutočnosť považoval Einstein za dôležitý argument v prospech všeobecnej teórie relativity, pozri Møller, The Relativity Theory, 1952.

príslušným trojdimenzionálnym vektorom, na veličinu známu z nerelativistickej fyziky štvorsilu prevedieme nasledujúcim vzťahom:

$$F_\mu = \left\{ \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{(\mathbf{f}.\mathbf{u})/c}{\sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}}} \right\}, \tag{3.14}$$

kde χ je skalárny gravitačný potenciál.

Teória väzieb je obmedzená na Møllerovu "relativistickú" verziu D'Alembertovho princípu v The Relativity Theory, 1952. Sily gravitačného pôvodu K_i sú brané ako vtisknuté sily, väzbovými silami R_i sú sily negravitačného pôvodu a pohyb častice je potom popísaný kovariantnou deriváciou vektoru hybnosti $\frac{\mathrm{d}_c p_i}{\mathrm{d}t}$, teda pohyb častice podrobenej vtisknutým i väzbovým silám vyhovuje pohybovým rovniciam

$$\frac{\mathrm{d}_c p_i}{\mathrm{d}t} = K_i + R_i. \tag{3.15}$$

Pracuje sa tu so silami, na ktoré je potrebné štvorsily previesť podľa (3.14).

3.2.1 Zovšeobecnená Lorentzova transformácia

Zovšeobenená Lorentzova transformácia, odvodená v článku Burcev, 1964, je nelineárna transformácia súradníc medzi ľubovoľným systémom S, v ktorom je zadaný pohyb testovacej častice, a vzťažnou sústavou S' spojenou s testovacou časticou odvodenou v rámci všeobecnej teórie relativity. Jej špeciálnym prípadom je Špeciálna Lorentzova transformácia.

Burcev uvádza ako význačný prípad pohyb hmotného bodu v Schwarzschildovom poli. Transformačné vzťahy za zjednodušenej situácie, kedy pohyb telesa (= testovacej častice) prebieha v centrálnej rovine $\theta = \pi/2$ s polomerom $r = R$ majú tvar

$$\begin{aligned} t' &= \frac{(1-U) - \phi\omega R^2/c^2}{\sqrt{1-U-v^2/c^2}}, \\ r' &= r - R, \\ \theta' &= \theta - \pi/2, \\ \phi' &= (\phi - \omega t)\left(1 + \frac{1-\sqrt{1-v^2/(1-U)c^2}}{\sqrt{1-U-v^2/c^2}}\right), \end{aligned} \tag{3.16}$$

kde $U = 2GM/rc^2$ a $v^2 = \omega^2 R^2$, pre odvodenie a všeobecné vyjadrenie transformácií pozri Burcev, 1964.

Kapitola 4

Variačný princíp

4.1 Post-Newtonovská aproximácia

Prístup vychádza z faktu, že do aproximácie štvrtého rádu v $1/c$ je vyjadrenie Lagrangeovej funkcie presné bez zahrnutia gravitačných vĺn. Všeobecné vyjadrenie existuje len pre aproximáciu v $1/c$ do druhého rádu, čo je prvá aproximácia po Newtonovi (odtiaľ názov post-newtonovská aproximácia).

Odvodenie tejto takzvanej druhej aproximácie je napríklad v Landau, The Classical Theory of Fields, 1975, tu preto zhrnieme len podstatné výsledky. Značenie je nasledovné: pole popisujeme metrikou h so signatúrou $(+,-,-,-)$, v^i je rýchlosť v smere i, index a označuje a časticu, index 0 označuje časovú súradnicu a indexy i, k prebiehajú hodnoty priestorových súradníc. Príslušnými aproximáciami zložiek tenzoru energie-hybnosti, Ricciho tenzoru a metrického tenzoru a dosadením do všeobecného vyjadrenia Lagrangeovej funkcie pre jedno teleso

$$L_a = -m_a c \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{4.1}$$

dostaneme

$$L_a = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0i}\frac{v_a^i}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{ik}\frac{v_a^i v_a^k}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Hmotnosť m označuje kľudovú hmostnosť (pre porovnanie: je to hmotnosť, ktorú vo svojej teórii Møller označuje $\mathring{m}_0$).

Rozvojom odmocniny a vynechaním konštanty $-m_a c^2$ prejde Lagrangeova funkcia pre jedno teleso na výraz

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0i}\frac{v_a^i}{c} + \frac{1}{2c^2} h_{ik} v_a^i v_a^k - \frac{h_{00}}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2} v_a^2 \right) \quad (4.3)$$

Lagrangeovu funkciu pre celý systém nie je možné dostať jednoduchým sčítaním jednotlivých Lagrangiánov, jeho zostavenie musí byť také, aby bolo z neho možné získať správne hodnoty síl, ktoré pôsobia na každé teleso. Silu z Lagrangeovej funkcie získame zo vzťahu

$$\mathbf{K}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a} . \quad (4.4)$$

Výsledná Lagrangeova funkcia pre celý skúmaný systém potom je

$$\begin{aligned} L \;=\; & \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \left(1 + 3 \sum_b{}' \frac{G m_b}{c^2 r_{ab}} \right) + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a \sum_b{}' \frac{G m_a m_b}{2 r_{ab}} \quad (4.5) \\ & - \sum_a \sum_b \frac{G m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} \left[7 \mathbf{v}_a . \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a . \mathbf{n}_{ab}) (\mathbf{v}_b . \mathbf{n}_{ab}) \right] \\ & - \sum_a \sum_b{}' \sum_c{}' \frac{G^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}}, \end{aligned}$$

kde $r_{ab} = |r_a - r_b|$, n_{ab} je jednotkový vektor pozdĺž smeru $r_a - r_b$ a čiarkovaná suma znamená, že vynechávame člen s $b = a$ alebo $c = a$.

Tento výsledok je prekvapivý hneď z niekoľkých dôvodov. Posledný člen vyjadruje interakciu všetkých troch telies a teda pri výpočte sily dostaneme člen, ktorý nebudeme vedieť s ohľadom na tretí Newtonov zákon uspokojivo vysvetliť.

Takisto vidíme, že na jednej strane Lagrangeova funkcia závisí na relatívnych polohách, no na strane druhej je pri popise rýchlostí závislá na vzťažnej sústave. Z toho vyplýva, že ak by sme si pri výpočte sily vybrali definíciu F_{II}, nastal by problém s členmi obsahujúcimi rýchlosť.

Výslednú Lagrangeovu funkciu napriek tomu použijeme s vedomím, že problému s tretím členom sme boli ušetrení zvolením situácie o dvoch interagujúcich telesách. Ako sme si ukázali v kapitole 2 definícia vtisknutej sily nemá na väzbovú silu vplyv, teda aj v tomto zmysle môžeme ďalej Lagrangeovu funkciu používať.

4.2 Relativistická Lagrangeova funkcia

Odvodenie relativistickej Lagrangeovej funkcie je napríklad v Møller, The Relativity Theory, 1952.

Časová trajektória bodu spĺňa variačný princíp

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau = \delta \frac{1}{c} \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} \, \mathrm{d}\lambda = 0, \tag{4.6}$$

kde λ je ľubovoľný parameter. Násobením konštantným výrazom $-\mathring{m}_0 c^2$ dostaneme pre všetky variácie δx^μ, ktoré sa vynulujú pre $t = t_1$ a $t = t_2$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(\dot{x}^i, x^i, t\right) \mathrm{d}t = 0, \tag{4.7}$$

kde $\mathring{m}_0$ je vlastná hmotnosť,tj. kľudová hmotnosť meraná v lokálnom inerciálnom systéme, a to

$$m = \mathring{m}_0 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

a Lagrangián L je daný

$$L\left(\dot{x}^i, x^i, t\right) = -\mathring{m}_0 c^2 \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}. \tag{4.9}$$

Priebeh vlastného času v závislosti na súradnicovom čase je

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{u^2}{c^2}}, \tag{4.10}$$

čo je vlastne zovšeobecnený Lorentzov faktor Γ zadefinovaný v kapitole 3.

Kapitola 5

Myšlienkový experiment

5.1 Problém autíčok - zadanie

Predpokladajme, že máme k dispozícii rovnoramenné váhy a dve rovnaké autíčka tak, že môžeme váhy použiť na porovnanie hmotnosti autíčok. V situácii, kedy na váhach budú obe autíčka v pokoji, je zrejmé, že ramená váh budú v rovnovážnej polohe. Ako sa však zmení situácia, ak sa jedno z autíčok bude po miske váh pohybovať relativistickou rýchlosťou? Ktorá z misiek váh poklesne, inými slovami, ktoré z dvoch autíčok má väčšiu hmotnosť?

5.1.1 Prečo je problém autíčok paradoxom?

Špeciálna teória relativity nám na otázku dáva nasledujúcu odpoveď. Vyberieme si za vzťažnú sústavu sústavu stojaceho autíčka. Hmotnosť stojaceho autíčka je teraz rovná jeho kľudovej hmotnosti m_0. Potom relativisticky sa pohybujúce autíčko má hmotnosť $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ a čím je jeho rýchlosť bližšia rýchlosti svetla, tým je jeho hmotnosť väčšia. Poklesne teda miska s relativistickým autíčkom.

V Špeciálnej teórii relativity však neexistuje žiadna absolútna vzťažná sústava, preto na posúdenie problému musí byť rovnako dobrá i vzťažná sústava spojená s relativistickým autíčkom. Teraz sa situácia obráti, relativistické autíčko sa vzhľadom k vzťažnej sústave nepohybuje a teda jeho hmotnosť je určená jeho kľudovou hmotnosťou, zatiaľ čo autíčko predtým stojace sa teraz vzhľadom k novému vzťažnému systému pohybuje rýchlosťou

blízkou rýchlosti svetla a jeho hmotnosť je rovná $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Výsledkom je, že tentokrát poklesne druhá miska – dospeli sme teda k paradoxu.

Skôr, ako pristúpime k riešeniu zadaného paradoxu, urobíme ešte malú odbočku k veľmi podobnému myšienkovému experimentu navrhnutému Suppleem v roku 1989.

5.2 Suppleeho paradox

Problém je nasledovný: predstavme si ponorku, ktorú jej posádka šikovne ponorila tak, že sa vznáša a okrem toho je ponorka vzhľadom k Zemi v pokoji. Námorníci vypustia v batiskafe pozorovateľa (batiskaf sa bude vznášať a bude v pokoji vzhľadom k Zemi) a potom začnú ponorku urýchľovať. Otázkou je, čo sa bude s ponorkou diať, keď sa jej rýchlosť priblíži rýchlosti svetla.

Ak vzťažnú sústavu spojíme s pozorovateľom v batiskafe, v ponorke by vplyvom takto vysokej rýchlosti mala nastať kontrakcia dĺžky, hmotnosť ponorky by sa zvýšila (teda gravitačná sila by bola teraz väčšia ako sila vztlaková) a ponorka by mala začať klesať ku dnu.

Posádka v ponorke však očakáva iný výsledok. Pre posádku je prirodzenou vzťažnou sústavou ponorka, teda pohybovať sa bude voda okolo nej a to každý objemový element rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla. Posádka teda predpokladá, že pre každý objemový element nastane kontrakcia dĺžky v smere pohybu, hustota jednotlivých elementov sa zvýši (čo vedie k zväčšeniu vztlakovej sily) a ponorka začne stúpať.

Prvé riešenie tohoto paradoxu podal Supplee. Toto riešenie bolo skôr kvalitatívneho charakteru, v aparáte všeobecnej teórie relativity bol problém vyriešený len nedávno, Matsas, 2003. Suppleemu bolo jasné, že paradox vyplýva z faktu, že pozorovateľ v batiskafe "cíti" iné gravitačné pole ako posádka v ponorke (inými slovami posádka v ponorke nevidí okolo seba len tiecť oceán, ale pohybuje sa i Zem pod ním a to má na výsledok nezanedbateľný vplyv).

Keďže Špeciálna teória relativity primárne nerieši problémy zahŕňajúce gravitáciu, Supplee si vypomohol jednoduchou úvahou. Testované teleso by sa chovalo rovnako padajúc voľným pádom v gravitačnom poli Zeme i uzavreté vo výťahu ďaleko od Zeme, ak by tento bol urýchľovaný so zrýchlením rovným gravitačnému zrýchleniu Zeme g. V Suppleeho riešení sa teda oceán s ponorkou pohybuje smerom nahor so zrýchlením g a okrem toho voda okolo ponorky tečie rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla. Námorníci pozorujú kon-

trakciu dĺžky objemových elementov vody prúdiacich okolo ponorky (teda ich hmotnosť sa zvyšuje), takže námorníkom sa zdá že stúpajú, no zároveň sa dno oceánu vplyvom zrýchlenia v kolmom smere z rovného mení na zakrivené a to sa deje rýchlejšie ako stúpanie ponorky. Nakoniec dno narazí zospodu na ponorku, výsledok úvahy posádky ponorky sa teda zhoduje s úvahou pozorovateľa v batiskafe a paradox je týmto odstránený.

Matsasovo riešenie je postavené na rigoróznom odvodení výsledku vo Všeobecnej teórii relativity. Vo svojom článku uvádza spôsob výpočtu výslednej sily pôsobiacej na pohybujúcu sa ponorku, a to nasledovne: výberom metriky (sústava je spojená so Zemou) a formuláciou relativistického Archimedovho zákona dostáva silu pôsobiacu na pohybujúcu sa ponorku. Vztlaková sila pôsobiaca na pohybujúcu sa ponorku sa od sily pôsobiacej na stacionárnu ponorku líši o relativistický faktor gama, teda výsledná sila je nenulová a je orientovaná smerom ku dnu a Matsasova ponorka klesá. Interpretácia výsledku je veľmi stručná, podstata problému je podľa Matsasa v tom, že posádka ponorky vníma gravitačné pole líšiace sa od poľa generovaného nepohybujúcou sa Zemou práve o Lorentzov faktor gama.

Je zaujímavé, že napriek tomu, že paradox v Špeciálnej teórii relativity vyplýva z faktu, že neexistuje privilegovaná vzťažná sústava a môžeme teda problém posudzovať z pohľadu ľubovoľného pozorovateľa, Matsas sa vo svojom výpočte obmedzil len na výpočet v sústave spojenej s nepohybujúcou sa Zemou. I vo Všeobecnej teórii relativity je veľmi dobre možné vybrať si alternatívnu vzťažnú sústavu, napríklad takú, ktorá by bola spojená s ponorkou a teda by popisovala Zem pohybujúcu sa rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla. Ak by potom aj z tohto pohľadu vyšiel rovnaký výsledok, bolo by možné bezpečne prehlásiť paradox za vyriešený.

5.3 Riešenie paradoxu autíčok vo Všeobecnej teórii relativity

Problémom riešenia pomocou Špeciálnej teórie relativity je neuváženie zmeny situácie vplyvom pohybu váh. Ak sa váhy pohybujú relativistickou rýchlosťou, musia sa nejakým spôsobom meniť i ony samotné a teda i spôsob, ako vážia. Tiež v sústavách pohybujúcich sa navzájom relativistickou rýchlosťou nastáva problém pri vyjadrení silových interakcií. Ako bolo písané v kapitole 1 (druhý Newtonov zákon) sila je závislá na rýchlosti, rovnosť síl v jednej

sústave nezaručuje rovnosť síl v sústave inej, ak sa tieto vzájomne pohybujú a teda z tohto pohľadu by sa na paradoxnom riešení mohol podieľať i Tretí Newtonov zákon.

Ďalším prístupom k riešeniu problému je Všeobecná teória relativity, je však najprv potrebné si zadanie 'preložiť' do vhodného jazyka.

Máme dve rovnaké testovacie telesá A a B o hmotnosti m v gravitačnom poli Zeme. Teleso A sa vzhľadom k Zemi nepohybuje, leží v pokoji na podložke, kým teleso B sa vzhľadom k Zemi pohybuje po podložke rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla (smer rýchlosti je kolmý k spojnici telesa so Zemou).

Keďže ani jedno z telies nemôžeme prehlásiť za voľné (problém obsahuje väzbu na podložku), môžeme vypočítať ako gravitačnú silu pôsobiacu na obe telesá, tak i silu, ktorou na každé z telies pôsobí podložka.

Postupujeme podľa kapitoly 3.

Najprv vyjadríme pôsobenie podložky. Využijeme prirodzené výhody tvaru Zeme a budeme pole, ktoré vytvára, popisovať Schwarzschildovou metrikou

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}^2} + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right), \qquad (5.1)$$

v maticovom zápise

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right) & & & \\ & \frac{1}{1-\frac{2GM}{rc^2}} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)} & & & \\ & 1-\frac{2GM}{rc^2} & & \\ & & \frac{1}{r^2} & \\ & & & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \qquad (5.2)$$

Nenulové koeficienty konexie pre Schwarzschildovu metriku sú

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= -\Gamma^r_{rr} = \frac{GM}{r^2c^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)}, \\ \Gamma^r_{tt} &= \frac{GM}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -r\sin^2\theta\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right),\\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -r\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right),\\
\Gamma^\theta_{\theta r} &= \Gamma^\phi_{\phi r}=\frac{1}{r},\\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta,\\
\Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \cot\theta.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Výpočet pre testovacie teleso A

Testovacie teleso A umiestnime na povrch Zeme a jeho súradnicový čas parametrizujeme parametrom λ, teda $x^\mu = (\lambda, R, 0, 0)$. Štvorrýchlosť a štvorhybnosť spočítame pomocou vzťahu (3.4), najprv ale musíme spočítať normu rýchlosti. Dosadením zvolenej parametrizácie do metriky dostaneme

$$
ds^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{Rc^2}\right)d\lambda^2. \tag{5.4}
$$

Vieme, že veľkosť intervalu ds^2 je rovná záporne vzatému intervalu vlastného času $-c^2 d\tau^2$, teda

$$
-c^2 d\tau^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{Rc^2}\right)d\lambda^2 \tag{5.5}
$$

a po úprave konečne dostaneme

$$
\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}\ , \tag{5.6}
$$

čo je výsledok zhodný so (4.10) pre $v = 0$.

Štvorrýchlosť a štvorhybnosť stojacej častice sú potom dané ako $U^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}(1,0,0,0)$ a $P^\mu = \frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}(1,0,0,0)$.
Keďže jediné nenulové komponenty rýchlosti a hybnosti sú časové komponenty, budú vo vzťahu (3.5) indexy μ, ν brané ako t, a porovnaním so zoznamom nenulových Christoffelových symbolov zostane jediná nenulová komponenta sily zložka F^r,

$$
F^r = \Gamma^r_{tt}U^tP^t = \frac{GM}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}\frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}} \tag{5.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{2GM}{Rc^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}\frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}} \\
&= \frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}.
\end{aligned}
$$

Aby sme mohli nakoniec porovnať výsledky, je potrebné previesť silu na takú podobu, ktorú je možné zmerať. Najprv urobíme prevod na kovariantný tvar a potom prevod tejto štvorsily na silu,

$$
F_r = g_{rr}F^r = \frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{1-\frac{2GM}{Rc^2}}. \tag{5.8}
$$

Prevod na vektor sily prebehne vynásobením faktorom Γ pre $v = 0$

$$
f_r = F_r\Gamma = \frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}. \tag{5.9}
$$

r-tá zložka gravitačnej sila pôsobiacej na teleso B je podľa (3.12) rovná

$$
K_r = -\frac{GMm}{R^2} = -\frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}. \tag{5.10}
$$

Výpočet zopakujeme po vhodnej parametrizácii i pre testovacie teleso B.

Výpočet pre testovacie teleso B

Zo zadania úlohy by bolo prirodzené požadovať, aby sa bod B pohyboval po rovnej doske (akési predĺženie plochy misky váh do nekonečna), ukazuje sa však, že výpočet sa tým príliš skomplikuje a získaný výsledok nie je možné jednoducho interpretovať.

Jednoduchšie je využiť symetriu metriky a predpokladať satelitný pohyb v centrálnej rovine, teda jedna uhlová súradnica sa nebude meniť. Toto môžeme urobiť s vedomím, že polomer Zeme je dostatočne veľký na to, aby sme zakrivenú trajektóriu bodu mohli v mieste, kde sa nachádza miska váh, prehlásiť za priamku.

Súradnicový čas budeme parametrizovať ľubovoľne zvoleným parametrom α, teda $x^\mu = (\alpha, R, \omega\alpha, 0)$.

Aby sme zistili ako sa mení vlastný čas so zmenou zvoleného parametra, dosadíme príslušnú parametrizáciu do metriky

$$
ds^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{Rc^2}\right)d\alpha^2 + R^2\omega^2 d\alpha^2 \tag{5.11}
$$

a takto vzniknutý dĺžkový element položíme rovný elementu vlastného času. Potom zmena parametru v závislosti zmeny vlastného času je popísaná nasledovne:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}}. \tag{5.12}$$

Štvorrýchlosť a štvorhybnosť pohybujúcej sa častice sú potom dané ako

$$\begin{aligned} U^\mu &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}}\,(1, 0, \omega, 0) \\ P^\mu &= \frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}}\,(1, 0, \omega, 0) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Z nenulových zložiek štvorrýchlosti a štorhybnosti je ihneď vidno, že indexy μ, ν vo vzťahu (6) môžu nadobúdať hodnoty t a θ, a porovnaním so zoznamom nenulových Christoffelových symbolov zostane znovu jediná nenulová komponenta sily zložka F^r,

$$\begin{aligned} F^r &= \Gamma^r_{tt} U^t P^t + \Gamma^r_{\theta\theta} U^\theta P^\theta \\ &= \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}} \frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}} \\ &\quad -r\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}} \frac{\mathring{m}_0\omega}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}} \\ &= \left(\frac{GM\mathring{m}_0}{R^2} - \mathring{m}_0\omega^2 R\right) \frac{\left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}\right)}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

V ďalších výpočtoch sa budeme zaoberať už len prvou časťou sily, ktorá je gravitačného pôvodu. Znova v rámci potreby porovnania výsledkov, je potrebné previesť kontravariantné na kovariantné zložky

$$F_r = g_{rr} F^r = \left(\frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\right) \frac{1}{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}} \tag{5.15}$$

a štvorsilu na silu

$$\mathbf{f} = \left(\frac{GM\mathring{m}_0}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}}, 0, 0\right). \tag{5.16}$$

r-tá zložka gravitačnej sila pôsobiacej na teleso B je podľa (3.12) rovná

$$K_r = -\frac{GMm}{R^2} = -\frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}}. \tag{5.17}$$

Keď teraz poznáme silu, ktorou na testovacie telesá A a B pôsobí Zem a i silu, ktorou na ne pôsobí podložka, bolo by v rámci záujmu o tretí Newtonov zákon potrebné zistiť, akou silou pôsobia testovacie telesá A a B na Zem a na podložku.

Vezmime si najprv jednuduchší prípad telesa A. Vytvorenie situácie, kedy teleso A bude teleso budiace pole a Zem bude testovacím telesom by viedlo na výpočet analogický k (5.10). V tomto výpočte sa však používa aproximácia, ktorá zanedbáva silové pôsobenie poľa na generujúci objekt. To by znamenalo, že by sme sa pokúšali zistiť, ako na obrovské teleso (Zem), ktorého pole zanedbávame, pôsobí maličké teliesko (autíčko), ktorého pole je voči poľu Zeme zanedbateľné. Takýto prístup samozrejme nemôže viesť k správnemu výsledku.

Ak by sme teda chceli určiť silu, akou na Zem pôsobí autíčko, museli by sme príslušné výpočty urobiť bez tejto aproximácie.

Posledným bodom pre rozriešenie paradoxu je výpočet sily, ktorou Zem a autíčka pôsobia na seba v sústave spojenej s autíčkom B.

Problém bol doteraz riešený konzistentne so všeobecne zaužívaným prístupom, že riešenia vo Všeobecnej teórii relativity nevedú na paradoxy a je postačujúce preto problém riešiť v súradnicovej sústave, kde je vyjadrenie najjednoduchšie. To je zrejme i dôvod, prečo je paradox v Matsasovej práci riešený len vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou.

Ak by sme chceli byť dôslední, potom by tento výpočet prebiehal podobne ako predchádzajúce výpočty s malou obmenou, kedy by síce teleso generujúce pole bola Zem, no pozerali by sme sa na situáciu z autíčka B.

Je teda potrebné pretransformovať súradnicový systém vhodnou transformáciou a ďalšie výpočty už prebehnú rovnako ako (5.11)-(5.17). Použiť je možné buď zovšeobecnenú Lorentzovu transformáciu, alebo aproximovať situáciu tak, aby bolo možné použiť špeciálnu Lorentzovu transformáciu.

Keďže použitie oboch transformácií je výpočetne príliš náročné na manuálne počítanie, bol použitý program Maple. Varovanie autorov, že pri komplikovaných transformáciách program zadanú úlohu nemusí zvládnuť sa vyplnilo a výsledok som v tejto vzťažnej sústave nezískala.

5.4 Riešenie v post-newtonovskej aproximácii

Ďalšou možnosťou, ako sa s paradoxom vysporiadať, je post-newtonovská aproximácia. Tento prístup zahŕňa odvodenie Lagrangeovej funkcie pre systém telies a z nej potom výpočet sily (podľa kapitoly 4).

Vo všeobecnom vyjadrení Lagrangiánu

$$\begin{aligned} L &= \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}\left(1+3\sum_b{}' \frac{Gm_b}{c^2 r_{ab}}\right) + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a \sum_b{}' \frac{Gm_a m_b}{2r_{ab}} \\ &- \sum_a \sum_b \frac{Gm_a m_b}{4c^2 r_{ab}} \left[7\mathbf{v}_a.\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a.\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b.\mathbf{n}_{ab})\right] \\ &- \sum_a \sum_b{}' \sum_c{}' \frac{G^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}} \end{aligned} \tag{5.18}$$

posledný člen z dôvodu dvojtelesového systému neuvažujeme.

Keďže Lagrangeova funkcia je odvodená pre zovšeobecnené súradnice, je možné použiť toto v ľubovoľnej vzťažnej sústave. Problém posúdime ako vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou, tak i vo vzťažnej sústave spojenej s testovacím telesom B.

Výpočet vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou

Pre výpočet vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou ďalej preznačíme $r_{ab} = r$, $m_a = m$, $m_b = M$ a rýchlosť v_b, ktorá prislúcha pohybu Zeme, je nulová.

Lagrangeova funkcia pre testovacie teleso A (rýchlosť v_a je takisto nulová) je rovná

$$L = \frac{GMm}{r}. \tag{5.19}$$

Derivovaním potom získame silu v mieste $r = R$

$$K_r = -\frac{GMm}{R^2}. \tag{5.20}$$

Lagrangeova funkcia pre teleso B (kde rýchlosť $v_a = v$) je daná

$$L = \frac{mv^2}{2}\left(1+\frac{3GM}{rc^2}\right) + \frac{mv^4}{8c^2} + \frac{GMm}{r}. \tag{5.21}$$

Zem pôsobí na testovacie teleso B v mieste $r = R$ silou

$$K_r = -\frac{GMm}{R^2}\left(1 + \frac{3v^2}{2c^2}\right). \tag{5.22}$$

Tento výsledok má dva limitné prípady, a to keď sa rýchlosť testovacieho telesa B blíži nule (prípad testovacieho telesa A), alebo rýchlosti svetla.

$$\begin{aligned} \lim_{v\to 0} f_r &= -\frac{GMm}{R^2}, \\ \lim_{v\to c} f_r &= -\frac{5}{2}\frac{GMm}{R^2}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Výpočet vo vzťažnej sústave spojenej s testovacím telesom B

Pre výpočet vo vzťažnej sústave spojenej s testovacím telesom B preznačíme $r_{ab} = r$, $m_a = m$, $m_b = M$ a nakoniec rýchlosť $v_b = v$, keďže v tejto sústave je to Zem, ktorá sa pohybuje. Lagrangeova funkcia pre testovacie teleso A (rýchlosť $v_a = v$) je rovná

$$L = \frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r}\frac{v^2}{c^2}. \tag{5.24}$$

Derivovaním potom získame silu v mieste $r = R$

$$K_r = -\frac{GMm}{R^2}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{5.25}$$

Lagrangeova funkcia pre teleso B (kde rýchlosť $v_a = 0$) je daná

$$L = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{3GM}{rc^2}\right) + \frac{mv^4}{8c^2} + \frac{GMm}{r}. \tag{5.26}$$

Sila pôsobiaca na testovacie teleso B v mieste $r = R$ je potom

$$K_r = -\frac{GMm}{R^2}\left(1 + \frac{3v^2}{2c^2}\right). \tag{5.27}$$

Sily, ktorými na Zem pôsobia testovacie telesá, budú vypočítané analogicky. V Lagrangeovej funkcii zámenou m a M sa síce objaví zmena v kinetických členoch, tie ale do výrazu pre silu neprispievajú, a konečné výsledky sú Teleso A pôsobí na Zem v mieste $r = R$

$$K_r = -\frac{GMm}{R^2} \tag{5.28}$$

a teleso B pôsobí na Zem v mieste $r = R$

$$K_r = -\frac{GMm}{R^2}\left(1 + \frac{3v^2}{2c^2}\right). \tag{5.29}$$

5.5 Riešenie pomocou relativistickej Lagrangeovej funkcie

Posledný prístup k riešeniu je urobiť predchádzajúce výpočty i s relativistickou Lagrangeovou funkciou, ktorá je matematicky exaktným vyjadrením situácie.

Výpočet bude prebiehať podľa kapitoly 4.

Pre testovacie teleso A nebude ani vlastná hmotnosť, ani závislosť súradnicového času na vlastnom čase obsahovať rýchlosť, Lagrangeova funkcia sa teda zredukuje na

$$L\left(\dot{x}^\iota, x^\iota, t\right) = -\mathring{m}_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}. \tag{5.30}$$

Silu z Lagrangeovej funkcie získam zo vzťahu

$$K_r = \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = -\frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}\frac{GM}{R^2}, \tag{5.31}$$

kde $\mathring{m}_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{GM}{R}}}$ predstavuje kľudovú hmotnosť v gravitačnom poli.

Výpočet pre testovacie teleso B rýchlosť obsahovať bude, Lagrangeova funkcia teda zostáva

$$L\left(\dot{x}^\iota, x^\iota, t\right) = -\mathring{m}_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{5.32}$$

Sila je potom

$$K_r = -\frac{\mathring{m}_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2} - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{GM}{R^2}. \tag{5.33}$$

Oba tieto výsledky sa vzťahujú k súradnicovému systému spojenému so Zemou.

Kapitola 6

Diskusia výsledkov

V tejto kapitole sú zhrnuté a interpretované výsledky postupov a výpočtov popísaných v piatej kapitole.

Prístup cez aparát Všeobecnej teórie relativity

Uvedené sú výsledky získané vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou.

Situácia pre testovacie teleso A je nasledovná:

- Väzbová sila R_i je rovná $f_r = \frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}$ a predstavuje silu, ktorou na testovacie teleso A pôsobí podložka.
- Vtisknutá sila F_i je rovná $K_r = -\frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}$ a predstavuje silu, ktorou na testovacie teleso pôsobí Zem.
- Väzbová a vtisknutá sila sú v rovnováhe, na teleso A nepôsobí výsledná sila a teleso sa v smere kolmom na podložku nepohybuje.

Situácia pre testovacie teleso B je:

- Väzbová sila R_i je rovná sile $f_r = \frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}}$ a predstavuje silu, ktorou na testovacie teleso A pôsobí podložka.
- Vtisknutá sila F_i je rovná $K_r = -\frac{GM\mathring{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}}$ a predstavuje silu, ktorou na testovacie teleso pôsobí Zem.

- Väzbová a vtisknutá sila sú v rovnováhe, na teleso B nepôsobí výsledná sila a teleso sa v smere kolmom na podložku nepohybuje.

Spojením oboch výsledkov vidíme, že sila, ktorou pôsobí Zem na testovacie teleso B je väčšia ako sila, ktorou pôsobí na teleso A a poklesne teda miska pod testovacím telesom B.

Takto získaný výsledok súhlasí i s Matsasovým výsledkom pre Suppleeho paradox.

Overenie výsledku v sústave spojenej s testovacím telesom B sa ukázalo výpočtovo príliš náročné a napriek použitiu výpočtového programu Maple neprinieslo výsledok.

Post-Newtonovská aproximácia

V post-newtonovskej aproximácii boli vypočítané sily, ktorými na testovacie telesá pôsobí Zem a i sily, ktorými pôsobia na Zem testovacie telesá. Vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou boli výsledky nasledovné:

- Sila, ktorou Zem pôsobí na testovacie teleso A, je rovná $K_r = -\frac{GMm}{R^2}$.
- Sila, ktorou Zem pôsobí na testovacie teleso B, je rovná $K_r = -\frac{GMm}{R^2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$.

Pozorovateľ v tejto sústave by čakal, že miska klesne pod testovacím telesom B.

Vo vzťažnej sústave spojenej s testovacím telesom B boli výsledky nasledovné:

- Sila, ktorou Zem pôsobí na testovacie teleso A, je rovná $K_r = -\frac{GMm}{R^2}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$.
- Sila, ktorou Zem pôsobí na testovacie teleso B, je rovná $K_r = -\frac{GMm}{R^2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$.

I pozorovateľ v tejto sústave by čakal, že miska klesne pod testovacím telesom B.

Výsledok je jednoznačný, miska klesne pod testovacím telesom B. Vidíme, že problém bol naozaj spôsobený skutočnosťou, že testovacie teleso v poli pohybujúceho sa telesa "cíti" iné pole ako v prípade, že teleso generujúce pole sa nepohybuje.

Prístup cez relativistickú Lagrangeovu funkciu

Cez relativistickú Lagrangeovu funkciu boli vypočítané sily, ktorými Zem pôsobí na testovacie telesá.

- Sila, ktorou Zem pôsobí na testovacie teleso A, je rovná $K_r = -\frac{GM\hat{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}}}$.
- Sila, ktorou Zem pôsobí na testovacie teleso B, je rovná $K_r = -\frac{GM\hat{m}_0}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}}$.

Pozorovateľ v tejto sústave čaká, že miska klesne pod testovacím telesom B.

Výsledok súhlasí s výsledkom získaným všeobecne-relativistickým prístupom, tiež súhlasí s Møllerovým záverom zhrnutým v (3.12).

Celkové riešenie paradoxu sa nám získať podarilo. Kvalitatívne vidíme zo všetkých troch prístupov, že väčšiu hmotnosť má autíčko pohybujúce sa relativistickou rýchlosťou. Kvantitatívne však výsledky medzi sebou nesedia.

V post-newtonovskej aproximácii získavame člen 3/2, kým vo všeobecne-relativistickej teórii i cez relativistickú Lagrangeovu funkciu by po Taylorovom rozvoji vznikla v korekčnom člene len 1/2.

Výsledky získané všeobecne-relativistickým prístupom a cez relativistickú Lagrangeovu funkciu súhlasia a to zrejme i preto, že boli konzistentne použité prístupy od jedného autora, Møller, The Relativity Theory, 1952.

Faktor 3/2 z post-newtonovskej aproximácie v Landau, The Classical Theory of Fields, 1975, je zase v súhlase s Missnerom, Thornom a Wheelerom, Gravitation, 1973.

V prístupoch k riešeniu problému cez Lagrangeove funkcie získavame gravitačnú interakciu telesa s telesom generujúcim pole. Problémom je určenie väzby, t.j. sily, ktorou pôsobí na teleso podložka. Teória väzieb nie je v relativite rozpracovaná, preto v nej nemôžeme urobiť žiadne prehlásenia ohľadom tretieho Newtonovho zákona.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali platnosťou Newtonových zákonov v relativistickej teórii. Ukázali sme, že prvé dva zákony uspokojivo do teórie relativity prechádzajú a identifikovali sme úskalia prechodu pre tretí Netonov zákon.

O ďalšiu analýzu problému sme sa pokúsili na konkrétnom probléme, ktorý je v Špeciálnej teórii relativity paradoxom. Paradox spočíva v odpovedi na otázku, ktoré z dvoch vážených autíčok má väčšiu hmotnosť, či to, ktoré stojí na miske váh v kľude, alebo to, ktoré sa po miske váh pohybuje relativistickou rýchlosťou? Otázka je tu vlastne otázkou o veľkosti pôsobiacich síl medzi autíčkami a Zemou.

Tu sme si najprv zaviedli teoretický podklad pre riešenie a potom sme podrobným rozborom situácie ukázali jej riešenie troma rôznymi metódami a to riešenie v aparáte Všeobecnej teórie relativity, v Post-newtonovskej aproximácii a nakoniec za pomoci relativistickej Lagrangeovej funkcie.

Riešenie problému sme určili jednoznačne v Post-Newtonovskej aproximácii, kde výsledok bolo možné porovnať v oboch kľúčových vzťažných sústavách. Vo všeobecno-relativistickom prístupe a za pomoci relativistickej Lagrangeovej funkcie sme výsledok, ktorý je kvalitatívne v zhode s Post-newtonovskou aproximáciou, získali len v jednej zo vzťažných sústav. Rozriešením paradoxu teda je fakt, že na testovacie telesá pohybujúce sa relativistickými rýchlosťami pôsobia v poli daného telesa väčšie sily, ako na telesá, ktoré sú v danom poli v kľude.

Nezodpovedanou zostáva otázka tretieho Newtonovho zákona. V literatúre sa problému žiaden priestor nevenuje, o silách sa uvažuje len zriedkavo, poväčšine sa kladie dôraz na pohybové rovnice pre testovacie telesá, ktoré nie sú podrobené iným silám ako gravitačným. Overenie tretieho Newtonovho zákona požaduje i dobrý spôsob popisu väzieb, ktorý v relativistickej mechanike nie je rozpracovaný. Bolo by zaujímavé ďalej sa problémom zaoberať a zistiť, koľko vody z pomyselného Newtonovho vedierka Einstein naozaj vylial.

Literatúra

Møller, C., *The Relativity Theory.* Oxford University Press, 1952

Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *The Classical Theory of Fields.* Elsevier, 1975

D'Inverno, R. *Introducing Einstein's Relativity.* Oxford University Press, 1992

Horský, J., Novotný, J., Štefaník, M. *Mechanika ve fyzice.* Academia, 2001

Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Mechanics.* Butterworth-Heinemann, 1993

Einstein, A. *Teorie relativity.* VUTIUM, 2005

Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky 1.* Fragment, 2000

Zajac, R., Chrapan, J. *Dejiny fyziky.* skriptá MFF UK, 1986

Matsas, George E. A. *Relativistic Arquimedes law for fast moving bodies and the general-relativistic resolution of the "submarine paradox"* . Phys. Rev. D 68, 027701, 2003

Burcev, P. *Generalised Lorentz Transformation.* Czechoslovak Journal Of Physics, Vol. 14, No. 11, November, 1964

Missner, Charles W., Thorne, Kip S., Wheeler, John A. *Gravitation.* W. H. Freeman and Company, 1973

Stephani, H. *General relativity.* Cambridge University Press, 1990

Kuchař, K. *Základy obecné teorie relativity.* Academia, Praha, 1968

Votruba, V. *Základy speciání teorie relativity.* Academia, Praha, 1968