Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Základní matematické metody ve fyzice I.

Bakalářská práce

2006 Libuše Tesařová

Prohlašuji, že jsme bakalářskou práci *Základní matematické metody ve fyzice I.* vypracovala samostatně s použitím uvedených pramenů.

V Brně 15. května 2006 ....

Obsah

Úvod

Na úvod této práce bych ráda citovala slova Richarda P. Feynmana, nositele Nobelovy ceny za fyziku:

> *„Pro ty, kdo neznají matematiku, je obtížné porozumět skutečnému pocitu nad nejhlubší krásou přírody. Chcete-li se dozvědět něco o přírodě a obdivovat ji, musíte porozumět jazyku, kterým mluví."*
>
> (R.P. Feynman, O povaze fyzikálních zákonů)

Nejefektivnějším popisem přírody je popis matematický. Přírodní zákony samy mají matematickou podobu, proto se přednášky základního kurzu fyziky bez matematiky neobejdou. Už od prvního semestru se studenti odborné, aplikované i učitelské fyziky v přednáškách z mechaniky setkávají s pojmy derivace a integrálu, diferenciálu a kmenové funkce, diferenciální rovnice, matice a vektoru, gradientu, rotace, divergence, atd. Přednášky z matematické analýzy a algebry však k některým z nich dospějí až mnohem později.

Co potom zbývá studentovi? Je téměř nemožné nastudovat z literatury a do hloubky pochopit tyto pojmy během jediného semestru. Studenti je pak obvykle chápou „intuitivně" a vzorce si zapamatují jako „obrázek".

Předměty Základní matematické metody ve fyzice I. a II. jsou zaměřeny právě na vysvětlení některých matematických pojmů, jejich cílem je také naučit studenta s nimi pracovat v míře dostatečné pro první ročník studia fyziky. Předměty patří k nejzapisovanějším v prvním ročníku oborů studijního programu Fyzika. Jsou zde přednášeny základní pojmy a metody aplikované matematiky s důrazem na jejich použití při řešení fyzikálních úloh. Sylabus obsahuje kapitoly z algebry, matematické analýzy, geometrie i diferenciálních rovnic. Jak lze vyčíst z každoroční studentské ankety, problémem v tomto oblíbeném předmětu je nedostatečnost literatury. Studenti kombinované formy studia nemají k dispozici žádný volně dostupný text, který by obsahově zahrnoval celý sylabus přednášky.

Cílem této práce je vytvoření učebního textu k přednáškám, který bude volně k dispozici studentům na internetových stránkách. Snažím se, aby tento text byl stručný a srozumitelný, ale přesto matematicky korektní. V textu jsou definovány pouze ty pojmy, které se objevují v přednáškách z fyziky a formulována pouze tvrzení, která budou studenti potřebovat v prvních několika semestrech. Text není zatížen zdlouhavými důkazy ani velkým množstvím definic, neboť se předpokládá, že v budoucnu studenti absolvují kompletní základní matematický kurz a dospějí k hlubšímu pochopení pojmů a souvislostí. Naopak, důraz je kladen na aplikaci a výpočetní praxi, proto je text doplněn příklady a cvičeními. Každý čtenář, který zvládne předchozí text, by měl být schopen dané příklady vyřešit či vypočítat.

První kapitola obsahuje základní pojmy integrálního počtu a popisuje některé integrační metody. K jejímu napsání byla použita hlavně literatura [2], [3] a [4]. V kapitole 2 jsou popsány základy vektorové algebry v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$, matice, determinanty, lineární závislost a nezávislost vektorů. Bylo použito poznatků z knih [5], [7], [14]. Třetí kapitola zahrnuje křivkový integrál, parametrizaci křivek a hlavně fyzikální charakteristiky lineárních útvarů. K vytvoření této části posloužila převážně literatura [7], [11] a [13].

Při tvorbě této bakalářské práce jsem předpokládala běžné matematické a fyzikální znalosti, se kterými by měl být student seznámen na střední škole. Text byl vysázen systémem LaTeX.

autor

Kapitola 1

Integrace funkce jedné proměnné

V této kapitole se budeme zabývat integrálním počtem funkce jedné proměnné a rozebereme metody řešení integrálů.

1.1 Neurčitý integrál

Hledání neurčitého integrálu (primitivní funkce) je opačný proces k určování derivace.

Definice 1.1. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f na otevřeném intervalu I, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.

Poznámka. Ne každá funkce má primitivní funkci.

Věta 1.1. Nechť funkce F je nějaká primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Pak $\{F + C, C \in \mathbb{R}\}$ je množina všech primitivních funkcí k funkci f na I.

Definice 1.2. Množina $\{F + C, C \in \mathbb{R}\}$ se nazývá *neurčitý integrál* z funkce f na I a značí se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in I$.

Ze znamých vztahů pro derivaci elementárních funkcí plynou ihned tyto vzorce:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C\ .$$

Věta 1.2. Nechť f, g jsou funkce definované na intervalu I a nechť F je primitivní funkce k funkci f, G primitivní funkce k funkci g na I. Pak je $F + G$ primitivní funkce k $f + g$ na I.

Věta 1.3. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak je $c \cdot F$ primitivní k $c \cdot f$ na I.

1.2 Základní integrační metody

1.2.1 Metoda per partes

Věta 1.4. Nechť na intervalu I existují $u', v', \int u'v$. Pak

$$\int uv' = uv - \int u'v \qquad \text{na } I.$$

Příklad 1. Odvoďte vztah pro integrovaní metodou per partes přes derivaci součinu.

$$\begin{aligned}(uv)' &= uv' + u'v\\ \int (uv)' &= \int uv' + \int u'v\\ uv &= \int uv' + \int u'v\\ \int uv' &= uv - \int u'v\end{aligned}$$

Příklad 2. Vypočtěte následující integrál pomocí metody per partes.

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{llll} u & = \mathrm{e}^x & v' & = \sin x \\ u' & = \mathrm{e}^x & v & = -\cos x \end{array} \right| = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{llll} u & = \mathrm{e}^x & v' & = \cos x \\ u' & = \mathrm{e}^x & v & = \sin x \end{array} \right| = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \ ;$$

$$\begin{aligned} 2\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x + C_1 \ , \\ \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C_2 \ . \end{aligned}$$

Příklad 3. Vypočtěte následující integrál pomocí metody per partes na intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\int \operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = \operatorname{arccotg} x & v' = 1 \\ u' = -\frac{1}{x^2+1} & v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arccotg} x + \int \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x =$$

$$= x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \ .$$

Příklad 4. Vypočtěte následující integrál pomocí metody per partes na intervalu $(0, \infty)$.

$$\int \sqrt{x} \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & v' = \sqrt{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{array} \right| = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x - \frac{2}{3}) + C \ .$$

1.2.2 Metody substituční

Věta 1.5. Nechť I, J jsou otevřené intervaly, funkce $g : I \to J$ má derivaci g' na intervalu I, funkce $f : J \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci F na intervalu J. Pak platí:

1. $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(t)) + C \quad ; \quad t \in I.$
2. Jestliže funkce g je ryze monotónní (tj. rostoucí nebo klesající), $g(I) = J$ a existuje primitivní funkce $K(t)$ k funkci $f(g(t))g'(t)$ na intervalu I, pak
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = K(g^{-1}(x)) + C \quad ; \quad x \in J\ .$$

Poznámka. Pokud označíme $x = g(t)$ a zapíšeme derivaci funkce g jako podíl diferenciálů ve tvaru $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t)$, pak formálním vynásobením výrazu $\mathrm{d}t$ dostaneme $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$.

První substituci lze pak názorně zapsat ve tvaru (po přeznačení proměnných):

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} g(x) & = t \\ g'(x)\mathrm{d}x & = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= F(t) + C = F(g(x)) + C\ ,$$

což zdůvodňuje zavedená značení.

Podobně pro druhý typ substituce píšeme:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} x & = g(t) \\ \mathrm{d}x & = g'(t)\mathrm{d}t \\ g^{-1}(x) & = t \end{array} \right| = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= K(t) + C = K(g^{-1}(x)) + C\ .$$

Příklad 5. Vypočtěte následující integrál pomocí první substituční metody.
$$\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \sin x & = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x & = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C\ .$$

Příklad 6. Vypočtěte následující integrál pomocí první substituční metody.
$$\int (x+1)^5\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} x+1 & = t \\ \mathrm{d}x & = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^5\mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}(x+1)^6 + C\ .$$

Příklad 7. Vypočtěte následující integrál pomocí první substituční metody.
$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} -x^2 & = t \\ -2x\,\mathrm{d}x & = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + C = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C\ .$$

Integrace funkcí typu $R(\sin x, \cos x)$

U funkcí typu $R(\sin x, \cos x)$ se používá několik typů substitucí:

1. Pokud je zadaná funkce typu $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k sinu a sudá vzhledem ke kosinu, tj. platí $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$, pak zavádíme substituci $t = \cos x$.
2. Pokud je zadaná funkce typu $R(\sin x, \cos x)$ sudá vzhledem k sinu a lichá ke kosinu, tj. platí $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$, pak zavádíme substituci $t = \sin x$.
3. Pokud je zadaná funkce typu $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k sinu i kosinu, pak zavádíme substituci $t = \sin x$ nebo $t = \cos x$.
4. Pokud je zadaná funkce typu $R(\sin x, \cos x)$ sudá vzhledem k sinu i kosinu, pak zavádíme substituci $t = \operatorname{tg} x$.
5. Pokud nemůžeme využít ani jedné z výše popsaných substitucí, použijeme tzv. „univerzální substituční metodu" $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Příklad 8. Vypočtěte následující integrál pomocí substituční metody.

$$\int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \sin x & = t \\ \cos x \mathrm{d}x & = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4} t^4 + C_1 = \frac{1}{4} \sin^4 x + C_1 \,.$$

$$\int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \cos x & = t \\ -\sin x \mathrm{d}x & = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int -t(1-t^2) \mathrm{d}t = \int (-t + t^3) \mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t^4 + C_2 = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + C_2 \,.$$

Počítali jsme daný integrál pomocí dvou substitučních metod a výsledky jsou na první pohled rozlišné. Pozorný čtenář si všimne, že tomu tak není a že rozdíl je ukryt v konstantách C_1 a C_2.

Příklad 9. Upravte integrál pomocí univerzální substituční metody.

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \operatorname{tg}\frac{x}{2} & = t \\ \mathrm{d}x & = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ \frac{x}{2} & = \operatorname{arctg} t \\ \cos^2\frac{x}{2} & = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2} \\ \cos x & = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x & = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\frac{2+2t^2-2t}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int \frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(t^2+1)}\mathrm{d}t\ .$$

Goniometrické a hyperbolické substituce funkcí typu $R(\sqrt{ax^2+bx+c})$

Příklady s funkcemi typu $R(\sqrt{ax^2+bx+c})$ řešíme tak, že se snažíme doplnit funkce na „čtverec” a po vytknutí konstanty převádíme úlohu na řešení integrálu z funkce:

1. $R(\sqrt{1-x^2})$, pak volím substituci $x = \sin t$ nebo $x = \cos t$.
2. $R(\sqrt{x^2-1})$, pak volím substituci $x = \frac{1}{\sin t}$ nebo $x = \frac{1}{\cos t}$.
3. $R(\sqrt{1+x^2})$, potom je substituce $x = \sinh t$.

Příklad 10. Vypočtěte následující integrál.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} x & = \sinh t \\ \mathrm{d}x & = \cosh t \mathrm{d}t \\ t & = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \end{array} \right| = \int \frac{\cosh t}{\sqrt{\sinh^2 t + 1}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \mathrm{d}t = t + C = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C\ .$$

1.2.3 Integrace racionálních funkcí

Racionální (lomená) funkce je funkce, která se dá zapsat ve tvaru podílu dvou polynomů. Vydělením příslušných polynomů dostaneme vyjádření racionální funkce ve tvaru součtu polynomu a ryze lomené funkce - racionální funkce, ve které je stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Ryze lomenou funkci můžeme dále rozepsat na součet parciálních zlomků, což jsou racionální funkce ve tvaru:

$$\frac{A}{(x-a)^n}; \quad A, a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}; \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ p^2-4q<0\ .$$

Podmínka $p^2 - 4q \leq 0$ znamená, že polynom $x^2 + px + q$ nemá reálný kořen.

Příklad 11. Rozložte na součet polynomu a parciálních zlomků racionální funkci

$$R(x) = \frac{x^3-7x-24}{x^2-2x-8}\ .$$

Provedeme částečné dělění:

$$R(x) = x + 2 + \frac{5x-8}{x^2-2x-8}\ .$$

Rozložíme jmenovatel na součin kořenových činitelů a kvadratických polynomů, které nemají reálný kořen:

$$R(x) = x + 2 + \frac{5x-8}{(x+2)(x-4)}\ .$$

Rozepíšeme na součet parciálních zlomků s tzv. neurčitými koeficienty:

$$R(x) = x + 2 + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4}\ .$$

Rozepsané zlomky sečteme a porovnáme s rozkládanou ryze lomenou funkcí:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{5x-8}{(x+2)(x-4)}\ .$$

Polynomy v čitatelích se musí rovnat:

$$\begin{aligned} A(x-4)+B(x+2) &= 5x-8\ , \\ Ax-4A+Bx+2B &= 5x-8\ , \\ x(A+B)-4A+2B &= 5x-8\ , \end{aligned}$$

tedy koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné jsou stejné:

$$\begin{aligned} x^1: &\quad A+B=5\ , \\ x^0: &\quad -4A+2B=-8\ . \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic je $A=3, B=2$, hledaný rozklad tedy je

$$\frac{x^3-7x-24}{x^2-2x-8}=x+2+\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-4}\ .$$

Příklad 12. Vypočtěte.

$$\int \frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=$$

$$=\left|\begin{array}{rl} x+1 & =t \\ \mathrm{d}x & =\mathrm{d}t \end{array}\right|=-\int\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t+2\cdot\frac{4}{3}\int\frac{1}{\frac{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{8}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rl} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} & =k \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x & =\mathrm{d}k \end{array}\right|=\frac{1}{t}+\frac{8}{3}\int\frac{1}{k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}k=$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}k+C=\frac{1}{x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C\ .$$

Vraťme se ještě k příkladu 17. Dopočítáme ho díky znalosti počítání s parciálními zlomky.

$$\begin{aligned} \int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x &= 4\int\frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{4t^2-4t+4}{(t^2+3)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t= \\ &=\int\frac{At+B}{t^2+3}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\int\frac{2t+4}{t^2+3}-\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t= \\ &=\int\frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t+\int\frac{4}{t^2+3}\,\mathrm{d}t-\int\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &=\ln|t^2+3|+\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{\frac{t^2}{3}+1}-\ln|t^2+1|+C= \end{aligned}$$

$$=\ln\left|\frac{t^2+3}{t^2+1}\right|+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}\right|+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C\,.$$

1.3 Příklady k procvičení

1. Vypočtěte a upravte následující integrály (pomocí per partes).

$$\int x^3 \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \qquad \left[2x^3\cos\frac{x}{2} - 12x^2\sin\frac{x}{2} + 48x\cos\frac{x}{2} - 96\sin\frac{x}{2} + C\right]$$

$$\int \mathrm{e}^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x \qquad \left[\frac{4}{26}\mathrm{e}^{2x}(\sin 3x - \frac{3}{2}\cos 3x) + C\right]$$

$$\int (x^2-2x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad \left[\frac{1}{4}(2x^2-6x+3)\mathrm{e}^{2x} + C\right]$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x \qquad [x(\ln x - 1) + C\ ;\ x\in(0,\infty)]$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C\ ;\ x\in(0,\infty)\right]$$

$$\int (x^2-x)\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \qquad \left[-2(x^2-x-8)\cos\frac{x}{2} + 4(2x-1)\sin\frac{x}{2} + C\right]\ .$$

2. Vypočtěte a upravte následující integrály (pomocí vhodné substituce).

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \left[\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C\ ;\ x\in(0,\infty)\right]$$

$$\int \operatorname{cotg} 2x\,\mathrm{d}x \qquad \left[\frac{1}{2}\ln|\sin 2x| + C\ ;\ x\in(0+k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}),\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\int \frac{2x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \qquad \left[\frac{2}{3}\ln|x^3-1| + C\ ;\ x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)\right]$$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1} + C\right]$$

$$\int \frac{4x+4}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x \qquad \left[3\sqrt[3]{(x^2+2x+2)^2}+C\right]$$

$$\int \sin^7 x \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \left[\frac{1}{8}\sin^8 x + C\right] .$$

3. Vypočtěte a upravte následující integrály (využijte nejprve metodu per partes a poté vhodnou substituci).

$$\int \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x \qquad \left[x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\right]$$

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x \qquad \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\ ;\ x \in (-1,1)\right]$$

$$\int \arccos x\,\mathrm{d}x \qquad \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C\ ;\ x \in (-1,1)\right] .$$

4. Entropie Van der Waalsova plynu je určena vztahem

$$S = \int \frac{C_v}{T}\,\mathrm{d}T + \int \frac{R}{V-b}\,\mathrm{d}V ,$$

kde R, b jsou konstanty. Určete S za předpokladu, že C_v nezávisí na teplotě.
$[S = C_v \ln T + R\ln(V-b) + C]$

Kapitola 2

Základy vektorové algebry v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

2.1 Algebra vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Ve fyzice nám zatím postačí jednoduchá a názorná představa vektoru jako uspořádané dvojice bodů v $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, jestliže pro ně definujeme algebraické operace sčítání a násobení číslem, splňující určitá pravidla. Každý bod je určen svými souřadnicemi $X = [x_1]$ v $\mathbb{R}$, $X = [x_1, x_2]$ v $\mathbb{R}^2$, $X = [x_1, x_2, x_3]$ v $\mathbb{R}^3$.

Definice 2.1. *Vázaný vektor* $\overrightarrow{XY}$ na přímce (v $\mathbb{R}$), v rovině (v $\mathbb{R}^2$) nebo v prostoru (v $\mathbb{R}^3$) je uspořádaná dvojice bodů $[X, Y]$, kde X je počáteční bod a Y je konečný bod vektoru. Dvojice totožných bodů $[X, X]$ se nazývá *nulový vázaný vektor*. *Opačným vektorem* k vektoru $\overrightarrow{XY}$ rozumíme vektor $\overrightarrow{YX}$ a píšeme $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$.

Každý vázaný vektor je charakterizován svojí délkou, směrem, orientací a umístěním; např. vektor $\overrightarrow{XY}$ a vektor $\overrightarrow{YX}$ mají stejný směr, délku, ale opačnou orientaci.

Definice 2.2. Nechť $\overrightarrow{AB}$ je vektor v $\mathbb{R}^2$, respektive v $\mathbb{R}^3$. Pro daný vektor $\overrightarrow{AB}$ zavádíme tzv. *délku vektoru* $d(\overrightarrow{AB})$ a platí

$$d(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \quad \text{v } \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$d(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \quad \text{v } \mathbb{R}^3 \ .$$

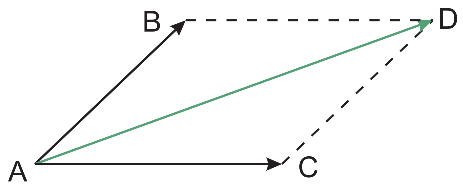
Definice 2.3. *Volný vektor* $\vec{u}$ je množina všech vázaných vektorů dané délky, směru a orientace.

Operace s vektory:

a) dva vázané vektory se stejným počátečním bodem mezi sebou můžeme sčítat (odečítat). Výsledný vektor můžeme získat buď výpočtem nebo graficky.

Příklad 13. Sečtěte dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ se stejným počátečním bodem A. Souřadnice bodů jsou $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) + (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) = \\
&= (b_1 - a_1 + c_1 - a_1, b_2 - a_2 + c_2 - a_2, b_3 - a_3 + c_3 - a_3) = \\
&= (b_1 + c_1 - 2a_1, b_2 + c_2 - 2a_2, b_3 + c_3 - 2a_3) = \overrightarrow{AD}\ , \\
\text{kde } D &= [b_1 + c_1 - a_1, b_2 + c_2 - a_2, b_3 + c_3 - a_3]\ .
\end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Součet vektorů graficky

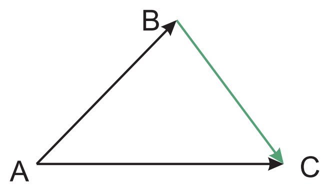
Příklad 14. Odečtěte od sebe dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ se stejným počátečním bodem A. Souřadnice bodů jsou $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) =$$

$$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) + (-c_1 + a_1, -c_2 + a_2, -c_3 + a_3) =$$

$$= (b_1 - a_1 - c_1 + a_1, b_2 - a_2 - c_2 + a_2, b_3 - a_3 - c_3 + a_3) =$$

$$= (b_1 - c_1, b_2 - c_2, b_3 - c_3) = \overrightarrow{CB}\ .$$



Obrázek 2.2: Rozdíl vektorů graficky

b) vektor můžeme násobit libovolným reálným číslem α : $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, při tom platí $d(\overrightarrow{AC}) = |\alpha| \cdot d(\overrightarrow{AB})$, vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ mají stejný směr a dále vektor $\overrightarrow{AB}$ je souhlasně orientován s vektorem $\overrightarrow{AC}$ pro $\alpha > 0$, nesouhlasně orientován pro $\alpha < 0$; jestliže $\alpha = 0$, pak $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ je nulový vektor.

Vše výše bylo popsáno pro vázané vektory. Nyní budeme pracovat s tzv. volnými vektory. Volný vektor si můžeme představit jako vázaný vektor umístěný v počátku soustavy souřadnic. (Ve skutečnosti je volný vektor množinou nekonečně mnoha vázaných vektorů stejného směru, délky a orientace. Z této množiny si vybíráme vhodného reprezentanta.) Souřadnice jeho počátečního bodu jsou nulové, souřadnice koncového bodu nazýváme složky (volného) vektoru ve standardní (kanonické) bázi a píšeme $\vec{u} = (u_1, u_2)$ v $\mathbb{R}^2$ či $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ v $\mathbb{R}^3$. Volný vektor je určen svými složkami jednoznačně. Pro operace sčítání volných vektorů a násobení volného vektoru číslem platí

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \quad \text{v } \mathbb{R}^3 ,$$

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot u_1, \alpha \cdot u_2, \alpha \cdot u_3) \quad \text{v } \mathbb{R}^3 .$$

Podobně vypadají vztahy v $\mathbb{R}^2$.

Nulový volný vektor označujeme $\vec{o}$ a platí $\vec{o} = (0, 0)$ v $\mathbb{R}^2$ a $\vec{o} = (0, 0, 0)$ v $\mathbb{R}^3$.

Věta 2.1. Nechť $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou vektory a α, β jsou reálná čísla. Pak platí:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,

b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

c) $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,

d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$,

e) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{u})$,

f) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$,

g) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$,

h) $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.

2.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů, báze

Definice 2.4. Systém vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ se nazývá *lineárně závislý*, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tak, že alespoň jedno z nich je různé od nuly a platí

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k = \vec{o}\,.$$

V opačném případě jde o *lineární nezávislost* systému.

Příklad 15. Zjistěte, zda jde o lineárně závislý nebo nezávislý systém vektorů.

$$\vec{u} = (5, -1, 2)$$
$$\vec{v} = (10, -2, 4)$$

Systém je lineárně závislý, protože platí $2 \cdot \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} = \vec{o}$.

Definice 2.5. Řekneme, že $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ je *maximálně lineárně nezávislý systém*, jestliže

a) systém je nezávislý

b) systém $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{w})$ je závislý pro libovolný vektor $\vec{w}$.

Definice 2.6. Systém $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ se nazývá *báze*, právě když každý vektor $\vec{w}$ je možno vyjádřit jednoznačně ve tvaru $\vec{w} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou reálná čísla.

Věta 2.2. Systém $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ je báze $\Leftrightarrow$ systém je maximálně lineárně nezávislý.

Poznámka. Každá báze v $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) je tvořena dvěma (třemi) vektory. Číslo určující počet vektorů v bázi nazýváme dimenzí.

Definice 2.7. Nechť $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je báze v $\mathbb{R}^3$ a vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ je vyjádřen ve tvaru $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$, pak čísla u_1, u_2, u_3 nazýváme *souřadnicemi (složkami)* vektoru $\vec{u}$ v bázi B a píšeme $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$.

Poznámka. Obecně platí, že jeden vektor má v různých bázích různé složky. Nemůžeme proto psát jen $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pokud nespecifikujeme bázi, ve které pracujeme. Ve fyzice i v tomto textu daný zápis budeme používat a implicitně budeme předpokládat, že jde o bázi kanonickou.

Příklad 16. Spočtěte $\vec{w}$ jako součet vektoru $\vec{u}$ a $\vec{v}$, kde

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 \ ,$$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \ .$$

$$\begin{aligned} w = \vec{u} + \vec{v} &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) + (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) = \\ &= (u_1 + v_1)\vec{e}_1 + (u_2 + v_2)\vec{e}_2 + (u_3 + v_3)\vec{e}_3 \ . \end{aligned}$$

2.3 Matice a determinanty

Definice 2.8. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a pro celá čísla i, j $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ jsou čísla a_{ij} reálná. Výraz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

obsahující m řádků a n sloupců se nazývá *matice* typu $m \times n$ a reálná čísla a_{ij} se nazývají *prvky matice* A. Píšeme také stručně $A = (a_{ij})$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ nebo jen $A = (a_{ij})$.

Definice 2.9. Jestliže $m = n$, nazývá se matice A *čtvercová matice.* V tomto případě číslo $m = n$ nazýváme *řádem* matice A.

Definice 2.10. Jestliže $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu m, pak se matice

$$u = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$$

nazývá *hlavní diagonála* matice A.

Poznámka. Dvě matice jsou si rovné, jsou-li stejného typu a odpovídající prvky se rovnají.

Definice 2.11. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Pro celá čísla k, l $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq m)$ položme $b_{kl} = a_{lk}$. Pak matice $B = (b_{kl})$ typu $n \times m$ se nazývá *matice transponovaná* k matici A a značí se A^T.

Příklad 17. Vytvořte matici transponovanou k matici A.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Definice 2.12. Čtvercová matice řádu n tvaru

$$\mathbf{E_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tj. matice mající v hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde nuly) se nazývá *jednotková matice* (řádu n).

Definice 2.13. Nechť $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ jsou matice stejného typu $m \times n$. Pro celá čísla i, j $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ položíme $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Matice $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$ se nazývá *součet matic* A, B a píšeme $C = A + B$.

Příklad 18. Sečtěte matice A a B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -1 & 9 & 16 \end{pmatrix} .$$

Definice 2.14. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $r \in \mathbb{R}$. Pro $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ položme $c_{ij} = r \cdot a_{ij}$ a dále nechť $C = (c_{ij})$. Matice C se nazývá *násobek matice A reálným číslem r* a píšeme $C = r \cdot A$.

Příklad 19. Vypočtěte násobek matice A s reálným číslem $r = 3$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -9 & 6 \\ 21 & 18 \end{pmatrix} .$$

Definice 2.15. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $B = (b_{kl})$ je matice typu $n \times p$ $(m, n, p \in \mathbb{N})$. Pro $1 \le i \le m, 1 \le l \le p$ položme

$$c_{il} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rl} \quad .$$

Matice $C = (c_{il})$ typu $m \times p$ se nazývá *součinem* matice A s maticí B. Píšeme $C = A \cdot B$.

Příklad 20. Vypočtěte součin matic A a B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 17 & 5 & 1 \\ 27 & 11 & 1 \end{pmatrix} .$$

Definice 2.16. Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice X s vlastností $A \cdot X = X \cdot A = E_n$ se nazývá *inverzní maticí* k matici A, značíme symbolem A^{-1}.

Jeden z postupů hledání inverzní matice si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 21. Vypočtěte inverzní matici A^{-1} k matici A, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} .$$

Vedle matice A napíšeme jednotkovou matici. Matici potom upravujeme pomocí ekvivalentních úprav (tj. přičtení k-násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), vynásobení řádku (sloupce) nenulovým číslem) tak, aby na místě matice A vznikla matice jednotková. A tak nám na místě původní jednotkové matice vznikne matice inverzní k A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 15 & -11 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} .$$

Pro naše výpočty nám zatím bude stačit znát výpočet determinantu matice nejvýše řádu 3.

Definice 2.17. *Determinant* čtvercové matice je číslo určené takto:

$\det A = a_{11}$ pro matici 1. řádu,

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ pro matici 2. řádu, značíme též

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}$$

z vyznačených šipek je patrný způsob výpočtu.

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$

$$= \begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

pro matici 3.řádu.

Věta 2.3. Determinant matice A je nulový právě tehdy, když řádky matice A jsou lineárně závislé.

Příklad 22. Vypočtěte determinant matice A, kde

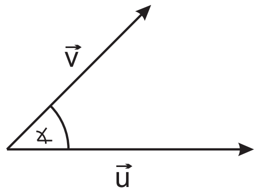
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= 1 \cdot 7 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot 5 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 7 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) \cdot 0 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 51$.

2.4 Skalární, vektorový a smíšený součin

Definice 2.18. Každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ z $\mathbb{R}^3$ je přiřazeno reálné číslo $\vec{u} \cdot \vec{v}$, které se nazývá *skalární součin* vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ a platí $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$.



Obrázek 2.3: Skalární součin

Tato definice je nezávislá na volbě báze.

Věta 2.4. Vlastnosti skalárního součinu ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou vektory a α je reálné číslo):

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,

c) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, rovnost nastane $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$,

d) $(\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$,

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 ; \quad \vec{u} \neq \vec{o} \wedge \vec{v} \neq \vec{o} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Definice 2.19. Říkáme, že dva vektory $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou vzájemně *ortogonální*, pokud $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. *Ortogonální bází* potom nazýváme množinu lineárně nezávislých vektorů, jejíž jakékoliv dva vektory mají skalární součin roven nule.

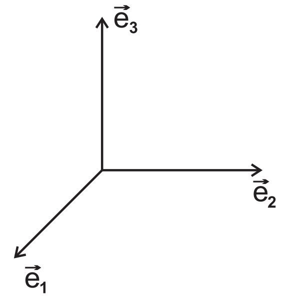
Definice 2.20. Jsou-li vektory v ortogonální bázi jednotkové délky, pak se tato báze nazývá *ortonormální*.

Příklad 23. Vektory ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$ jsou například $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$.

Poznámka. Máme-li pravotočivý šroub a budeme jím otáčet od kladného směru osy e_1 nejkratší cestou ke kladnému směru osy e_2 a bude-li se šroub přitom posouvat v kladném směru osy e_3, nazýváme takovou soustavu pravotočivou.

Změníme-li u pravotočivé soustavy smysl jedné nebo všech tří os, dostaneme soustavu levotočivou.

Příklad 24. Nakreslete souřadnicové osy pravotočivé ortonormální báze.



Platí tedy $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Pomocí pravidel uvedených ve větě 4.4 můžeme vypočítat skalární součin vektorů pomocí jejich složek v libovolné ortonormální bázi B takto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}) \cdot (v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \ .$$

Příklad 25. Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ a vypočítejte úhel α, který tyto vektory svírají. Složky vektorů jsou zadány v ortonormální bázi B.

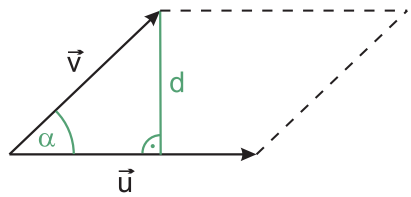
$$\vec{u} = (1, 0, 2)_B$$
$$\vec{v} = (-2, 1, 3)_B$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 4$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$
$$4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{14} \cdot \cos\alpha$$
$$\alpha \doteq 61°26'$$

Definice 2.21. *Vektorový součin* je zobrazení, které přiřazuje dvojici vektorů $[\vec{u}, \vec{v}] \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Značíme $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Pro velikost vektorového součinu platí:

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \ .$$

Vektor $\vec{w}$ je kolmý na rovinu tvořenou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Orientaci vektoru $\vec{w}$ můžeme zjistit podle pravidla pravé ruky. Jestliže přiložíme pravý ukazovák na vektor $\vec{u}$ a pravý prostředník na vektor $\vec{v}$, pak vztyčený palec udává směr vektoru $\vec{w}$.



Obrázek 2.4: Vektorový součin

$$S = |\vec{u}| \cdot d = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha = |\vec{w}|$$

Velikost vektorového součinu vyznačuje velikost plochy rovnoběžníku o stranách určených vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Věta 2.5. Vlastnosti vektorového součinu ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou vektory a α je reálné číslo):

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,

b) $(\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$,

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,

d) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Poznámka. Podle definice 4.20 platí pro pravotočivou ortonormální bázi $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$:

$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3} \ , \ \vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1} \ , \ \vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2} \ .$$

Vektorový součin můžeme spočítat v pravotočivé ortonormální bázi $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ takto:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}) \ , & \vec{u} &= (u_1, u_2, u_3)_B \ , \\ \vec{v} &= (v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}) \ , & \vec{v} &= (v_1, v_2, v_3)_B \ , \end{aligned}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}) \times (v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}) =$$
$$= u_1v_1(\vec{e_1} \times \vec{e_1}) + u_1v_2(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) + u_1v_3(\vec{e_1} \times \vec{e_3}) + u_2v_1(\vec{e_2} \times \vec{e_1}) + u_2v_2(\vec{e_2} \times \vec{e_2}) +$$
$$+ u_2v_3(\vec{e_2} \times \vec{e_3}) + u_3v_1(\vec{e_3} \times \vec{e_1}) + u_3v_2(\vec{e_3} \times \vec{e_2}) + u_3v_3(\vec{e_3} \times \vec{e_3}) =$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e_1} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e_2} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e_3} \ ,$$
$$\vec{w} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)_B \ .$$

Pro vektorový součin používáme také následujícího zápisu ve složkách :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} .$$

Příklad 26. Spočítejte vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, pokud jsou složky vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ zadány v pravotočivé ortonormální bázi B.

$$\vec{u} = (2, -5, 2)_B , \quad \vec{v} = (3, -4, 5)_B ,$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -17\vec{e_1} - 4\vec{e_2} + 7\vec{e_3} ,$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-17, -4, 7)_B .$$

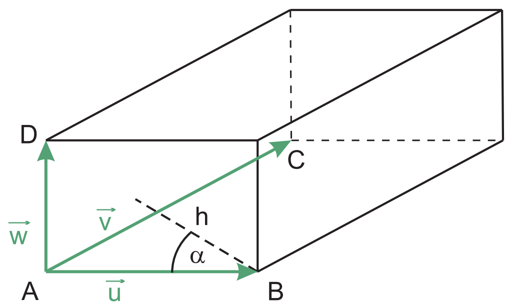
Definice 2.22. *Smíšený součin* vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ (v tomto pořadí) definujeme jako číslo $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}$ dané vztahem

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) .$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} .$$

Smíšený součin lze interpretovat geometricky jako velikost objemu rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.



Obrázek 2.5: Smíšený součin

$$V = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot h = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| \cdot |\cos\alpha| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\cos\alpha| =$$
$$= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \; .$$

Příklad 27. Určete objem čtyřstěnu s vrcholy $P = [0,0,0]$, $A = [1,0,3]$, $B = [2,1,1]$, $C = [1,-1,2]$.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= A - P = (1,0,3) \; , \\ \vec{v} &= B - P = (2,1,1) \; , \\ \vec{w} &= C - P = (1,-1,2) \; , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \; , \\ V &= |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |-6| = 6 \; . \end{aligned}$$

Definice 2.23. *Dvojitý vektorový součin* vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ (v tomto pořadí) definujeme vztahem $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Věta 2.6. Platí $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

2.5 Přechod mezi bázemi, matice přechodu

Problém transformace souřadnic v $\mathbb{R}^3$ je formulován následovně. Jsou dány báze $B = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$, $B' = (\vec{a_1}', \vec{a_2}', \vec{a_3}')$ v $\mathbb{R}^3$. Vektor $\vec{u}$ má složky u_1, u_2, u_3 v „nečárkované" bázi B. Jaké jsou složky téhož vektoru $\vec{u}$ v „čárkované" bázi B' ?

Abychom tento problém mohli řešit, musíme znát buď složky vektorů obou bází vzhledem k bázi třetí, nebo složky vektorů jedné z obou bází v bázi druhé. Jestliže zvolíme za základní bázi „nečárkovanou", pak vektory báze „čárkované" píšeme jako lineární kombinaci:

$$\begin{aligned} \vec{a_1}' &= \tau_{11}\vec{a_1} + \tau_{12}\vec{a_2} + \tau_{13}\vec{a_3} = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})_B \; , \\ \vec{a_2}' &= \tau_{21}\vec{a_1} + \tau_{22}\vec{a_2} + \tau_{23}\vec{a_3} = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})_B \; , \\ \vec{a_3}' &= \tau_{31}\vec{a_1} + \tau_{32}\vec{a_2} + \tau_{33}\vec{a_3} = (\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})_B \; , \end{aligned}$$

zkráceně $\vec{a_i}' = \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij}\vec{a_j}$.

Definice 2.24. Přechod od jedné báze ke druhé je dán maticí

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} ,$$

zvanou *matice přechodu* či *matice transformace* od báze $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ k bázi $(\vec{a_1}', \vec{a_2}', \vec{a_3}')$.

Věta 2.7. Poněvadž vektory $\vec{a_1}', \vec{a_2}', \vec{a_3}'$ jsou lineárně nezávislé, je dle kritéria lineární závislosti determinant matice T nenulový.

Podobně by se uskutečnil opačný přechod, tj. od báze „čárkované" k bázi „nečárkované", tj. $\vec{a_j} = \sum_{k=1}^{3} \tau'_{jk}\vec{a_k}'$, kde složky τ'_{jk} vektorů báze „nečárkované" v bázi „čárkované" tvoří matici T'.

Věta 2.8. Pro matici přechodu T od báze $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ k bázi $(\vec{a_1}', \vec{a_2}', \vec{a_3}')$ a pro matici přechodu T' od báze $(\vec{a_1}', \vec{a_2}', \vec{a_3}')$ k bázi $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ platí vztah

$$T \cdot T' = T' \cdot T = E \ ,$$

kde E je jednotková matice. Matice T, T' jsou navzájem inverzní.

Matice transformace T má speciální vlastnosti, jestliže obě báze, mezi nimiž se uskutečňuje přechod, jsou ortonormální. Především splňuje tzv. relaci ortogonality: v řádcích matice T totiž stojí složky ortonormálních vektorů $\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$ vzhledem k ortonormální bázi $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Platí $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij}$ a ve složkách $\sum_{k=1}^{3} \tau_{ik}\tau_{jk} = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} se nazývá Kroneckerův symbol a platí pro něj vztah:

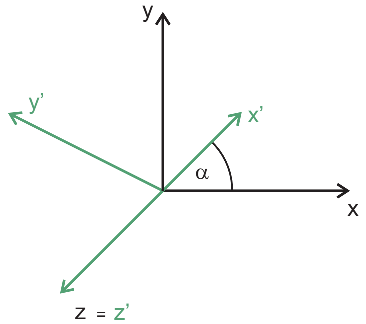
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = i \ , \\ 0 & \text{pro } j \neq i \ . \end{cases}$$

Věta 2.9. V případě ortonormálních bází platí:

$$\tau_{ij} = \vec{e_i}'\vec{e_j} = \cos\sphericalangle(\vec{e_i}', \vec{e_j}) \quad \text{a} \quad \tau'_{ji} = \vec{e_j}\vec{e_i}' = \cos\sphericalangle(\vec{e_i}', \vec{e_j}) \ ,$$

$$\text{tedy } T' = T^{-1} = T^T \ .$$

Příklad 28. Jaká je matice přechodu a transformační vztahy mezi složkami přechodu od báze $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ k bázi $(\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ (viz. obrázek), jestliže systémy $(\vec{e_i}')$, $(\vec{e_j})$ jsou ortonormální.



V ortonormální bázi platí $\tau_{ij} = \cos \sphericalangle(\vec{e_i}', \vec{e_j})$.

$$\tau_{11} = \cos\alpha \qquad \tau_{21} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \qquad \tau_{31} = 0$$

$$\tau_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \tau_{22} = \cos\alpha \qquad \tau_{32} = 0$$

$$\tau_{13} = 0 \qquad \tau_{23} = 0 \qquad \tau_{33} = 1$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Transformační vztahy:

$$\begin{pmatrix} \vec{e_1}' \\ \vec{e_2}' \\ \vec{e_3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix} .$$

2.6 Příklady k procvičení

1. Jsou dány vektory: $\vec{u} = (-3, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$, $\vec{w} = (-1, 2, 0)$ v pravotočivé ortonormální bázi. Určete:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$,

b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$,

c) lineární závislost (nezávislost) vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

[a) $(1, 7, 3)$, b) 13, c) vektory jsou lineárně nezávislé]

2. Jsou dány vektory: $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (-3, -1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ v pravotočivé ortonormální bázi. Určete:

a) $\vec{a} = -2\vec{v} + 3\vec{w}$,
b) lineární závislost (nezávislost) vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

[a) $(6, 5, -5)$, b) vektory jsou lineárně nezávislé]

3. Dokažte výpočtem ve složkách v ortonormální bázi souřadnic:
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c}) \cdot (\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d}) \cdot (\vec{b}\vec{c})$.

4. Vyřešte soustavu rovnic:

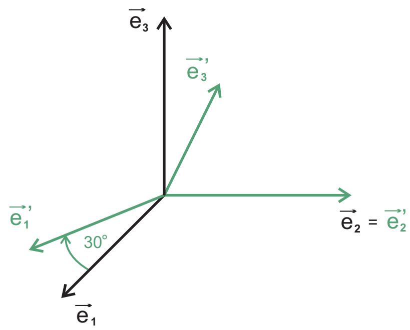
$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= -2 \\ -x + y - z &= -6\,. \end{aligned}$$

Dále u nerozšířené matice soustavy A vyjádřete A^T, A^{-1} a $\det A$.

$$[x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ \det A = 6]$$

$$\left[A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

5. Určete matici přechodu T od báze $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ k bázi $B' = (\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ a také matici přechodu T' od $B' = (\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ k $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Potom určete $\vec{a} \times \vec{b}$ v bázi B, jestliže znáte $\vec{a} = (1, 0, -1)_B$ a $\vec{b}' = (-1, 1, 1)_{B'}$.



$$\left[\vec{a} \times \vec{b} = (-1, -(\sqrt{3} + 1), 1)\right]$$

$$\left[T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad T' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right]$$

6. Najděte bázi v prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $\vec{u} = (1,2,0,1,2)$, $\vec{v} = (2,1,-1,0,2)$, $\vec{w} = (-1,0,2,3,-1)$.

[např. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$]

7. Vypočtěte součin matic A, B, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

8. V relativistické kvantové teorii jsou důležité Pauliho matice σ_i, $i = 1,2,3$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že platí vztahy $\sigma_k \cdot \sigma_l = -\sigma_l \cdot \sigma_k = i \cdot \sigma_m$ pro indexy k, l, m probíhající v cyklickém pořadí hodnoty $1, 2, 3$.

9. Závaží tíhy $7N$ je zavěšeno na dvou vláknech, která svírají se svislým směrem úhly $45°$ a $30°$. Najděte velikost sil $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, které působí na obě vlákna.

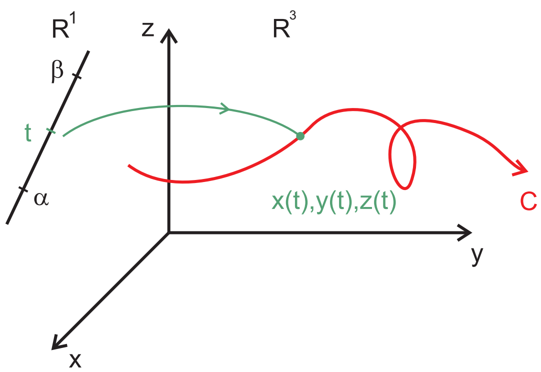
$\left[F_1 = \frac{7\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}, F_2 = \frac{14}{1+\sqrt{3}} \right]$

Kapitola 3

Křivkový integrál

Dosud jsme pracovali s integrály, jejichž integračním oborem byl libovolný interval $[\alpha, \beta]$ a integrovaný objekt funkce $f(x)$ definovaná na daném intervalu $[\alpha, \beta]$. Nyní však budeme uvažovat celou křivku $\mathcal{C}$ za integrační obor a integrovaný objekt bude funkce na otevřené množině obsahující tuto křivku $\mathcal{C}$ či vektorové pole.

3.1 Křivka a její parametrizace



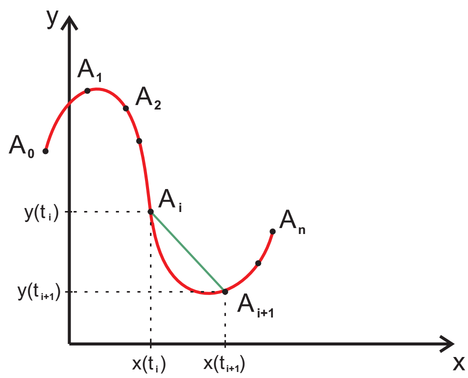
Obrázek 3.1: Parametrické vyjádření křivky

Definice 3.1. *Parametrickým vyjádřením* křivky $\mathcal{C}$ rozumíme zobrazení $\mathcal{C} : t \in [\alpha, \beta] \to \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, kde t je parametr.

Definice 3.2. Pokud existují derivace funkcí $x(t), y(t), z(t)$ pro všechny hodnoty parametru $t \in [\alpha, \beta]$, pak se křivka nazývá *hladká*.

Definice 3.3. Pokud neexistují derivace pouze v konečném počtu bodů intervalu $[\alpha, \beta]$, pak se křivka nazývá *po částech hladká.*

Rozdělme interval $[\alpha, \beta]$ takto: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Bodu t_i; $i = 0, 1, \ldots, n$, odpovídá na křivce $\mathcal{C}$ bod A_i, který je koncovým bodem vektoru $\vec{r}(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ (píšeme také $A_i = \vec{r}(t_i)$). Pro rovinnou křivku ukazuje situaci obrázek.



Obrázek 3.2: Délka křivky

Délka úsečky A_iA_{i+1} je

$$\Delta L_{i+1} = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2} =$$

$$= (t_{i+1} - t_i)\sqrt{\left[\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2 + \left[\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2 + \left[\frac{z(t_{i+1}) - z(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2}\,.$$

Délka lomené čáry $A_0A_1 \ldots A_n$ je pak dána součtem:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta L_{i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\sqrt{\left[\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2 + \left[\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2 + \left[\frac{z(t_{i+1}) - z(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2}\,.$$

Budeme-li dělění intervalu zjemňovat, tj. $n \to \infty$ nebo $t_{i+1} - t_i \to 0$, bude se délka lomené čáry blížit délce oblouku křivky $\mathcal{C}$. Při $n \to \infty$ se výrazy

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad \frac{z(t_{i+1}) - z(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

blíží derivacím funkcí $x(t), y(t), z(t)$. Definujeme proto délku oblouku $\mathcal{C}$ jako integrál

$$l(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Příklad 29. Vypočtěte délku oblouku cykloidy $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$; $t\in[0,2\pi]$, kde a je kladná konstanta. Prověřte, že tato rovinná křivka splňuje předpoklady potřebné pro možnost definovat délku oblouku vztahem $l(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

$$l(0,2\pi)=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,\mathrm{d}t=-4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a\ .$$

Příklad 30. Vypočtěte délku šroubovice $x(t)=\cos t, y(t)=\sin t, z(t)=\frac{t}{4}$ na intervalu $t\in[0,2\pi]$.

$$l(0,2\pi)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\frac{1}{16}}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{17}}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{17}}{2}\pi\ .$$

3.2 Fyzikální charakteristiky lineárních útvarů

Definice 3.4. *Křivkovým integrálem prvního typu* z funkce $f(x,y,z)$ po křivce $\mathcal{C}$ rozumíme

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t\ .$$

Hmotnost kovového drátu

Uvažujme hladkou křivku $\mathcal{C}$ a představme si, že tato křivka je zjednodušeným modelem kovového drátu. Chceme zjistit hmotnost drátu, ale víme, že lineární hustota materiálu není podél vlákna konstantní. Lineární hustotu popíšeme spojitou funkcí $\mu(\vec{r})=\mu(x,y,z)$.

Potom hmotnost drátu můžeme vypočítat vztahem

$$m(\mathcal{C})=\int_{\mathcal{C}}\mu(\vec{r})\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta \mu(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t\ .$$

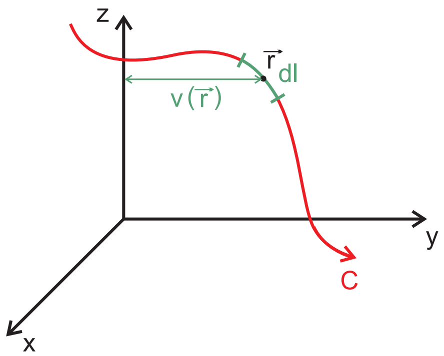
Příklad 31. Vypočtěte hmotnost přímky, kde $\mu(x,y) = x^2 + y^2, x = t,$ $y = 3t - 2, -1 \le t \le 2$.

$$M = \int_{-1}^{2} (t^2 + 9t^2 - 12t + 4) \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{2} (10t^2 - 12t + 4) \cdot \sqrt{10}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{10} \int_{-1}^{2} (10t^2 - 12t + 4)\,\mathrm{d}t = \sqrt{10} \left[\frac{10t^3}{3} - \frac{12t^2}{2} + 4t \right]_{-1}^{2} = 24\sqrt{10}\ .$$

Moment setrvačnosti křivky vzhledem k ose o

$$J(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} v^2(\vec{r})\mu(\vec{r})\mathrm{d}l =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} v^2(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mu(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t\ ,$$

kde $v(\vec{r})$ je vzdálenost bodu r na křivce od osy o.



Obrázek 3.3: Moment setrvačnosti vzhledem k ose $o = z$

Příklad 32. Vypočtěte moment setrvačnosti půlkružnice vzhledem k ose y. $\mu(x,y) = 1, x^2 + y^2 = 4, x = t, y = \sqrt{4 - t^2}, -2 \le t \le 2$.

$$J_y = \int_{-2}^{2} 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{1^2 + \frac{t^2}{4 - t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} 4 \cdot \sqrt{\frac{4}{4 - t^2}}\,\mathrm{d}t = 8 \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 4 \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{rl} \frac{t}{2} & = x \\ \frac{\mathrm{d}t}{2} & = \mathrm{d}x \end{array} \right| = 8 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 8\,[\arcsin x]_{-1}^{1} =$$
$$= 8\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 8\pi\ .$$

Těžiště křivky

$$\vec{r}_T(\mathcal{C}) = \frac{1}{m(\mathcal{C})} \cdot \int_{\mathcal{C}} \vec{r} \cdot \mu(\vec{r}) \mathrm{d}l \ .$$

Tento vztah lze rozepsat do souřadnic:

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} x \cdot \mu(x,y,z) \mathrm{d}l = \\
&= \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot \mu(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \, \mathrm{d}t \ . \\
y_t &= \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} y \cdot \mu(x,y,z) \mathrm{d}l = \\
&= \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot \mu(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \, \mathrm{d}t \ . \\
z_t &= \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} z \cdot \mu(x,y,z) \mathrm{d}l = \\
&= \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\alpha}^{\beta} z(t) \cdot \mu(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \, \mathrm{d}t \ .
\end{aligned}$$

Příklad 33. Vypočtěte polohu těžiště homogenní cykloidy (jednoho oblouku) a moment setrvačnosti vzhledem k ose x.

$$\mu(x,y) = 1, x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi \ .$$

$$\begin{aligned}
m(\mathcal{C}) &= \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + (a \sin t)^2} \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = 8a \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot 1 \cdot 2a \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{a}{4} \left(\int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t \right) = \\
&= \frac{a}{4} \left[\left(-2t \cos \frac{t}{2} \right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -2 \cos \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t \right] - \frac{a}{4} \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = a\pi \ .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_T &= \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 1\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{a}{4}\left(\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\cos t\cdot\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= \frac{a}{4}\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{a}{4}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{a}{4}\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{a}{4}\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left|\begin{array}{ll} k & = \cos\frac{t}{2} \\ \mathrm{d}k & = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \frac{a}{4}(2+2) - \frac{a}{4}\int_1^{-1}(2k^2-1)(-2)\,\mathrm{d}k = \\
&= a + \frac{a}{2}\left[\frac{2k^3}{3} - k\right]_1^{-1} = a + \frac{a}{2}\left(-\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}+1\right) = a + \frac{a}{3} = \frac{4}{3}a\ .
\end{aligned}
$$

$$
T = \left[\pi a, \frac{4}{3}a\right]\ .
$$

$$
\begin{aligned}
J_x &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2a^3\cdot 4\sin^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8a^3\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} k & = \cos\frac{t}{2} \\ \mathrm{d}k & = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \\
&= 8a^3\int_1^{-1}(-2)(1-k^2)^2\,\mathrm{d}k = -16a^3\int_1^{-1}(1+k^4-2k^2)\,\mathrm{d}k = \\
&= -16a^3\left[k+\frac{k^5}{5}-\frac{2k^3}{3}\right]_1^{-1} = -16a^3\left(-1-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right) = \frac{256}{15}a^3\ .
\end{aligned}
$$

Definice 3.5. *Křivkovým integrálem 2. typu* z vektorového pole $\vec{F}(x,y,z)$ po křivce $\mathcal{C}$ rozumíme

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}}\vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} &= \int_{\mathcal{C}} F_1(x,y,z)\mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\mathrm{d}z = \\
&= \int_\alpha^\beta [F_1(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + \\
&\quad + F_3(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)]\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\dot{\vec{r}}(t)\mathrm{d}t\ ,
\end{aligned}
$$

kde $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Poznámka. Je-li $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ silové pole a $\mathcal{C}$ trajektorie hmotného bodu, pak křivkovým integrálem 2. typu vypočteme práci, kterou vykoná síla $\vec{F}$ po dané křivce $\mathcal{C}$.

Příklad 34. Částice se pohybuje po křivce $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$, $z = bt$. Na částici působí síla $\vec{F}$, jejíž velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti působiště od osy z a jejíž směr je kolmý k ose z. Vypočtěte práci síly v intervalu $t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$.

$$\vec{F} = -K \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0 \right) \; ; \; K > 0 \; .$$

$$A = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = -K \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[\frac{R\cos\omega t}{R^2}(-R\omega\sin\omega t) + \frac{R\sin\omega t}{R^2} R\omega\cos\omega t \right] \mathrm{d}t =$$
$$= -K \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \omega(-\cos\omega t \sin\omega t + \sin\omega t\cos\omega t)\,\mathrm{d}t = 0 \; .$$

Práce dané síly $\vec{F}$ v intervalu $t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ je nulová.

Věta 3.1. Nechť $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je silové pole a $\mathcal{C}$ je křivka. Práce vykonaná silou $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{C}$ nezávisí na parametrizaci křivky, ale závisí na tvaru dané křivky $\mathcal{C}$.

Příklad 35. V rovině jsou dány křivky:

$$\mathcal{C}_1 : x(t) = t, y(t) = t^2 \quad t \in [0,1]$$
$$\mathcal{C}_2 : x(s) = \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right), y(s) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}s\right) \quad s \in [0,1] \; .$$

Dále je dána funkce $\mu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+4y}}$, která bude reprezentovat lineární hustotu křivek a síla $\vec{F}(x,y) = (\gamma(x^2+y^2), 2\gamma xy)$, kde γ je rozměrová konstanta. Vypočtěte hmotnost křivek a práci síly po obou zadaných křivkách.

Snadno lze zjistit, že grafy těchto křivek v rovině xy jsou stejné.

$$m(\mathcal{C}_1) = \int_{\mathcal{C}_1} \mu(\vec{r})\,\mathrm{d}l = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \sqrt{1+(2t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1 \; .$$

$$m(\mathcal{C}_2) = \int_{\mathcal{C}_2} \mu(\vec{r})\,\mathrm{d}l =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}s\right)}} \sqrt{\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right]^2 + \left[2\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right]^2}\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}s\right)}} \frac{\pi}{2} \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right| \sqrt{1+4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}s\right)}\,\mathrm{d}s = 1 \; .$$

Je vidět, že křivky $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ mají stejnou hmotnost a jsou tedy ekvivalentní.

$$A(\mathcal{C}_1) = \int_{\mathcal{C}_1} \gamma(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + 2\gamma xy\,\mathrm{d}y = \gamma\int_0^1 \left[(t^2+t^4)+2t^3\cdot 2t\right]\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\gamma\ .$$

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{C}_2) &= \int_{\mathcal{C}_2} \gamma(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + 2\gamma xy\,\mathrm{d}y = \\
&= \gamma\int_0^1 \left[\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}s\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)+\right. \\
&\quad \left. + 2\sin^3\left(\frac{\pi}{2}s\right)2\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right]\,\mathrm{d}s = \\
&= \gamma\int_0^1 \frac{\pi}{2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}s\right)+5\sin^4\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\,\mathrm{d}s = \\
&= \gamma\left[\frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}s\right)+\sin^5\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right]_0^1 = \frac{4}{3}\gamma\ .
\end{aligned}$$

Práce obou křivek vyšla $\frac{4}{3}\gamma$, což odpovídá větě 5.1.

Příklad 36. Spočítejte integrál $I = \int_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je křivka $y = 1-|1-x|, x \in \langle 0,2\rangle$, probíhaná ve smyslu rostoucího x.

Křivku $\mathcal{C}$ rozdělíme na dvě části:

a) $y = x, 0 \le x \le 1, (\text{"}\mathcal{C}_1\text{"}),\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$

b) $y = 2-x, 1 \le x \le 2, (\text{"}\mathcal{C}_2\text{"}),\ \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$.

$\mathcal{C}$ je tedy $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. Integrál I napíšeme jako součet odpovídajících integrálů I_1, I_2 přes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathcal{C}_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y = 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}\ , \\
I_2 &= \int_{\mathcal{C}_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}_2}(x^2+4+x^2-4x)\,\mathrm{d}x + \\
&\quad + (x^2-4-x^2+4x)\,\mathrm{d}y = \int_1^2 (2x^2-4x+4)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 (4x-4)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

A odtud $I = I_1 + I_2 = \frac{4}{3}$.

3.3 Příklady k procvičení

1. Ukažte, že délka l_1 sinusoidy $y = k \sin \omega x, x \in \langle 0, \frac{2\pi}{\omega} \rangle$ je rovna délce l_2 elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, volíme-li $a = \omega^{-1}$ a $b^2 = a^2 + k^2$.

$[l_1 = l_2]$

2. O kolik je třeba prodloužit homogenní tyč délky $l = 0{,}75\,\mathrm{m}$, aby se její moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na tyč a procházející těžištěm tyče zdvojnásobil?

$[\Delta l = 0{,}26 l = 0{,}195\,\mathrm{m}]$

3. Vypočtěte hmotnost a moment setrvačnosti vzhledem k ose x části sinusoidy $\mathcal{C} : \vec{r}(t) = (t, \sin t),\ t \in [0, \pi]$. Lineární hustota je popsána funkcí $\mu(x, y) = |y| \cdot \sqrt{1 - y^2}$.

$\left[m = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{8} - 1);\ J_x = \frac{16\sqrt{2} - 14}{15}\right]$

4. Najděte polohu těžiště drátu ohnutého do tvaru čtvrtkružnice s poloměrem $R = 10\,\mathrm{cm}$.

$\left[T = \left[\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi}\right] = [6{,}3\,\mathrm{cm};\ 6{,}3\,\mathrm{cm}]\right]$

5. Najděte polohu těžiště homogenního drátu ohnutého do oblouku kružnice poloměru R. Délka drátu je L, přičemž $R > \frac{L}{2\pi}$. Použijte soustavu souřadnic s počátkem ve středu kružnice a s osou x procházející středem drátu.

$\left[T = \left[\frac{2R^2 \sin\left(\frac{L}{2R}\right)}{L};\ 0\right]\right]$

6. Vypočítejte práci síly $\vec{F} = (-kx, -ky, 0)$ po kružnici $x^2 + z^2 = 1, y = 1$ z bodu $A = [0, 1, 1]$ do bodu $B = [1, 1, 0]$. Použijte parametrizaci křivky $\mathcal{C}$, kde $x = \cos t$ a $z = \sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

$\left[A = \frac{1}{2} k\right]$

7. Určete práci silového pole $\vec{F} = k \cdot (-y, x, 2z)$, $k = 1\,\mathrm{N.m^{-1}}$ po lomené čáře $ABCDA$, $A = [0, 0, 0], B = [1, 0, 0], C = [1, 1, 0], D = [0, 1, 0]$.

$[A = 2\,\mathrm{N}]$

Literatura

[1] Karásek J., Skula L.: *Algebra a geometrie*, VUT v Brně, Brno 1999.

[2] Novotný M.: *Integrální počet*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1963.

[3] Daněček J., Dlouhý O.: *Integrální počet II.*, VUT v Brně, Brno 2000.

[4] Riečan B., Neubrunn T.: *Základy integrálního počtu*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1990.

[5] Horák P., Janyška J.: *Analytická geometrie*, MU v Brně, Brno 2002.

[6] Bartsch H.-J.: *Matematické vzorce*, Mladá fronta, Praha 2002.

[7] Kvasnica J.: *Matematický aparát fyziky*, Academia, Praha 1989.

[8] Kopáček J. a kolektiv: *Příklady z matematiky pro fyziky I. - V.*, MATFYZPRESS, Praha 2002.

[9] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky I.*, Univerzita Karlova, Praha 1977.

[10] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky II.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1975.

[11] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky III.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1976.

[12] Kopáček J. : *Matematika pro fyziky IV.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1979.

[13] Musilová J.: *Proseminář z matematické fyziky*, Univerzita J. E. Purkyně v Brně, Brno 1984.

[14] Lonek B.: *Lineární algebra a geometrie*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1978.

[15] Kubeš P., Kyncl Z.: *Fyzika I.*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1999.

[16] Pekárek S., Murla M.: *Fyzika I. - Semináře*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1997.