



**MASARYKOVA UNIVERZITA**

**Přírodovědecká fakulta**

**Kateřina STAŇOVÁ**

**Fyzika Chladního obrazců**

Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

Brno, 2006



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně, za použití uvedené literatury a podle metodických pokynů konzultanta a vedoucího bakalářské práce.

V Brně dne .....

.....

Kateřina Staňová



### **Poděkování**

Ráda bych poděkovala panu doc. Mgr. Tomášovi Tycovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, Zdeňku Bonaventurovi za nekonečnou trpělivost a spoustu věnovaného času při učení práce v programu Maple a za četné odborné konzultace. Dále bych chtěla poděkovat Martinu Hasoňovi za pomoc při psaní práce v systému  $\text{\LaTeX}$ .



## **Anotace**

Tato práce zkoumá Chladniho obrazce na volné ocelové desce čtvercového tvaru. Teoretická část obsahuje odvození pohybové rovnice kmitající desky a její řešení pomocí Ritzovy metody. K výslednému numerickému výpočtu a vykreslení kmitových módů byl napsán program v aplikaci Maple. Vypočítané vlastní frekvence a módy jsou porovnány s výsledky experimentu. V práci je také diskutována konvergence řešení a degenerace módů na čtvercové desce.

## **Annotation**

This work analyzes Chladni figures for a completely free rectangular plate of steel. The theoretic part contains a deduction of motion equation of a bending plate and its solution by means of Ritz method. A program in Maple has been written for getting numeric result and drawing modes. The computed modes and frequencies are compared with results of measurement. Convergence of solution and degeneration of modes on the rectangular plate is also discussed.





# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Matematický popis chvění desek</b>	<b>5</b>
2.1 Energie ohnuté desky . . . . .	5
2.1.1 Výpočet tenzoru napětí a deformace . . . . .	6
2.1.2 Funkcionál potenciální a kinetické energie . . . . .	8
2.2 Okrajové podmínky . . . . .	9
2.3 Ritzova metoda . . . . .	9
2.4 Pohybová rovnice desky . . . . .	13
<b>3 Experimentální zjišťování obrazců</b>	<b>15</b>
3.1 Popis aparatury a postup měření . . . . .	15
3.2 Výpočet v programu Maple . . . . .	18
<b>4 Výsledky měření</b>	<b>21</b>
4.1 Vlastní frekvence a módy . . . . .	21
4.2 Konvergence řešení . . . . .	27
4.3 Degenerace módů na čtvercové desce . . . . .	28
<b>5 Závěr</b>	<b>31</b>
<b>A Módy čtvercové desky</b>	<b>33</b>
<b>B Výpis programu</b>	<b>37</b>



# Kapitola 1

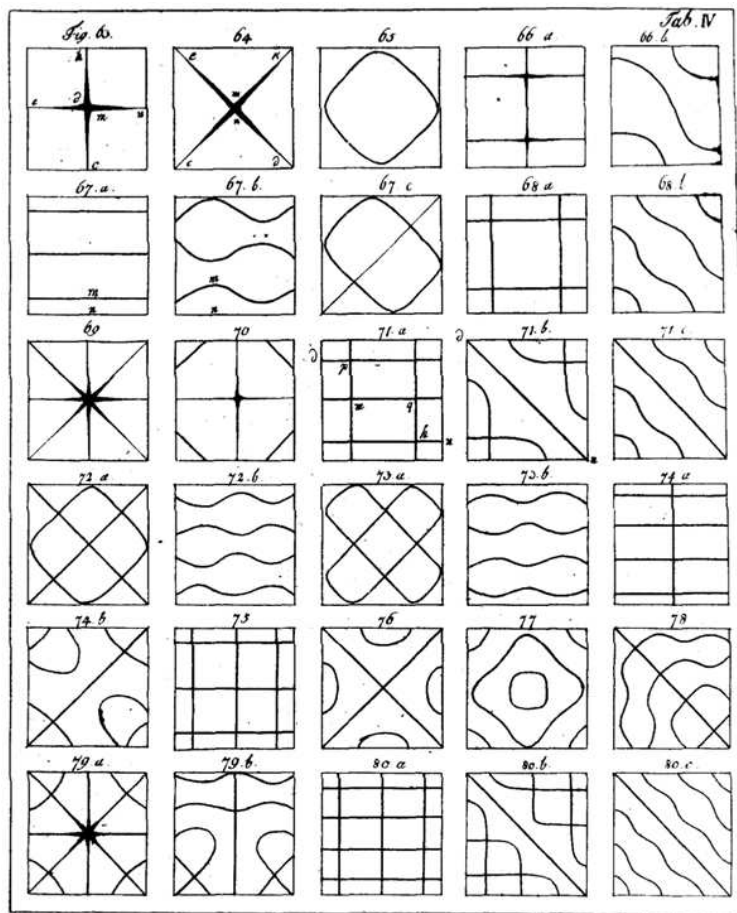
## Úvod

Pozoruhodné obrazce vznikající na rozechvěných deskách nás fascinují již více než 200 let. Tento jev v roce 1787 poprvé popsal E. Chladni, jehož jméno nese dodnes.



**Obrázek 1.1:** E. F. F. Chladni

Ernst Florenz Friedrich Chladni se narodil 30. listopadu roku 1756 ve německém Wittenbergu. Na žádost svého otce vystudoval práva v Lipsku, ale hned po jeho smrti se s vervou vrhl do studia fyziky. Dosáhl velkého uznání v oblasti matematické analýzy akustiky, postavené na dřívějších experimentech Roberta Hooka. Tento anglický fyzik udělal mnoho pokusů se skleněnou deskou posypanou moukou, kterou rozechvíval na jejím okraji smyčcem. Pozoroval obrazce, které se při vibraci tvořily. Tento fenomén znovuobjevil a začal podrobněji zkoumat Chladni koncem 18. století. Chladni prováděl své experimenty s tenkými kovovými deskami, které sypal jemným pískem a rozezníval smyčcem. Při vibraci se písek shlukoval a vytvářel symetrické obrazce (obrázek 1) obdobné těm, které už dříve vytvořil Robert Hook.



**Obrázek 1.2:** Obrazce experimentálně zjištěné E. Chladnim (převzato z [7])

Je zajímavé, že toto chování kmitající desky ovlivnilo M. Faradaye v přemýšlení nad experimenty se siločarami magnetického pole.

Matematický popis Chladniho obrazců v době jejich prvního zkoumání nebyl možný kvůli chybějícímu matematickému aparátu. Nicméně i se současnými matematickými metodami je řešení problému kmitající desky složité. Na rozdíl od pohybové rovnice kmitající membrány, kde se jedná o dobře řešitelnou parciální diferenciální rovnici druhého řádu (separace proměnných), totiž při popisu kmitů desky dostaneme rovnici čtvrtého řádu. V práci je k řešení použita jedna z variačních metod - tzv. Ritzova metoda.

Cílem práce je sestavit funkční aparát pro buzení kmitů volné (popř. podepřené) desky, vytvořit a zdokumentovat Chladniho obrazce a změřit jejich frekvence. Dále numericky vyřešit pohybovou rovnici, vypočítat vlastní frekvence desky a porovnat je s naměřenými hodnotami.

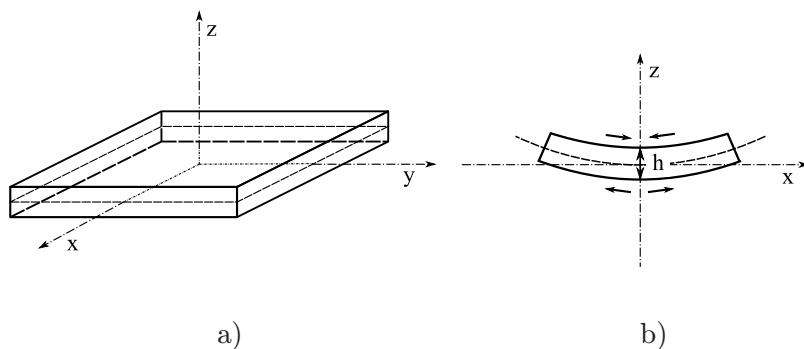
## Kapitola 2

# Matematický popis chvění desek

### 2.1 Energie ohnuté desky

Pro odvození pohybové rovnice kmitající desky pomocí Hamiltonova principu nejmenší akce potřebujeme znát potenciální (deformační) a kinetickou energii desky. Výraz pro potenciální energii je složitý a lze jej odvodit na základě úvah z teorie elasticity.

Předpokládejme, že deska je vyrobena z izotropního homogenního materiálu konstantní tloušťky  $h$  a její hmotný střed je shodný s počátkem souřadnicového systému  $(x, y, z)$  podle obr. 2.1a.



**Obrázek 2.1:** a) Poloha desky vzhledem k souřadnicím.  
b) Ohyb desky.

Při chvění desky dochází k malým změnám polohy jejích částí, k deformaci. Tyto elementy jsou buď rozpínány nebo stlačovány podle toho, v jaké vrstvě desky leží (obr. 2.1b). Jediná plocha, u níž nedochází k natažení

ani stlačení, leží právě ve středu desky (rovina  $(x, y)$ ) a nazývá se neutrální plocha (na obrázku 2.1 čárkovaně). Označíme-li  $z$ -tovou souřadnici bodu neutrální plochy desky jako výchylku  $w$ , můžeme pro malé deformace říci, že k této výchylce dochází jen ve směru osy  $z$ , a že je funkcí zbylých souřadnic  $x, y$ , tedy

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = w(x, y). \quad (2.1)$$

### 2.1.1 Výpočet tenzoru napětí a deformace

K popisu vlastní elastické deformace (a následně také k výpočtu deformační energie), při níž dochází ke změně vzdáleností mezi dvěma libovolnými sousedními body tělesa, slouží tenzor deformace  $\varepsilon_{ij}$  definovaný vztahem

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right), \quad (2.2)$$

kde  $i, j = 1, 2, 3$  a  $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$ .

V případě malých deformací jsou složky posunutí i jejich derivací mnohem menší než 1, a proto můžeme součiny těchto derivací zanedbat. Tenzor malých deformací má pak tvar

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

V lineární teorii pružnosti se předpokládá lineární závislost složek tenzoru napětí  $\tau_{ij}$  na složkách tenzoru deformace  $\varepsilon_{kl}$ . Tento vztah vyjadřuje Hookův zákon

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.4)$$

kde  $C_{ijkl}$  je 81 elastických koeficientů.

Jde-li o homogenní izotropní těleso, redukují se elastické koeficienty na dvě tzv. Lamého konstanty  $\lambda$  a  $\mu$ , které lze jednoduše převést na častěji užívaný Youngův modul pružnosti  $E$  a Poissonův poměr  $\sigma$  vztahy

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (2.5)$$

Hodnoty elastických konstant a koeficientů se pro různé materiály určují experimentálně. Některé z nich jsou uvedeny v následující tabulce.

Materiál	$E$ [ $10^{11}$ N · m <sup>-2</sup> ]	$\mu$ [ $10^{11}$ N · m <sup>-2</sup> ]	$\sigma$
hliník	0,7	0,26	0,34
měď	1,2	0,46	0,35
nikl	1,96	0,77	0,3
ocel	2,2 – 2,4	0,85 – 0,88	0,3
olovo	0,16	0,06	0,44
železo	2,1	0,82	0,28

**Tabulka 2.1:** Materiálové konstanty (převzato z [3])

Pomocí Hookova zákona a konstant  $E, \sigma$  můžeme vyjádřit složky tenzoru napětí

$$\tau_{ij} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\delta_{ij} \operatorname{Tr} \varepsilon + \frac{E}{(1+\sigma)}\varepsilon_{ij}. \quad (2.6)$$

Na základě již zmíněných předpokladů tenké desky konstantní tloušťky a malých výchylek dochází k napínání především v rovině  $(x, y)$  a napětí ve směru osy  $z$  můžeme položit rovno nule. Složky tenzoru napětí, které mají některý index  $z$ , budou tedy nulové

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zz} = 0.$$

Tenzor napětí je symetrický, proto i složky  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ . Z těchto podmínek a na základě vztahu (2.6) můžeme hned napsat některé ze složek tenzoru deformace

$$\varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0. \quad (2.7)$$

Stejně jako tenzor napětí je také tenzor deformace symetrický, proto  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ .

Výpočet ostatních složek obou tenzorů vychází jak ze vztahu (2.6), tak ze vztahu (2.3). Dosazením (2.7) do druhého vztahu a s využitím (2.1) můžeme psát

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Integrací podle  $z$  obdržíme

$$w_x = -z\frac{\partial w}{\partial x} + C. \quad (2.8)$$

Konstanta  $C$  je z okrajových podmínek (2.1) rovna nule. Stejným postupem dostaneme

$$w_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.9)$$

Tyto dílčí výsledky můžeme nyní dosadit do vztahu (2.3). Výsledkem jsou další čtyři složky tenzoru deformace

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Poslední složku  $\varepsilon_{zz}$  vypočítáme s pomocí vztahu

$$\tau_{zz} = 0 = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(\sigma \operatorname{Tr} \varepsilon + \varepsilon_{zz} - 2\sigma\varepsilon_{zz}),$$

odtud

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = z\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Výsledný tenzor deformace má tedy tvar

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 0 \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & z \frac{\sigma}{1-\sigma} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Tenzor napětí jednoduše dopočítáme podle vztahu (2.6)

$$\tau = -z \frac{E}{1+\sigma} \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1-\sigma} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\sigma}{1-\sigma} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.1.2 Funkcionál potenciální a kinetické energie

Pomocí tenzorů  $\varepsilon$  a  $\tau$  můžeme vyjádřit hustotu potenciální energie

$$u = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \tau_{ij}.$$

Sečtením řady a integrací přes objem desky získáme funkcionál popisující deformační (potenciální) energii desky

$$U = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy,$$

kde  $a$  je délka strany čtvercové desky a  $h$  její tloušťka. Pro usnadnění dalšího výpočtu bude výhodné změnit integrační meze transformací  $\xi = \frac{2x}{a}, \eta = \frac{2y}{a}$

$$U = \frac{2D}{a^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] \right\} d\xi d\eta, \quad (2.10)$$

kde  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  vyjadřuje jakýsi odpor desky proti ohybu.

Kinetickou energii desky získáme obdobně integrací kinetické energie elementu desky, jehož výchylka je  $w$  a rychlost  $\dot{w}$ :

$$dT = \frac{1}{2} \dot{w}^2 \rho dx dy dz.$$

Po integraci a transformaci mezí je kinetická energie desky

$$T = \frac{1}{8} \rho h a^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\xi d\eta. \quad (2.11)$$



Aplikací Hamiltonova variačního principu přímo na energie popsané vztahy (2.10) a (2.11) bychom získali pohybovou rovnici desky ve tvaru

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{h^2 E}{12(1 - \sigma^2)} \Delta^2 w = 0.$$

Analytické řešení této diferenciální rovnice 4. řádu je však známo jen pro kruhový tvar desky. V případě čtvercové desky je jediné možné řešení numerické.

## 2.2 Okrajové podmínky

Obecné okrajové podmínky desky jsou poměrně složité. Pro představu je uvádím, přestože v dalším výpočtu nebudou figurovat. Všechny tři případy okrajových podmínek desky (volná, podepřená, vetknutá) jsou podrobně popsány v [1].

V každém volném bodě okraje desky musí platit tyto okrajové podmínky:

$$-\frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right\} = 0,$$

$$\Delta w + (1 - \sigma) \left\{ 2 \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right\} = 0,$$

kde  $n$  je normálový,  $t$  tečný vektor okraje desky a  $\theta$  označuje úhel mezi normálovým vektorem a osou  $x$  (resp.  $\xi$  v transformovaných souřadnicích).

Tyto podmínky jsou díky zvolené Ritzově variační metodě splněny automaticky.

## 2.3 Ritzova metoda

Nyní se dostáváme do fáze řešení, kdy budeme používat tzv. Ritzovu metodu analýzy. Budeme postupovat tak, že do funkcionálu deformační a kinetické energie zabudujeme lineární kombinaci vhodných funkcí tvořících bázi a splňující okrajové podmínky. Koeficienty lineární kombinace určíme extremizací funkcionálu, což povede k řešení soustavy obecně nelineárních algebraických rovnic. Přesnost Ritzovy metody závisí na výběru báze funkcí, ale dává na zvolené množině funkcí nejlepší možné řešení. Speciálním případem této metody je i známá metoda nejmenších čtverců.

Výhodnou možností, jak aproximovat funkcionál, je zapsat výchylku  $w(\xi, \eta)$  jako lineární kombinaci báze funkcí  $f_r(\xi)$  a  $f_s(\eta)$

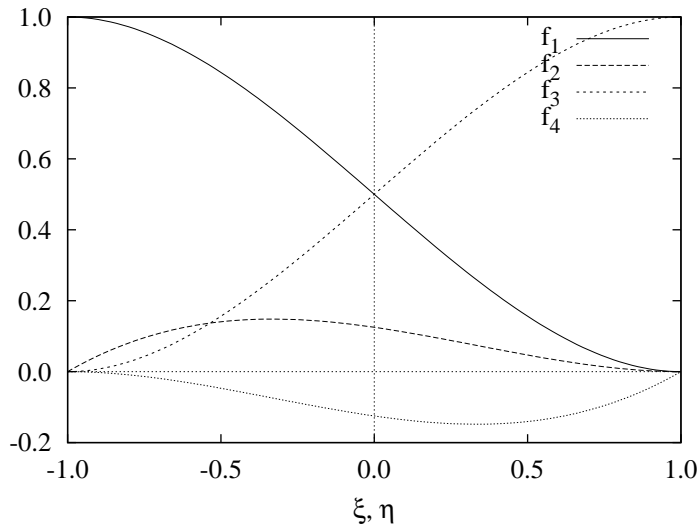
$$w(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p q_{rs} f_r(\xi) f_s(\eta), \quad (2.12)$$

kde  $q_{rs}$  jsou koeficienty lineární kombinace, které dále budeme hledat. Takových funkcí  $f(\xi)$ ,  $f(\eta)$ , které tvoří bázi a zároveň splňují okrajové podmínky (2.1), je mnoho. Během výpočtů byl použit předpis publikovaný N. S. Bardellem v [2]

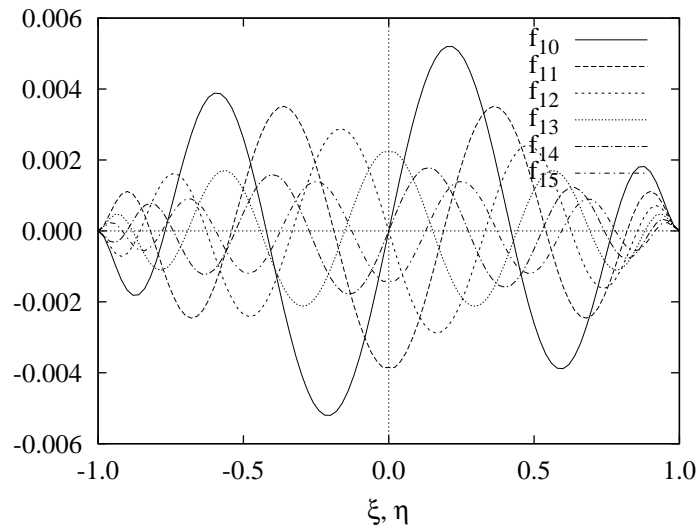
$$f_r(\xi) = \sum_{n=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n!(r - 2n - 1)!} (\xi)^{r-2n-1}, \quad r > 4, \quad (2.13)$$

kde  $r!! = r(r-2)\dots(2 \text{ nebo } 1)$ ,  $0!! = (-1)!! = 1$ . Některé Bardellovy vytvořující funkce jsou zobrazeny v grafu 2.2. Z důvodu zápornosti jmenovatele tento předpis nezahrnuje první čtyři tvarové funkce. Místo nich Bardell používá Hermiteovy kubické základní funkce na intervalu  $[-1; 1]$  (zachyceny v grafu 2.1) dané předpisem

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= 1/2 - 3/4\xi + 1/4\xi^3 \\ f_2(\xi) &= 1/8 - 1/8\xi - 1/8\xi^2 + 1/8\xi^3 \\ f_3(\xi) &= 1/2 + 3/4\xi - 1/4\xi^3 \\ f_4(\xi) &= -1/8 - 1/8\xi + 1/8\xi^2 + 1/8\xi^3 \end{aligned}$$

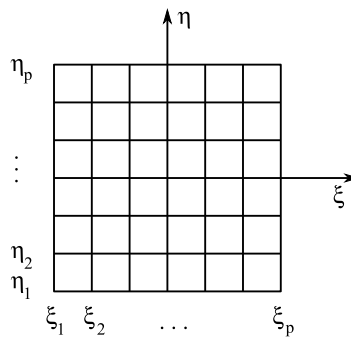


**Graf 2.1:** Bardellovy vytvořující funkce nižšího řádu (Hermiteovy kubické základní funkce)



**Graf 2.2:** Bardellovy vytvořující funkce vyššího řádu

Pro použití jiných vytvořujících funkcí, tzv. Lagrangeových polynomů, je výhodné zavést na desce dělení  $p^2$ , kde  $p$  označuje počet uzlů v jednom směru (obrázek 2.2). Nové souřadnice zahrnující toto dělení budou potom  $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_p)$ .



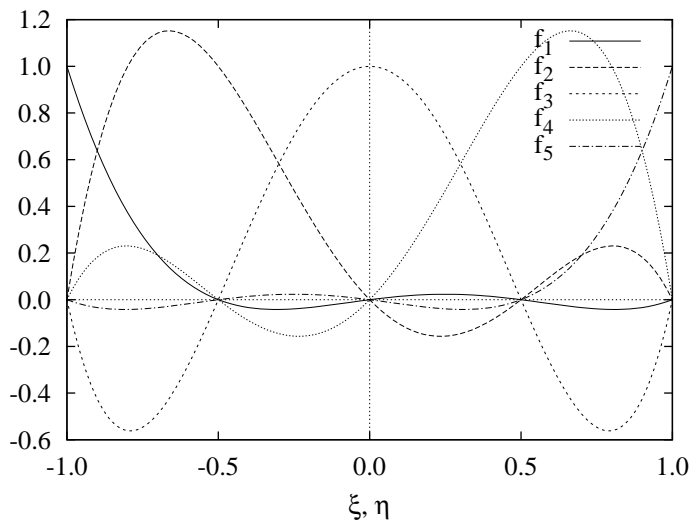
**Obrázek 2.2:** Dělení desky

Lagrangeovy funkce jsou dány předpisem

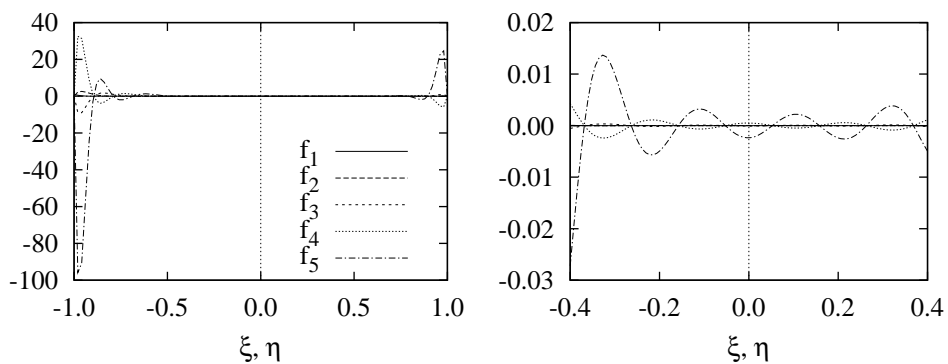
$$f_r(\xi) = \frac{\prod_{i=1}^p (\xi - \xi_i)}{\prod_{i=1}^p (\xi_r - \xi_i)} \quad i \neq r. \quad (2.14)$$

Obdobný předpis je pro  $f_s(\eta)$ . Některé tyto funkce pro různá dělení desky jsou na ukázkou zobrazeny v grafech 2.3, 2.4, 2.5.

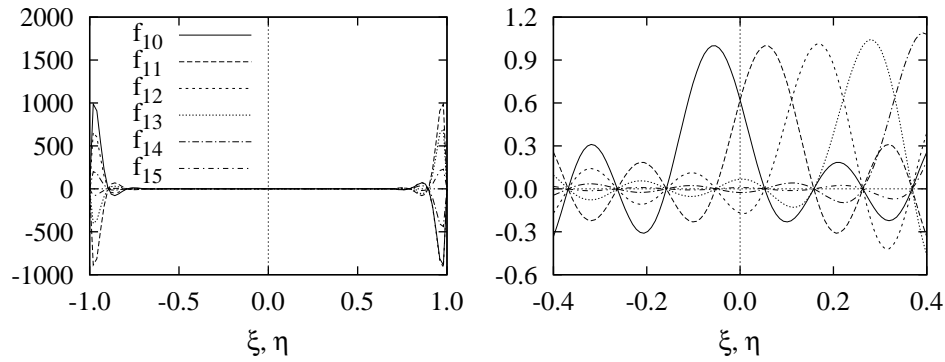
Tvarová funkce v bodě o souřadnici  $[\xi_r, \eta_s]$  (nebo jednoduše  $[r, s]$ ) je určena součinem tvarových funkcí, tedy  $f_{rs}(\xi, \eta) = f_r(\xi)f_s(\eta)$ , jak je již uvedeno ve vzorci (2.12). Obecně platí, že čím jemnější je dělení, tím přesnější je konečné řešení. Zda je tomu tak i v tomto případě je diskutováno v sekci 4.2.



**Graf 2.3:** Lagrangeovy vytvořující funkce pro  $p = 5$



**Graf 2.4:** Lagrangeovy polynomy řádu 1 až 5 pro  $p = 20$  na celé desce a v okolí středu desky



**Graf 2.5:** Lagrangeovy polynomy řádu 10 až 15 pro  $p = 20$  na celé desce a v okolí středu desky

## 2.4 Pohybová rovnice desky

Dosazením (2.12) do (2.10) dostaneme po úpravě výraz

$$U = \frac{2D}{a^2} \sum_r \sum_s \sum_j \sum_k q_{rs} q_{jk} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ f_r^2(\xi) f_s^0(\eta) f_j^2(\xi) f_k^0(\eta) + \dots \right. \\ \left. \dots + 2(1 - \sigma) [f_r^1(\xi) f_s^1(\eta) f_j^1(\xi) f_k^1(\eta) - f_r^2(\xi) f_s^0(\eta) f_j^0(\xi) f_k^2(\eta)] \right\} d\xi d\eta,$$

kde horní index vyjadřuje řád derivace podle příslušné proměnné. Obdobně můžeme po dosazení upravit výraz pro kinetickou energii. Zavedením označení

$$I_{rj}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 f_r^\alpha(\xi) f_j^\beta(\xi) d\xi, \quad I_{sk}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 f_s^\alpha(\eta) f_k^\beta(\eta) d\eta \quad (2.15)$$

můžeme potenciální a kinetickou energii desky zapsat jako

$$U = \frac{2D}{a^2} \sum_r \sum_s \sum_j \sum_k q_{rs} q_{jk} \left\{ I_{rj}^{22} I_{sk}^{00} + I_{rj}^{00} I_{sk}^{22} + I_{rj}^{20} I_{sk}^{02} + I_{rj}^{02} I_{sk}^{22} + \right. \\ \left. + 2(1 - \sigma) [I_{rj}^{11} I_{sk}^{11} - I_{rj}^{20} I_{sk}^{02}] \right\}, \quad (2.16)$$

$$T = \frac{\rho h a^2}{8} \sum_r \sum_s \sum_j \sum_k \dot{q}_{rs} \dot{q}_{jk} \{ I_{rj}^{00} I_{sk}^{00} \}. \quad (2.17)$$

Nyní máme vše potřebné k odvození pohybové rovnice kmitající desky.

Lagrangeova rovnice vyplývající z Hamiltonova principu nejmenší akce má v našem případě tvar

$$\frac{\partial U}{\partial q_{uv}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{uv}} = 0. \quad (2.18)$$

Přepokládejme, že všechna  $q_{uv}$  se mění se stejnou frekvencí  $\omega$  ( $[\omega] = \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ).  
Můžeme proto zapsat řešení ve tvaru

$$q_{uv} = Q_{uv} \exp(-i\omega t). \quad (2.19)$$

Po dosazení (2.16), (2.17) a (2.19) do Lagrangeovy rovnice (2.18) zmizí dvě sumace (protože  $\frac{\partial q_{rs}}{\partial q_{uv}} = \delta_{ru}\delta_{sv}$ ) a dostaneme soustavu  $p^2$  rovnic s neznámými  $Q_{rs}$

$$\left( \underbrace{\left\{ I_{rj}^{22} I_{sk}^{00} + I_{rj}^{00} I_{sk}^{22} + I_{rj}^{20} I_{sk}^{02} + I_{rj}^{02} I_{sk}^{22} + 2(1 - \sigma) [I_{rj}^{11} I_{sk}^{11} - I_{rj}^{20} I_{sk}^{02}] \right\}}_{[K]} - \frac{1}{8} \rho h a^4 \frac{\omega^2}{2D} \underbrace{\left\{ I_{rj}^{00} I_{sk}^{00} \right\}}_{[M]} \right) \sum_r \sum_s Q_{rs} = 0,$$

kterou můžeme jednodušeji zapsat pomocí matic jako

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{Q_{rs}\} = 0, \quad (2.20)$$

kde  $[K]$  představuje matici tuhostí a  $[M]$  matici hmotností. Obě matice jsou dimenze  $p^2 \times p^2$ . Tato rovnice vyjadřuje problém vlastních hodnot. Každé konstantě (vlastní hodnotě)  $\Omega^2 = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{16D}$  odpovídá jeden nebo (v případě degenerace) několik vlastních vektorů se složkami  $Q_{rs}$ . Protože platí známý vztah  $\omega = 2\pi f$ , můžeme z této konstanty jednoduše určit vlastní frekvence desky  $f$  ( $[f] = \text{Hz}$ )

$$f = \frac{4}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \Omega. \quad (2.21)$$

Problém plnění matice a indexování jejích prvků je řešen v kapitole 3.2.

## Kapitola 3

# Experimentální zjišťování obrazců

Jedním z cílů bakalářské práce bylo sestavení elektromechanického zařízení na buzení kmitů a s jeho pomocí následné vytvoření Chladniho obrazců na kovové desce.



Obrázek 3.1: Měřicí aparatura s reproduktorem

### 3.1 Popis aparatury a postup měření

Měřicí aparatura se skládala z tónového generátoru METEX, zesilovače a reproduktoru na jedné straně a laboratorního stojanu, tenkých leteckých gum ( $5 \times 5\text{mm}$ ) a kovové desky o rozměrech  $380 \times 380 \times 3\text{mm}$ <sup>1</sup> a hmot-

---

<sup>1</sup>Tloušťku desky neuvádím přesněji, protože (na rozdíl od ostatních rozměrů) nebyla zcela konstantní. Jedná se o průměrnou hodnotu. Naměřené hodnoty včetně chyb jsou také v tabulce 4.1.

nosti 3,37 kg na straně druhé. Deska byla zavěšena na stojanu pomocí gum vedených pod deskou do kříže a posypána jemnou krupicí umožňující zviditelnění kmitových módů. Krupice se během kmitání desky přemístila do míst (tzv. uzlových čar), jejichž výchylka byla nulová ( $w = 0$ ). Při vytváření obrazců byl reproduktor umístěn na nerezonující podložce co nejbližší pod deskou, ale také od ní dostatečně daleko tak, aby ji magnet reproduktoru neovlivňoval. Podle intenzity a frekvence signálu se tato vzdálenost pohybovala v rozmezí 0,5 – 2 cm. Desku tedy rozeznávaly mechanické kmity plochy reproduktoru přenesené přes tenkou vrstvu vzduchu. Celá měřicí aparatura je na obrázku 3.1.

Kvůli omezenému výkonu zesilovače a reproduktoru se pro buzení kmitů o frekvenci vyšší než asi 1000 Hz musel použít poněkud jiný mechanismus založený na elektromagnetické indukci. Místo reproduktoru se k výstupu zesilovače připojila cívka o stejném odporu, jako měl reproduktor, namotaná pro lepší manipulaci na speciální držák. Na desku byl připevněn malý válcový magnet s polem o maximální indukci 0,5 T a hmotnosti 36 g. Pro rozkmitání desky se cívka přiblížila k magnetu tak, aby se nedotýkala desky, ale přitom aby magnet částečně tvořil jádro cívky. Díky střídavému proudu v cívkě pak vznikající Lorentzova síla rozkmitala magnet a tím i celou desku (obrázek 3.2).



**Obrázek 3.2:** Měřicí aparatura s magnetem

Tento způsob buzení kmitů se méně hodil pro nízké frekvence. Docházelo totiž velice rychle k přehřátí cívky.

Přidaný magnet frekvence kmitových módů měnil minimálně, protože jeho hmotnost byla v porovnání s hmotností desky zanedbatelná (řádově 100krát menší). Magnet ovlivnil pouze tvar obrazců v případech, kdy nebyl umístěn přesně ve středu desky. K jistému zkreslení docházelo u volné desky i vlivem gumových závěsů. Tato chyba však není příliš velká a je srovnatelná s chybou ladícího zařízení tónového generátoru.

První vlastní frekvence a obrazce byly zjištěny náhodně postupným pomalým laděním. Tento způsob experimentu však značně zatěžoval jak reproduktor, tak sluchové orgány fyziků v širokém okolí kvůli nutnosti vysoké



intenzity signálu. Navíc byl takto náročný na přesnost. Ladění muselo probíhat velmi pomalu, a přesto se kvůli omezeným možnostem ladicího zařízení často nepodařilo rozkmitání desky zachytit.

Pro to, aby kmity desky vůbec nastaly, je totiž důležitá jednak velmi přesná frekvence, ale také umístění reproduktoru či magnetu s cívkou pod deskou v kmitně. Z toho důvodu bylo výhodnější nejprve teoreticky vypočítat frekvence vlastních kmitů desky a vymodelovat jim odpovídající Chladniho obrazce. Potom už stačilo naladit přibližnou hodnotu frekvence, reproduktor či magnet umístit co nejpřesněji do očekávané kmitny desky a nakonec frekvenci doladit.

V malém okolí vlastní frekvence desky lze v případě nižších módů (větší výchylky desky) buzených reproduktorem pozorovat na desce záznamy. Zrníčka posypu v kmitnách střídavě „poskakují“ s velkou amplitudou nebo jsou v klidu. K vytvoření obrazce ale zatím nedochází, k tomu je potřeba frekvenci doladit. Při indukčním buzení těchto módů jsou záznamy také dobře slyšitelné, protože nejsou přehlušeny reproduktorem. U vyšších módů buzených magnetem se deska pro změnu hlasitě rozezní, jakmile dojde k rezonanci. Záznamy v tomto případě nelze dobře pozorovat. Důvodem jsou malé výchylky desky, a také velmi úzký interval, ve kterém lze vlastní frekvenci zachytit.

Při kmitání desky, zvláště při nižších módech s většími výchylkami, se v kmitnách desky díky proudění vzduchu shlukovaly prachové částice (obrázek 3.3).



**Obrázek 3.3:** Prachové částice v kmitně

### 3.2 Výpočet v programu Maple

Jak již bylo uvedeno v předchozí sekci 3.1, bylo z technických důvodů výhodnější vlastní frekvence desky nejprve vypočítat a teprve potom ověřit experimentem. K výpočtu je použit program Maple, výsledné kmity jsou vykresleny programem Gnuplot. Úplný výpis z programu uvádím v dodatku A, stručný popis programu je obsahem této kapitoly.

Na začátku programu jsou zavedeny parametry matematicko-fyzikálního modelu desky (dělení desky – `p`, rozměry desky – `a` a `h`, hustota materiálu – `rho`, Youngův modul pružnosti – `E`, Poissonův poměr – `sigma`, rozměr desky v transformovaných souřadnicích  $\xi, \eta$  – `rozmer`). Dále je možné zvolit vytvářející funkci – `f`, která bude ve výpočtu použita, a vybrat volnou či podepřenou desku – `Deska`. Následuje definice vytvářejících funkcí podle N. S. Bardella včetně dodefinování prvních čtyř polynomů (Hermiteovy polynomy) (2.13) a zápis Lagrangeových polynomů (2.14). Dále je napsána procedura(F) vybírající vytvářející funkci a procedura(II) pro zjednodušující integrály (2.15).

Pro maticový zápis soustavy Lagrangeových rovnic bylo nezbytné převést čtyři indexy ve vztazích pro energie (2.16), (2.17) na dva indexy maticové, tzn. indexy  $(r, s; j, k)$  zapsat pomocí indexů prvků matic  $(m; n)$ . To je možné udělat více způsoby (podle toho, který index budeme fixovat a který měnit). Mnou zvolené přeindexování odpovídá situaci, kdy přednostně měníme druhý index (viz následující příklad pro  $p = 3$ ).

m	r	s
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	1
5	2	2
6	2	3
7	3	1
8	3	2
9	3	3

**Tabulka 3.1:** Přeindexování

Stejným postupem získáme index  $n$ . Toto indexování vypadá v programu takto:

```

index_r := (m, p) -> trunc((m-1)/(p))+1;

index_s := proc(m, p)
  local zbytek;
  zbytek := m mod (p);

```

```

    if zbytek=0 then return (p)
      else return zbytek
    end if;
end proc;

index_j:=(n,p) -> trunc((n-1)/(p))+1;

index_k:=proc(n,p)
  local zbytek;
  zbytek:= n mod (p);
  if zbytek=0 then return (p)
    else return zbytek
  end if;
end proc;

```

Řádkový index matice je potom vyjádřen jako

```

index_m:=(r,s,p) -> (r-1)*(p)+s;

```

V další části jsou naplněny matice a řeší se problém vlastních hodnot (2.20).

V této práci je řešen především případ volné desky. Výpočet provedený v programu Maple (dodatek A) se dá kompletně aplikovat i na desku podepřenou uprostřed volbou parametru `Deska:='podeprena'`. V případě desky podepřené uprostřed je výhodné zvolit Lagrangeovy funkce a liché dělení desky (tj.  $p - \text{liché}$ ), aby se jeden uzel shodoval se středem desky. Lagrangeova funkce  $f_i$  má tu vlastnost, že její funkční hodnoty jsou ve všech bodech dělení nulové vždy s výjimkou  $i$ -tého bodu dělení, jak vyplývá ze vztahu (2.14) a grafu 2.3. Potom pro výpočet podepřené desky stačí v matici  $[K]$  (odvozena od potenciální energie) vynulovat řádek a sloupec odpovídající  $i$ -tému bodu desky. V případě desky podepřené uprostřed se tedy jedná o  $(p^2 + 1)/2$ -tý řádek a  $(p^2 + 1)/2$ -tý sloupec.

```

if (Deska='podeprena') then
  for i from 1 to p^2 do
    KK[((p^2+1)/2),i]:=0:
    KK[i,((p^2+1)/2)]:=0:
  end do:
end if;

```

Následuje trochu složitější operace seřazení frekvencí podle velikosti (při zachování jejich očíslování). „Očíslování“ vlastních hodnot (vytvoření matice  $p^2 \times 2$ , kde první sloupec jsou čísla  $1 - p^2$  a druhý sloupec vlastní hodnoty – bezrozměrné frekvence) je důležité, abychom zpětně (po seřazení frekvencí) dokázali přiřadit daným vlastním hodnotám příslušné vlastní vektory, které jsou součástí řešení a slouží k výpočtu výchylek v jednotlivých bodech dělení desky.

Závěrečná část programu obsahuje dvě procedury. První pro výpis výchylek v jednotlivých bodech dělení (formou matice) a druhou pro vykreslení módů.



## Kapitola 4

# Výsledky měření

### 4.1 Vlastní frekvence a módy

Frekvence a módy byly počítány a experimentálně ověřeny pro konkrétní ocelovou (elastické konstanty oceli viz tabulka 2.1) desku, jejíž parametry jsou uvedeny v následující tabulce.

$a$ [ $10^{-3}\text{m}$ ]	$h$ [ $10^{-3}\text{m}$ ]	$m$ [kg]	$\rho$ [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]
$380 \pm 0,50$	$3 \pm 0,35$	$3,37 \pm 0,01$	$7780 \pm 230$

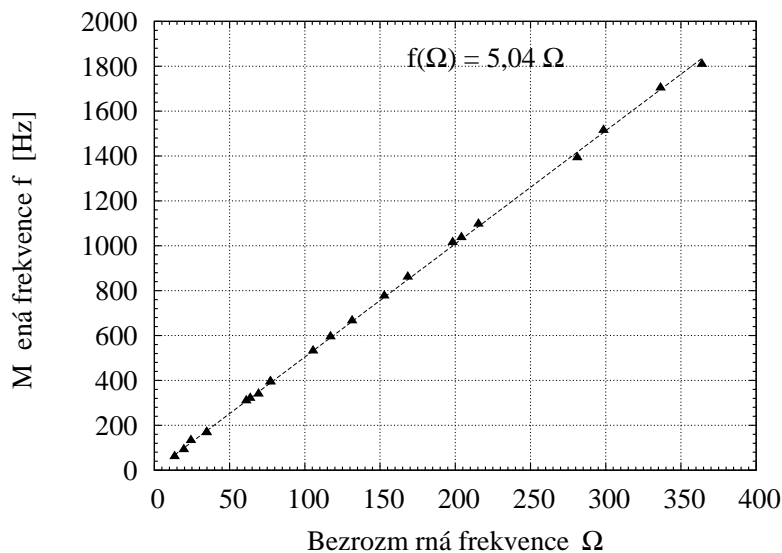
**Tabulka 4.1:** Parametry desky

Přesnost výsledků zvolené metody výpočtu závisí na jemnosti dělení desky (viz sekce 2.3) a na zvolených vytvořujících funkcích. Zatímco obor hodnot Bardellových polynomů zůstává i při jemném dělení ( $p > 17$ ) stále konstantní, Lagrangeovy polynomy dosahují při tomto dělení na okrajích intervalu  $[-1;1]$  extrémálních hodnot (graf 2.5). To má vliv na konvergenci vlastních hodnot (viz sekce 4.2). Proto je výhodnější pro přesnější výpočet vlastních frekvencí volné desky použít Bardellovy polynomy, které nezávisí na dělení  $p$ .

Naproti tomu u podepřené desky se výpočet použitím Lagrangeových funkcí značně zjednoduší, protože k řešení stačí pouze v matici  $K$  vynulovat řádek a sloupec odpovídající bodu podepření (viz sekce 3.2). Bardellovy polynomy lze v tomto případě použít jen tehdy, pokud by se k funkcionálu kinetické a potenciální energie přidal ještě Lagrangeův multiplikátor, pomocí něhož se dá vyjádřit okrajová podmínka v libovolném bodě.

Graf 4.1 ukazuje závislost naměřené frekvence  $f$  [Hz] na vypočítané bezrozměrné frekvenci  $\Omega$ . Tato závislost koresponduje se vztahem (2.21). Směrnice grafu ( $s = 5,04 \pm 0,01$ ) ale vyjadřuje vlastnosti desky přesněji než koeficient ve vztahu (2.21) s dosazenými konstantami  $E, \sigma$ , protože materiálové konstanty nebyly pro tuto konkrétní desku změřeny a mohly být pouze

předpokládány na základě materiálu desky. Proto je pro přepočet bezrozměrných frekvencí na frekvence  $f$  [Hz] lepší použít tuto směrnici než koeficient ze vztahu (2.21).

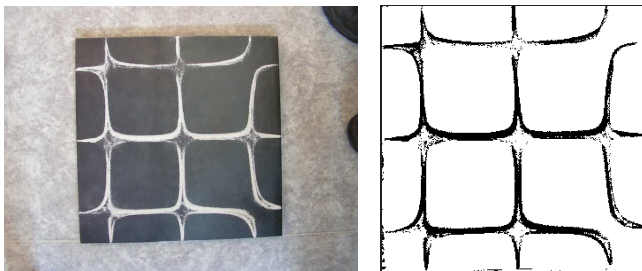


**Graf 4.1:** Závislost frekvence  $f$  [Hz] na bezrozměrné frekvenci  $\Omega$

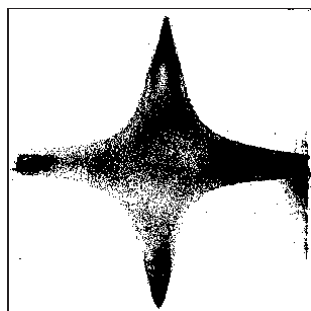
Na následujících stranách jsou pozorované módy a jejich frekvence porovnány s vypočítanými. V popisku vypočítaných módů je uvedena bezrozměrná frekvence  $\Omega$  a frekvence  $f = 5,04\Omega$  [Hz].

Výsledky výpočtů módů byly ve tvaru funkce  $w(\xi, \eta)$ . Pro snadné porovnání s experimentem byly vykresleny „nulové vrstevnice“ funkce  $w$ , tedy křivky, na nichž funkce  $w$  nabývá nulové hodnoty. Ty odpovídají křivkám, podél nichž se u příslušného módu uspořádají zrníčka krupice.

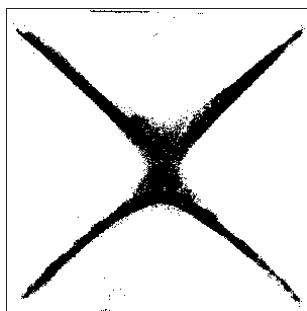
Fotografie byly upraveny v programu XnView [4]. Nejprve se ořezaly tak, aby zachycovaly pouze desku s módem. Poté se snížil jas a zvýšil kontrast snímků. Po převedení do negativu byly obrázky transformovány do šedé škály barev. Konečně se opět upravil jas a kontrast a počet barev byl redukován na dvě (bílou a černou).



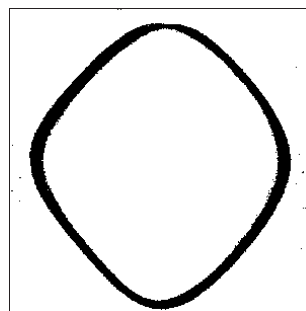
**Obrázek 4.1:** Originální a upravená fotografie módu



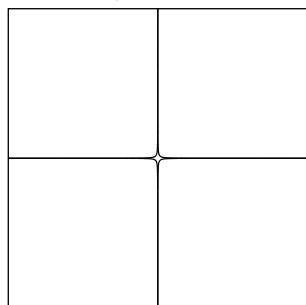
a) 61 Hz



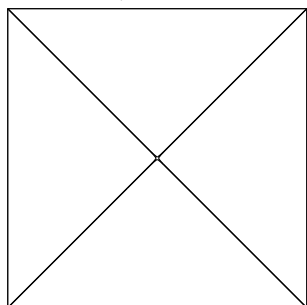
b) 92 Hz



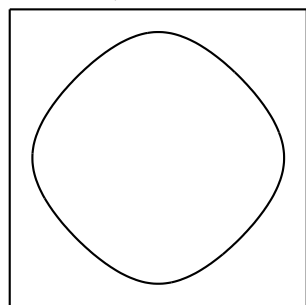
c) 133 Hz



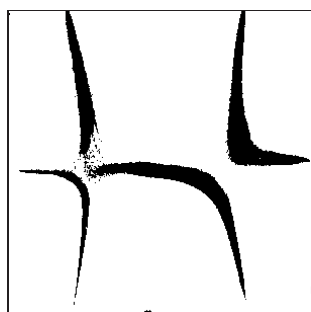
a) 13,47 (67,88 Hz)



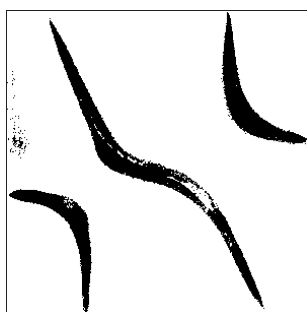
b) 19,60 (98,78 Hz)



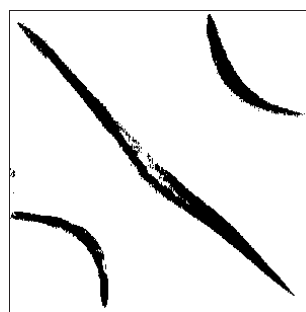
c) 24,27 (122,32 Hz)



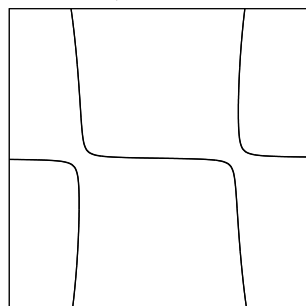
d<sub>1</sub>) 168 Hz



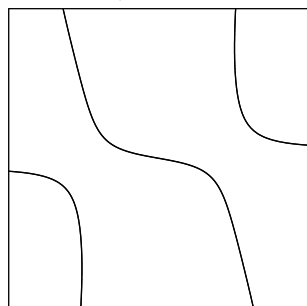
d<sub>2</sub>) 168 Hz



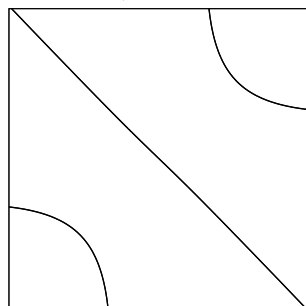
d<sub>3</sub>) 168 Hz



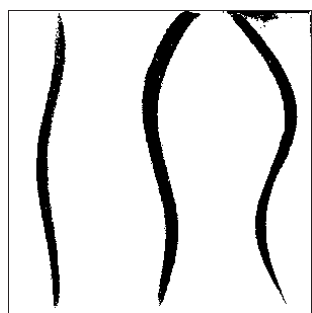
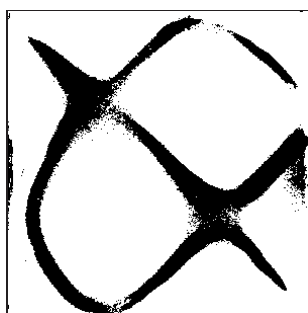
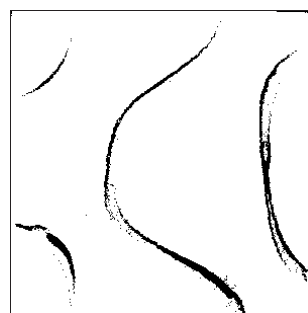
d<sub>1</sub>) 34,80 (175,39 Hz)



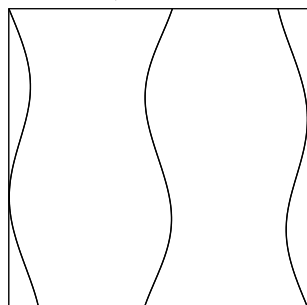
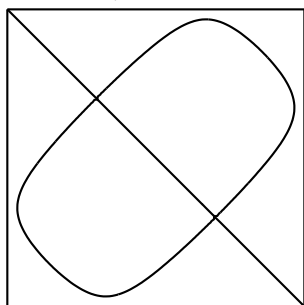
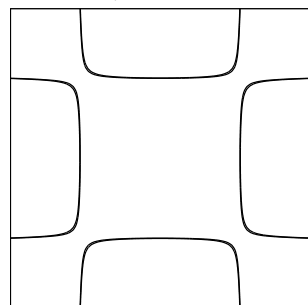
d<sub>2</sub>) 34,80 (175,39 Hz)



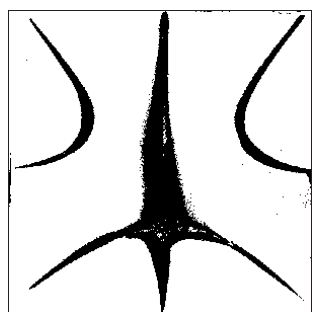
d<sub>3</sub>) 34,80 (175,32 Hz)

e<sub>1</sub>) 310 Hze<sub>2</sub>) 310 Hz

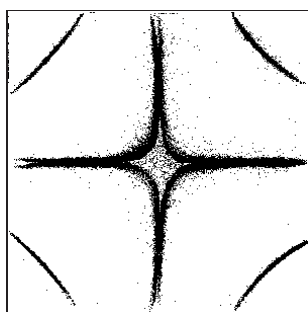
f) 321 Hz

e<sub>1</sub>) 61,09 (307,89 Hz)e<sub>2</sub>) 61,09 (307,89 Hz)

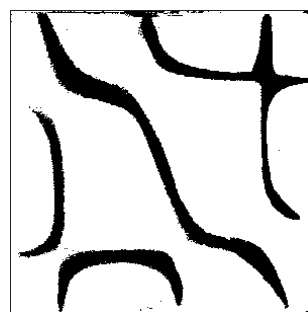
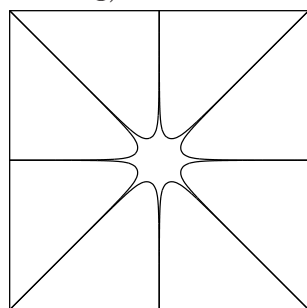
f) 63,69 (320,99 Hz)



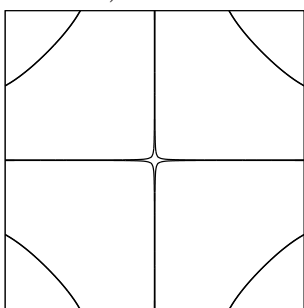
g) 342 Hz



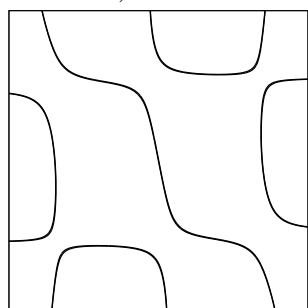
h) 394 Hz

i<sub>1</sub>) 532 Hz

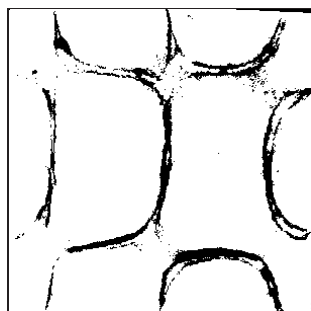
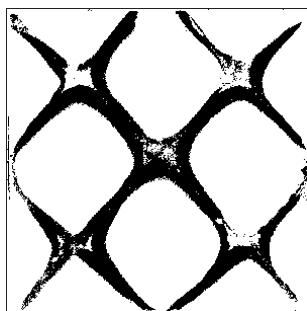
g) 69,27 (349,12 Hz)



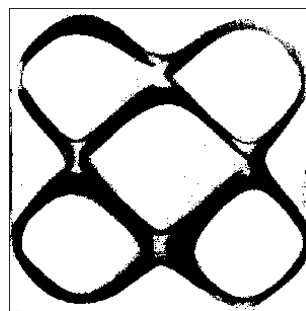
h) 77,17 (388,93 Hz)

i<sub>1</sub>) 105,46 (531,51 Hz)

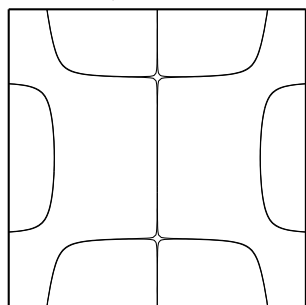
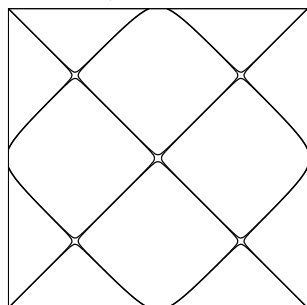


i<sub>2</sub>) 532 Hz

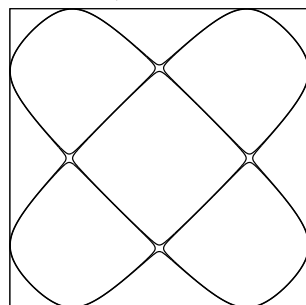
j) 595 Hz



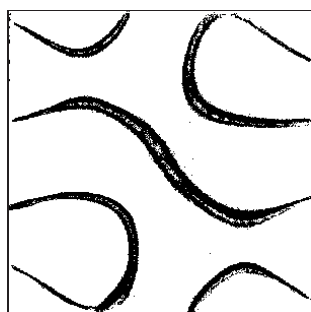
k) 615 Hz

i<sub>2</sub>) 105,46 (531,51 Hz)

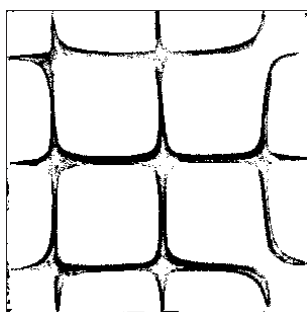
j) 117,11 (590,23 Hz)



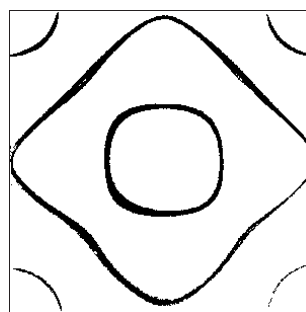
k) 122,44 (617,09 Hz)



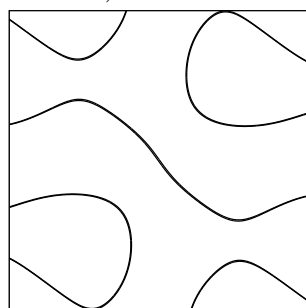
l) 666 Hz



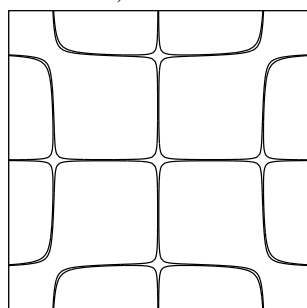
m) 776 Hz



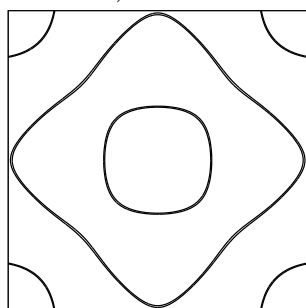
n) 861 Hz



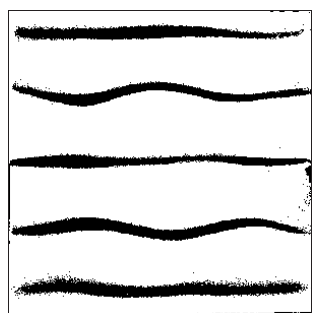
l) 131,47 (662,60 Hz)



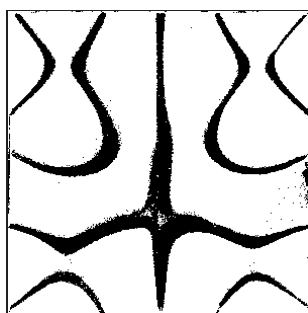
m) 152,84 (770,31 Hz)



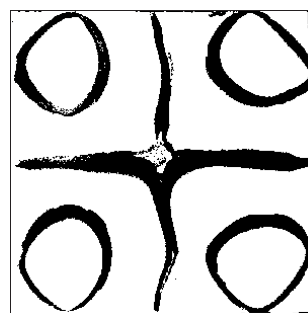
n) 168,48 (849,13 Hz)



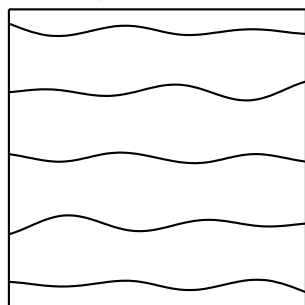
o) 1015 Hz



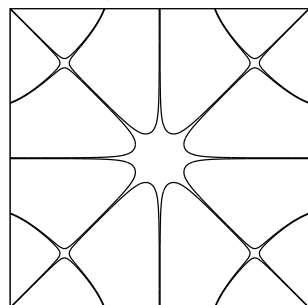
p) 1037 Hz



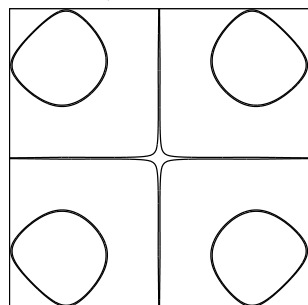
r) 1088 Hz



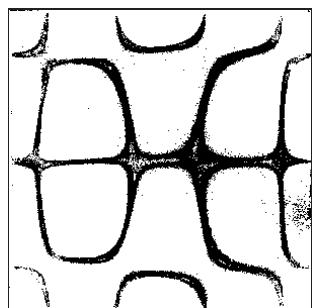
o) 198,27 (999,28 Hz)



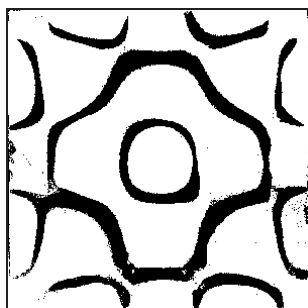
p) 204,14 (1028,8 Hz)



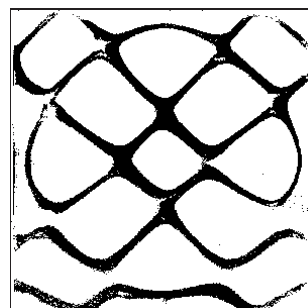
r) 213,95 (1078,30 Hz)



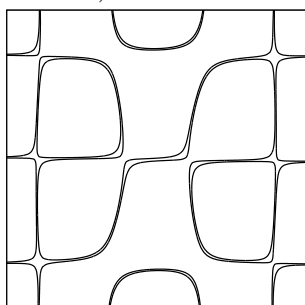
s) 1096 Hz



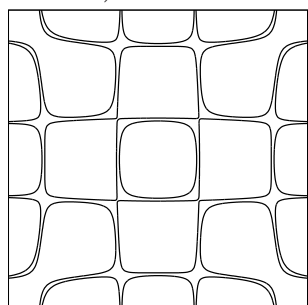
t) 1394 Hz



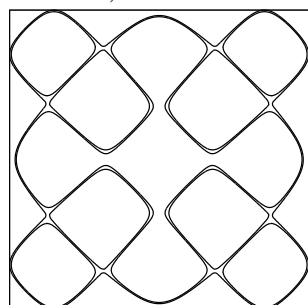
u) 1513 Hz



s) 215,41 (1085,66 Hz)



t) 281,11 (1416,79 Hz)



u) 299,93 (1511,64 Hz)

Směrodatná odchylka změřených frekvencí od vypočítaných frekvencí je  $\pm 8,73$  Hz.

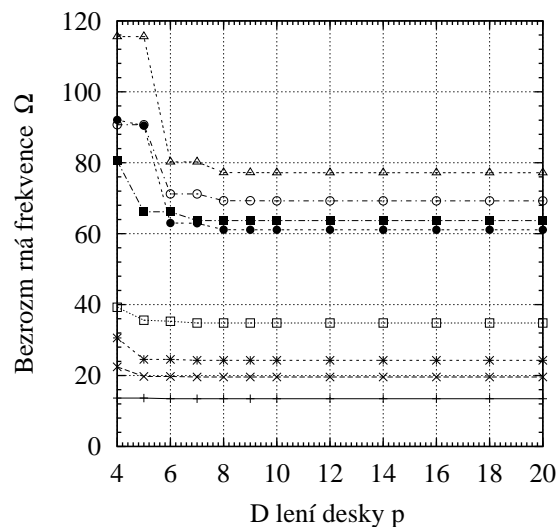
Frekvence, při nichž může vzniknout více obrazců  $(d, e, i)$ , jsou tzv. degenerované (viz sekce 4.3).

Některé fotografie  $(g, p)$  se zdánlivě vůbec neshodují s předpokládanými symetrickými obrazci a mají na rozdíl od nich nižší symetrii. Tento jev se nedá vysvětlit degenerací. Jedná se nejspíše o jemné nehomogenity nebo nepřesnosti desky (nerovnoměrná tloušťka), nebo nedokonalé buzení (ne zcela přesné umístění magnetu či reproduktoru pod deskou). V případě módu  $p$  došel ke podobnému výsledku experimentu i E. Chladni (viz obrázek 1).

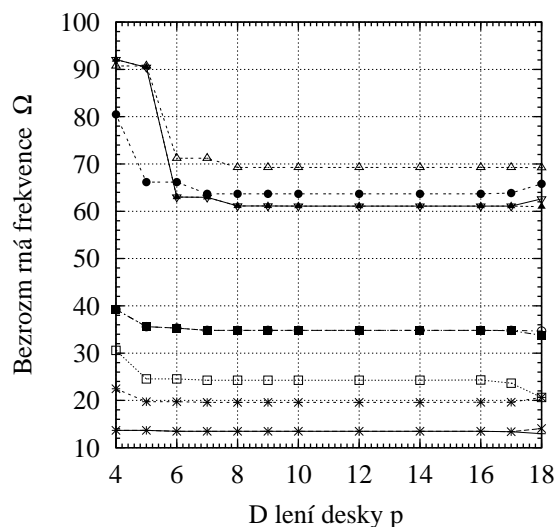
Během experimentů se zdaleka nepodařilo vytvořit všechny obrazce. Prvních 140 vypočítaných módů pro dělení  $p = 20$  je obsahem dodatku A.

## 4.2 Konvergence řešení pro různé dělení desky a vytvořující funkce

V následujících grafech konvergence vlastních frekvencí je vidět rozdílná stabilita řešení při použití různých vytvořujících funkcí. Frekvence plně zkonvergovaly v obou případech při dělení  $p = 8$  a až do  $p = 14$  se shodovaly s přesností na 7 platných cifer. Zatímco frekvence počítané s Bardellovými polynomy zůstávají i nadále se stejnou přesností konstantní, výpočet s Lagrangeovými polynomy dává od dělení  $p = 17$  naprosto nepoužitelné výsledky. Důvodem je zřejmě chování těchto polynomů na okrajích desky při vyšším dělení (viz grafy 2.4 a 2.5).



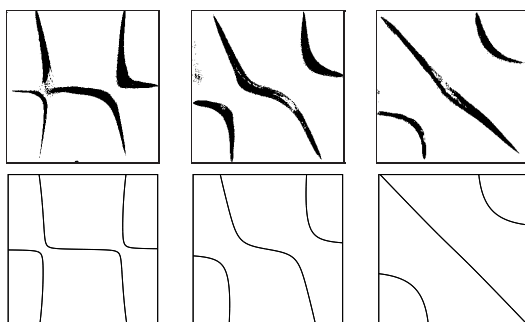
**Graf 4.2:** Konvergence prvních osmi bezrozměrných frekvencí při použití Bardellových funkcí



**Graf 4.3:** Konvergence prvních osmi bezrozměrných frekvencí při použití Lagrangeových funkcí

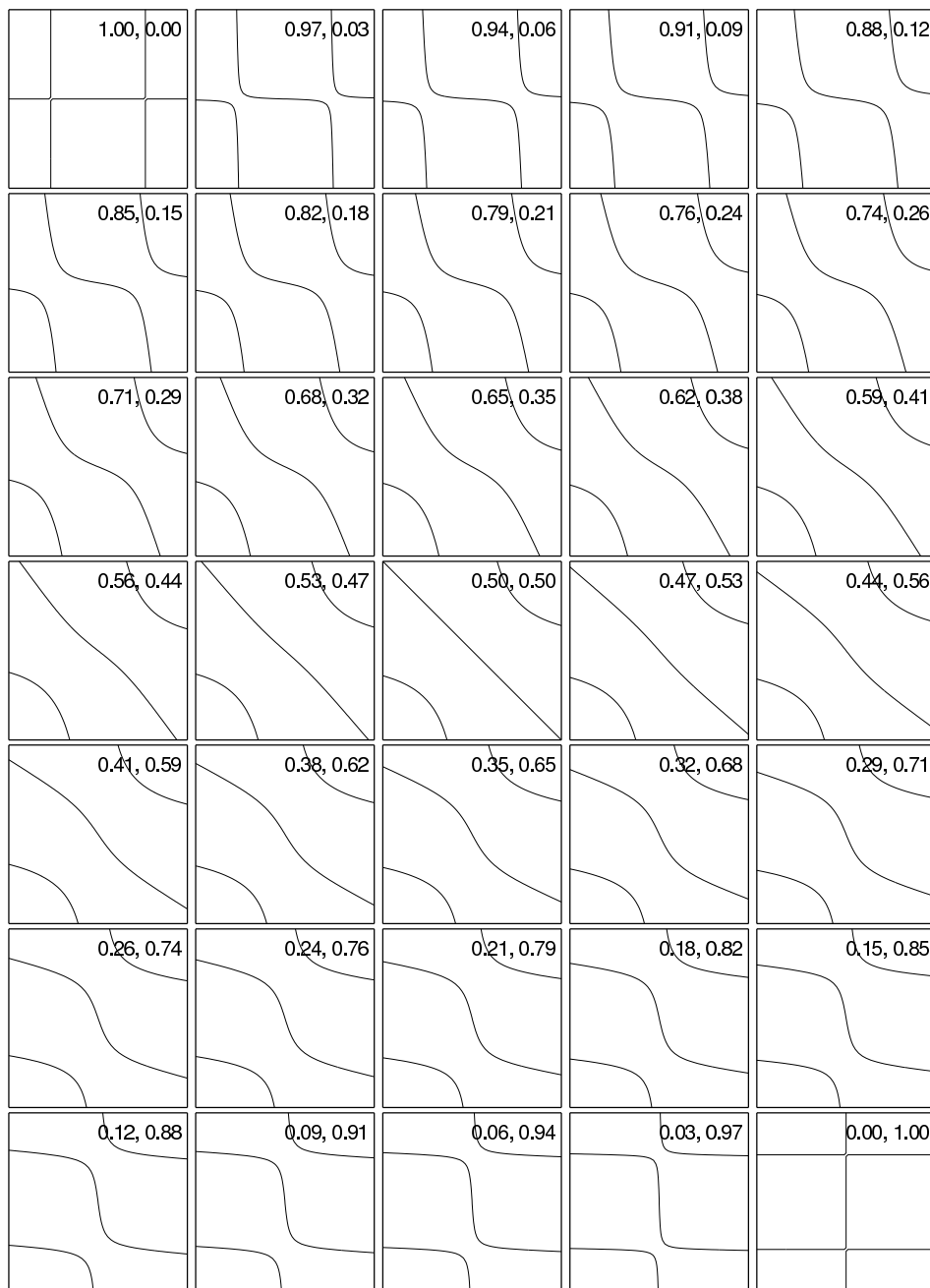
### 4.3 Degenerace módů na čtvercové desce

V případě čtvercové desky nastává při některých frekvencích jev, který můžeme nazvat degenerace módů. Na desce se při určité (jedné) frekvenci mohou nezávisle na sobě vytvořit buď dva obrazce vzájemně otočené o  $90^\circ$  nebo jejich libovolná lineární kombinace (obrázek 4.2 a 4.3).



**Obrázek 4.2:** První degenerovaný mód ( $\Omega = 34, 80$ )

Degenerace je důsledkem symetrie čtvercové desky. Při porušení této symetrie (u obdélníku, kosočtverce apod.) degenerace zaniká a každé frekvenci pak přísluší pouze jeden mód.



**Obrázek 4.3:** Lineární kombinace degenerovaného módu (čísla vyjadřují koeficienty lineární kombinace)

U kruhové desky by byla degenerace ještě vyšší. Obrazce by se v důsledku toho obtížněji vytvářely, protože by mohly „překmitávat“ z jednoho na jiný, který se od původního liší otočením o libovolný úhel.



## Kapitola 5

### Závěr

V teoretické části práce jsou na základě teorie elasticity odvozeny vztahy pro kinetickou a potenciální energii ohnuté desky, popsána metoda řešení a sestavena pohybová rovnice kmitající čtvercové desky. K numerickému řešení problému vlastních hodnot, ke kterému vedla Ritzova metoda, byl napsán program v prostředí Maple. Pomocí něj se vypočítaly vlastní frekvence desky a také vykreslily její módy.

Pro experimentální buzení módů byl sestrojen elektronicko-mechanický aparát. Obrazce vytvořené tímto zařízením na kovové čtvercové desce jsou v práci porovnány s vypočítanými módy. Směrodatná odchylka změřených frekvencí vzhledem k vypočítaným je  $\pm 8,73$  Hz, tj. přibližně 1% z průměrné frekvence, což je relativně dobrá shoda experimentu s teorií. Na vznik této odchylky mohly mít vliv nehomogenity desky, dotyk volné desky s gumami závěsu a příliš hrubý krok ladicího zařízení. Pro další měření by bylo vhodnější použít generátor s jemnějším ladicím zařízením.

V práci je dále popsána konvergence numerického řešení. Ukazuje se, že polynomy zvolené N. S. Bardellem jsou díky větší stabilitě vhodnější pro numerické řešení kmitů volné desky. Lagrangeovy funkce se dají použít jak u volné desky, tak s výhodou u desky podepřené, ale pouze v užším intervalu dělení desky.

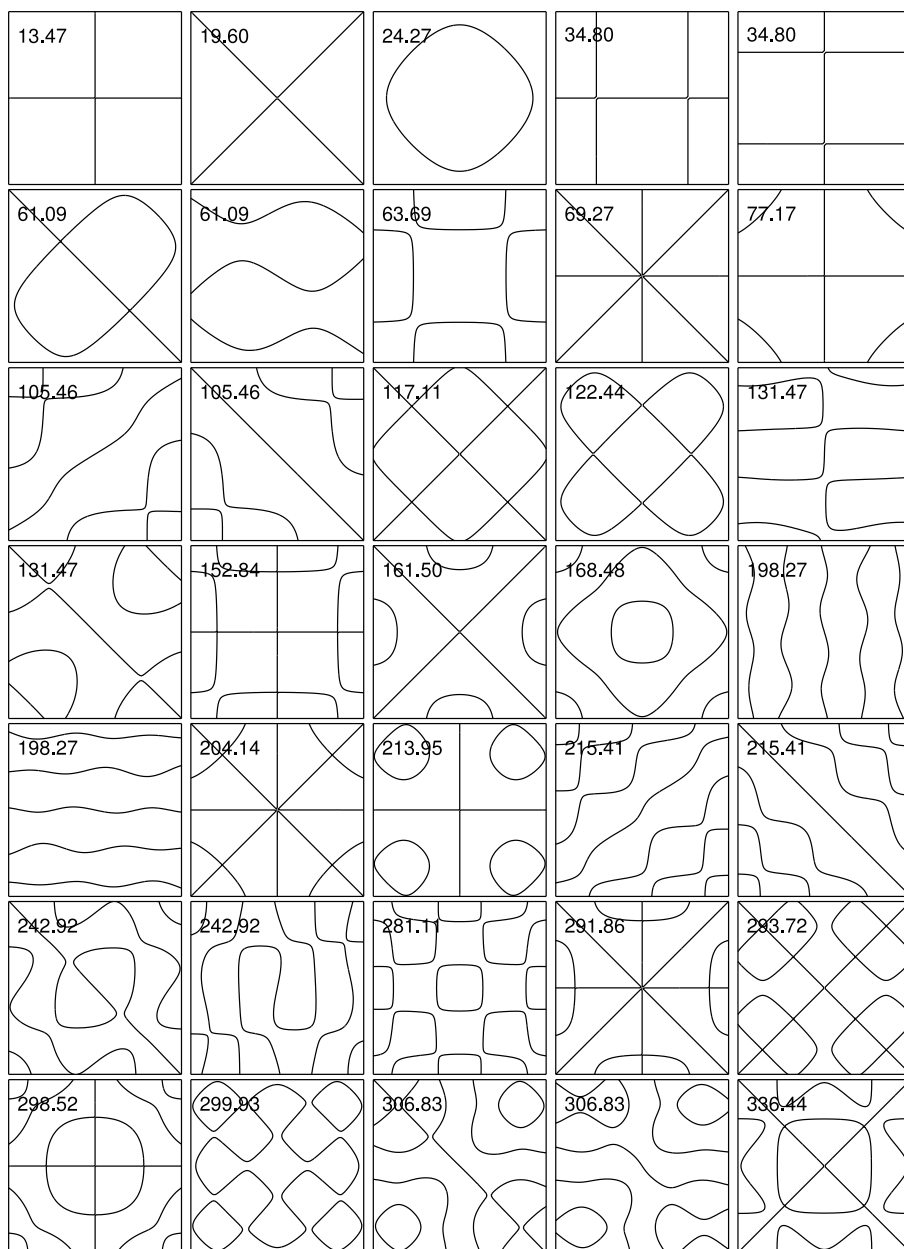
Hledání kmitových módů desky je ekvivalentní kvantově-mechanickému problému hledání vlastních stavů Hamiltoniánu. V kvantové mechanice je známo, že symetrie Hamiltoniánu vede k degeneraci vlastních stavů. Obdobně vlivem čtvercové symetrie dochází u desky k degeneraci některých jejích vlastních frekvencí. Po sejmutí degenerace snížením symetrie desky by odpovídala každému módu jediná frekvence.

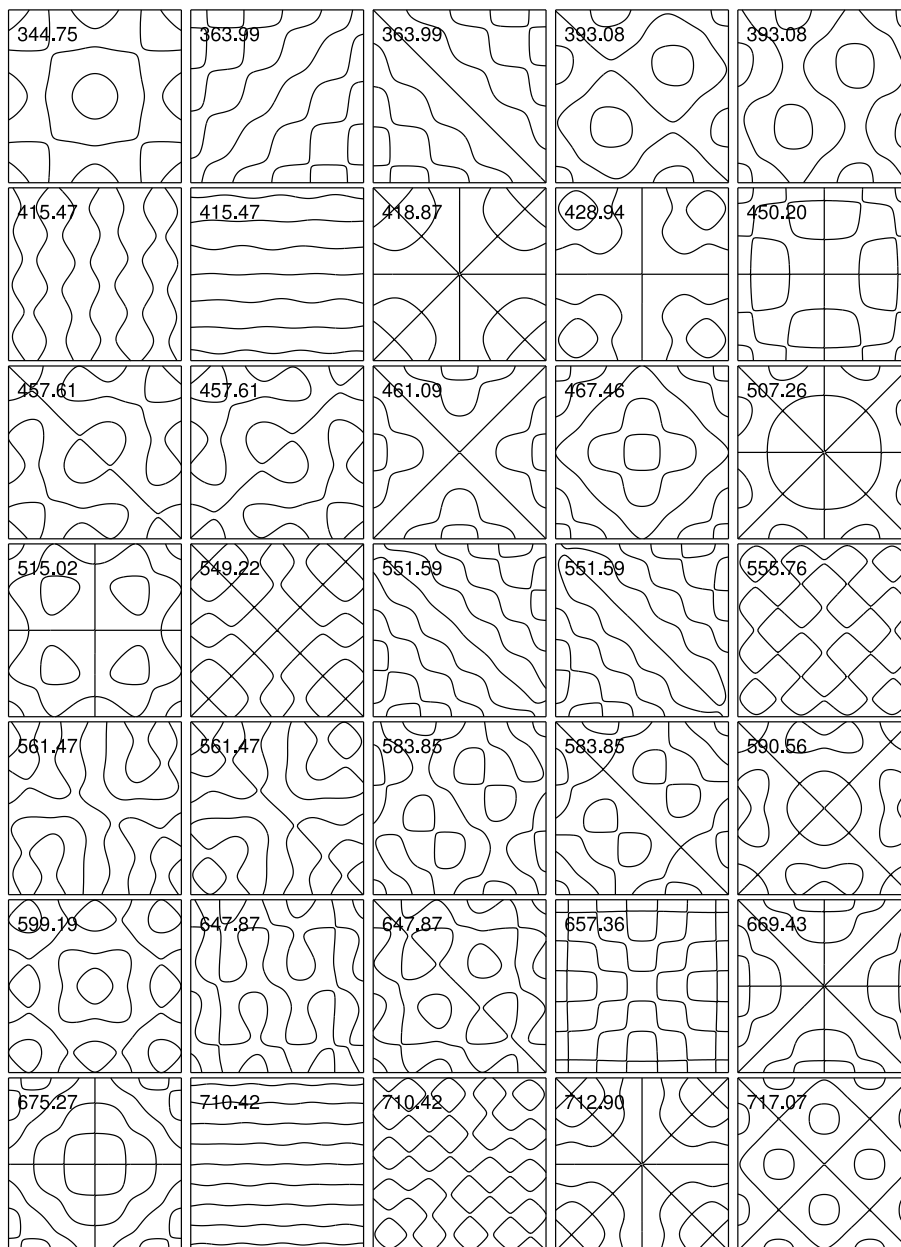




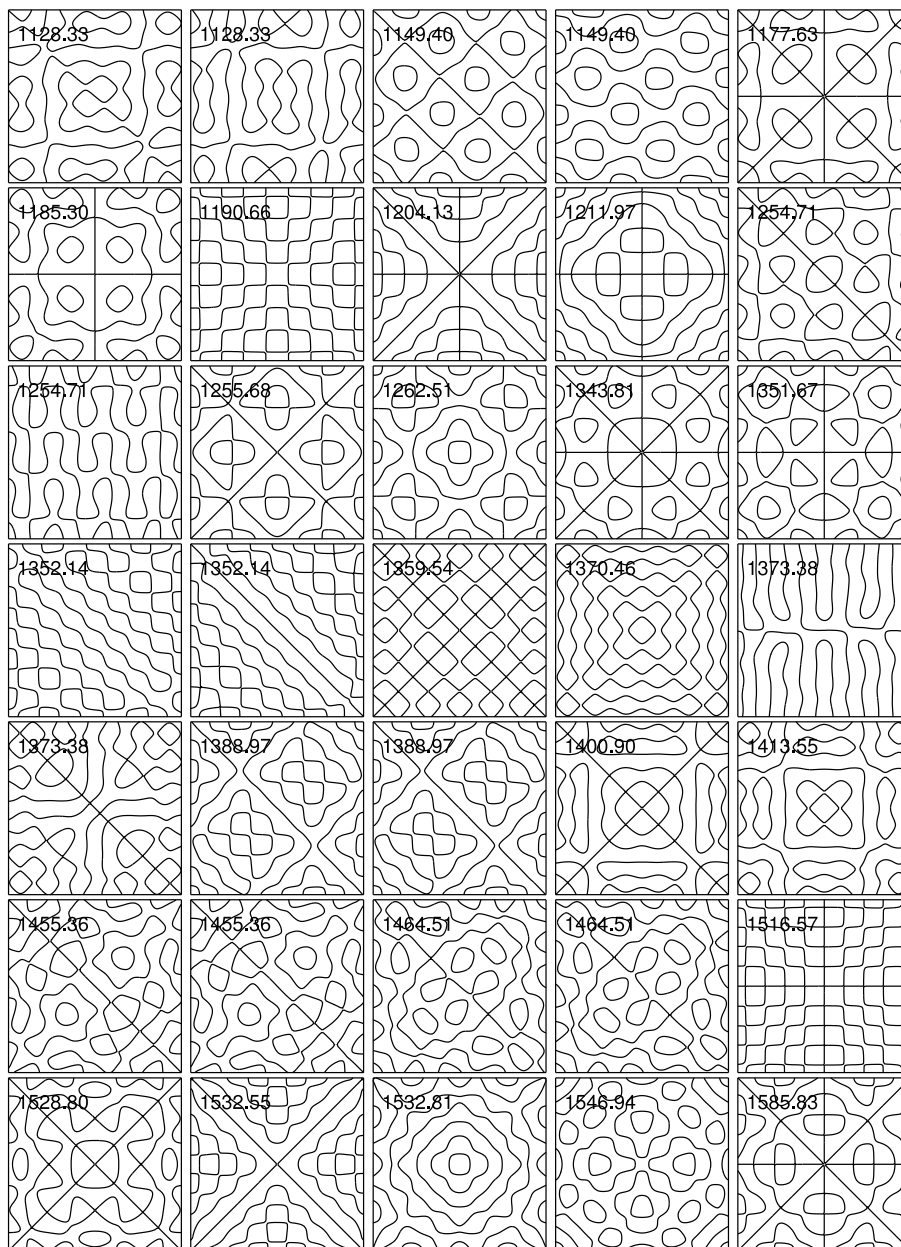
# Dodatek A

## Módy čtvercové desky





724.44	724.91	751.82	751.32	779.63
779.63	800.88	809.04	811.94	811.94
876.71	876.71	884.92	881.79	898.27
898.27	904.25	917.03	921.52	925.67
937.28	965.93	972.95	982.67	982.67
1046.27	1046.27	1052.12	1060.09	1079.24
1079.24	1088.91	1088.91	1089.62	1102.33



## Dodatek B

# Výpis programu

```
p:=5;

sigma:=3/10;

rozmer:=2;

f:='L';

Deska:='podeprena';

vytvorujici_funkce_B:=proc(r,xi)
  local horni_mez;
  if(type(r,even)) then horni_mez:=(r-1)/2
    else horni_mez:=r/2
  end if;
  sum((-1)^n*doublefactorial(2*r-2*n-7)*xi^(r-2*n-1)/
    (2^n*n!*(r-2*n-1)!),n=0..horni_mez );
end proc;

prvni_polynomy_B:=proc(r,xi)
  if(r=1) then return(1/2-3/4*xi+1/4*xi^3) end if;
  if(r=2) then return(1/8-1/8*xi-1/8*xi^2+1/8*xi^3) end if;
  if(r=3) then return(1/2+3/4*xi-1/4*xi^3) end if;
  if(r=4) then return(-1/8-1/8*xi+1/8*xi^2+1/8*xi^3) end if;
end proc;

xi_i:=(i) -> rozmer/(p-1)*(i-1)-1;
vytvorujici_funkce_L:=proc(r,xi)
  local i;
  product(xi-xi_i(i),i=1..(r-1))
  *product(xi-xi_i(i),i=(r+1)..(p))
  /product(xi_i(r)-xi_i(i),i=1..(r-1))
  /product(xi_i(r)-xi_i(i),i=(r+1)..(p));
end proc;

F:=proc(f,r,xi)
  if (f='B') then
```

```

    if (r<5) then prvni_polynomy_B(r,xi);
        else vytvorujici_funkce_B(r,xi);
    end if;
        else vytvorujici_funkce_L(r,xi);
    end if;
end proc;

II:=proc(alpha,beta,r,j)
    if (alpha=0 and beta=0) then
        return int(F(f,r,xi)*F(f,j,xi), xi=-1..1 )
    end if;
    if (alpha=0 and beta<>0) then
        return int(F(f,r,xi)*diff(F(f,j,xi), xi$beta), xi=-1..1);
    end if;
    if (alpha<>0 and beta=0) then
        return int(diff(F(f,r,xi), xi$alpha)*F(f,j,xi), xi=-1..1)
    end if;
    if (alpha<>0 and beta<>0) then
        return int(diff(F(f,r,xi), xi$alpha)*diff(F(f,j,xi), xi$beta),
            xi=-1..1)
    end if;
end proc;

index_r:=(m,p) -> trunc((m-1)/(p))+1;

index_s:=proc(m,p)
    local zbytek;
    zbytek:= m mod (p);
    if zbytek=0 then return (p)
        else return zbytek
    end if;
end proc;

index_j:=(n,p) -> trunc((n-1)/(p))+1;

index_k:=proc(n,p)
    local zbytek;
    zbytek:= n mod (p);
    if zbytek=0 then return (p)
        else return zbytek
    end if;
end proc;

index_m:=(r,s,p) -> (r-1)*(p)+s;

```

```

mm:=(m,n) -> II(0,0,index_r(m,p),index_j(n,p))
           *II(0,0,index_s(m,p),index_k(n,p));
M:=Matrix((p)^2,mm);

kk:=(m,n) -> II(2,2,index_r(m,p),index_j(n,p))
           *II(0,0,index_s(m,p),index_k(n,p))+
           II(0,0,index_r(m,p),index_j(n,p))
           *II(2,2,index_s(m,p),index_k(n,p))+
           sigma*(II(2,0,index_r(m,p),index_j(n,p))
           *II(0,2,index_s(m,p),index_k(n,p))+
           II(0,2,index_r(m,p),index_j(n,p))
           *II(2,0,index_s(m,p),index_k(n,p)))+
           2*(1-sigma)*II(1,1,index_r(m,p),index_j(n,p))
           *II(1,1,index_s(m,p),index_k(n,p));
K:=Matrix((p)^2,kk,shape=symmetric);

MM:=convert(M,matrix):KK:=convert(K,matrix)

if (Deska='podeprena') then
  for i from 1 to p^2 do
    KK[((p^2+1)/2),i]:=0:
    KK[i,((p^2+1)/2)]:=0:
  end do:
end if;

Omega_2:=evalf(Eigenvals(KK,MM,vlastni_vektory));

Omega:=(i,j) -> if (j=1) then i
                else Re(sqrt(Omega_2[i]))
                end if;
Omega_tmp:=Matrix((p)^2,2, Omega);
convert(Omega_tmp,matrix):

freq_sort:=proc(Arr,rozmer)
  local mat_tmp,list_tmp;
  mat_tmp:=[seq]([Arr[i,1],Arr[i,2]],i=1..rozmer);
  list_tmp:=sort(mat_tmp, proc(v1,v2) evalb( v1[2]
  <= v2[2] ) end proc );
  return Matrix(list_tmp):
end proc;

evec_mat_sort:=proc(evec,Om_vec)
  local mat_tmp, i_tmp, mdim, i, j;
  mdim:=LinearAlgebra:-RowDimension(evec);
  mat_tmp:=array(1..mdim,1..mdim);

```

```

for i from 1 to mdim do
  i_tmp:=Om_vec[i,1];
  for j from 1 to mdim do
    mat_tmp[j, i]:=Re(evec[j,i_tmp]);
  end do;
end do;
return Matrix(mat_tmp);
end proc;
Omega_sorted:=freq_sort(Omega_tmp,(p)^2);
convert(Omega_sorted,matrix):

evec:=evec_mat_sort(convert(vlastni_vektory,Matrix),
  Omega_sorted);
convert(evec,matrix):
sort(convert(map(Re,map(sqrt,Omega_2)),list)):

data:=proc(i)
  local vychylka,Obrazky_dat,fd,XI,ETA:
  vychylka:=add(add(evec[index_m(r,s,p),i]
    * F(f,r,xi) * F(f,s,eta),r=1..p),s=1..p):

  if (Deska='podeprena') then
    Obrazky_dat:=cat("Obrazky_podeprena/obrazek_",i,".dat");
  else
    Obrazky_dat:=cat("Obrazky_volna/obrazek_",i,".dat");
  end if;

  fclose(Obrazky_dat);
  fd:=fopen(Obrazky_dat,WRITE);
  for XI from -1 by 0.02 to 1 do
    for ETA from -1 by 0.02 to 1 do
      fprintf(fd,"% .4f ",evalf(subs(xi=XI, eta=ETA,vychylka)));
    end do;
    fprintf(fd,"\n");
  end do;
  fclose (fd);
end proc;

mody:=proc(i)
  local vychylka,Obrazky:
  vychylka:=add(add(evec[index_m(r,s,p),i]
    * F(f,r,xi) * F(f,s,eta),r=1..p),s=1..p):

  if (Deska='podeprena') then

```



```
    Obrazky:=cat("Obrazky_podeprena/obrazek_",i,".ps");
        else
    Obrazky:=cat("Obrazky_volna/obrazek_",i,".ps");
end if;
plotsetup(ps,plotoptions='colour=cmyk,
        noborder',plotoutput=Obrazky);
plot3d(vychylka,xi=-1..1,eta=-1..1,orientation=[0,0],
        style=patchcontour,color=vychylka,
        scaling=constrained,contours=[0], grid=[50,50]);
end proc;

for i from 4 to p^2 do
    data(i);
end do;

for i from 4 to p^2 do
    mody(i);
end do;
```



# Literatura

- [1] LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M. *Theory of Elasticity.* , 1986. 187 s. ISBN 0 7506 2633 X
- [2] BARDELL, N. S. *Chladni figures for completely free parallelogram plates: An analytical study.* Journal of Sound and Vibration, 1994, 174(5), 655-676, 21 s.
- [3] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua.* 3. vyd. Praha : Academia, 2005. 800 s. ISBN 80-200-1344-X
- [4] GOUGELET, P., *XnView* [online]. 2006, 2006-04-02 [cit. 2006-04-13]. Dostupný z WWW: <<http://www.xnview.org>>
- [5] SAADATPOUR, M. M., AZHARI, M., BRADFORD, M. A. *Vibration analysis of simply supported plates of general shape with internal point and line supports using the Galerkin method.* Engineering Structures, 2000, 22, 1180-1188, 8 s.
- [6] ABRATE, S. *Vibration of point-supported rectangular composite plates.* Composites Science and Technology, 1995, 53, 325-332, 7 s.
- [7] BOURKE, P., *Chladni Plate Mathematics* [online]. 2003, [cit. 2006-01-13]. Dostupný z WWW: <<http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/modelling/chladni/>>