

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Studium povrchového napětí



Vedoucí bakalářské práce:
doc. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Rok odevzdání: 2007

Vypracoval:
Martin Šarbort
FY, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně pod vedením doc. Mgr. Tomáše Tyce, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje, ze kterých jsem čerpal.

V Brně dne 21. května 2007

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce doc. Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D., a konzultantu Mgr. Ondřeji Příbylovi za čas věnovaný konzultacím a za podnětné připomínky a nápady během vzniku této práce.

Anotace

Povrchové napětí kapalin má původ ve vzájemné přitažlivosti molekul a projevuje se snahou kapaliny zaujmout tvar s co nejmenším povrchem. Existence povrchového napětí má rozsáhlé důsledky v přírodě i technické praxi. Tato práce se věnuje analýze několika jevů, v nichž hraje povrchové napětí zásadní roli. Výsledky vyplývající z vypracovaných teoretických modelů jsou srovnány se závěry provedených experimentů.

Annotation

Surface tension of liquids is caused by the attraction between the molecules and shows itself by tendency of liquid to take the shape with minimal surface. The existence of surface tension has large consequences in nature and technical practice. This thesis deals with several effects in which the surface tension plays fundamental role. The results of theoretical models that have been developed are compared with conclusions of realized experiments.

Obsah

1	Úvod	1
2	Laplaceova-Youngova rovnice	3
3	Vrstvička kapaliny mezi dvěma prstenci	5
3.1	Teoretické řešení	5
3.2	Experiment	6
4	Bublina vzduchu na hladině kapaliny	8
4.1	Teoretické řešení	8
4.2	Numerické řešení	12
5	Kapka kapaliny na brčku	15
5.1	Teoretické řešení	15
5.2	Numerické řešení a experiment	16
6	Oscilující proud kapaliny	19
6.1	Řešení pomocí komplexního potenciálu	19
6.2	Řešení pomocí variačního počtu	22
6.3	Experiment	25
6.3.1	Mód 2 – vodorovný proud	25
6.3.2	Mód 2 – svislý proud	27
6.3.3	Mód 3 – vodorovný proud	29
6.3.4	Vliv povrchově aktivní látky	32
6.3.5	Srovnání metod a závěr měření	34
7	Rotující proud kapaliny	35
7.1	Teoretické řešení	35
8	Závěr	37

Kapitola 1

Úvod

Povrchové napětí je zajímavý fyzikální jev, který vzniká na rozhraní kapalně a plynné fáze. Povrchová vrstva kapaliny má odlišné vlastnosti než zbytek kapaliny a chová se jako pružná blána. Na hladinu kapaliny můžeme opatrně položit malou minci či jehlu a pokud blánu neprotrhneme, zůstane předmět ležet na hladině, aniž by se potopil.

Původ povrchového napětí můžeme objasnit pomocí celkové potenciální energie molekul kapalinového tělesa. Vezměme kulovou kapku kapaliny a začněme ji deformovat do tvaru válce. Střední hodnota vzdálenosti mezi dvěma molekulami je ve válci větší než v kouli, při deformaci tedy průměrně dochází ke vzdalování molekul. Abychom molekuly od sebe mohli vzdálit, musíme překonat vzájemně působící přitažlivé síly, tj. je třeba vykonat určitou práci. Odpudivé síly zde není třeba uvažovat, neboť ty působí pouze na velmi malých vzdálenostech. Dá se ukázat, že vykonaná práce je přímo úměrná změně povrchu kapaliny. Jinak řečeno, změna celkové potenciální energie kapalinového tělesa během deformace je přímo úměrná změně povrchu, bez ohledu na tvar tělesa. V důsledku toho se kapalina v rámci možností příslušných konkrétní fyzikální situaci snaží zaujmout tvar s co nejmenším povrchem, chová se podobně jako by její povrch byl tvořen tenkou pružnou blánou. V beztížném stavu na oběžné dráze kolem Země zaujme kapka kapaliny přesně kulový tvar, protože koule je pro daný objem útvar s nejmenším možným povrchem. Na rozhraní kapaliny a pevné látky, plynu a pevné látky či dvou různých kapalin dochází k analogickému jevu jako na rozhraní kapaliny a plynu, v tomto případě se obvykle používá termín mezifázové napětí.

Existence povrchového napětí má rozsáhlé důsledky v přírodě i technické praxi. Známým příkladem je pohyb vodoměrek po hladině rybníku. Díky nesmáčivým chloupkům na jejich končetinách se povrchová vrstva vody neprotrhne, ale jen lehce prohne, a povrchové napětí udrží vodoměrku na hladině.

Vodní ptáci mohou plavat na vodě díky mezifázovému napětí. Vrstvička oleje na pírkách odpuzuje vodu, která nemůže proniknout pod horní vrstvu peří. Jednoduše řečeno, mezi mastným peřím a vodou je relativně velké mezifázové napětí, které pronikání vody přes fázové rozhraní zabraňuje. Mezi pírkou ve spodnějších vrstvách zůstává mnoho vzduchu, který pomáhá vodního ptáka nadnášet. Zároveň suché vnitřní peří funguje jako izolace těla od studnější vody. Velký problém nastává při haváriích ropných tankerů. Pokud ropa unikne do moře, zkoncentruje se v tenké vrstvě na hladině a vytvoří tzv. ropnou skvrnu.

Ptáci zasažení ropným povlakem se utopí, zmrznou anebo se otráví přímo samotnou ropou.

V zemědělství se využívá vlastností povrchového napětí např. při přípravě chemických postřiků tak, aby rozprašovaná kapalina ulpěla jen na vybraném druhu rostlin.

Na jevech spojených s povrchovým napětím jsou založeny celá odvětví chemie. Např. koloidní chemie se zabývá studiem vlastností a využití soustav, ve kterých je jedna látka velmi jemně (koloidně) rozptýlena ve druhé. Takové soustavy netvoří ani homogenní směsi, ale ani řádně se chovající vícefázové soustavy.

Tato práce se věnuje analýze několika jevů, v nichž hraje povrchové napětí zásadní roli. Východiskem řešení téměř všech námi uvažovaných problémů je tzv. Laplaceova-Youngova rovnice popisující rozdíl tlaků nad a pod zakřiveným povrchem fázového rozhraní, proto je jí na začátku textu věnována samostatná kapitola.

Prvním zkoumaným jevem bude chování tenké vrstvičky kapaliny, která se díky povrchovému napětí udrží v kruhovém drátěném rámečku poté, co jej vytáhneme z nádoby s kapalinou. Pro dané okrajové podmínky nalezneme tvar, který blána zaujme. V další kapitole se pokusíme popsat tvar bubliny vzduchu nacházející se na hladině kapaliny. Podobného postupu jako u bubliny pak použijeme u následujícího tématu, kdy se budeme zabývat přesahem kapaliny přes okraj nádoby, ke kterému dojde při jejím přeplnění. Tento efekt je opět podmíněn existencí povrchového napětí. Poslední a nejrozsáhlejší část bude věnována popisu chování tenkého proudu kapaliny, který vytéká z otvoru, jehož průřez není přesně kruhový. Ukážeme, že vlivem povrchového napětí začne tvar průřezu proudu oscilovat kolem kruhového tvaru s určitou charakteristickou frekvencí, navenek se tyto oscilace projeví jako tzv. kapilární vlny.

Teoretický rozbor jednotlivých problémů je doplněn popisem a vyhodnocením experimentů, které byly provedeny za účelem ověření správnosti vypracovaných teoretických modelů. V případě tenké vrstvičky kapaliny a přesahu kapaliny nad okrajem nádoby porovnáme skutečný tvar kapaliny s tvarem určeným na základě numerického řešení příslušných diferenciálních rovnic. Pro bublinu na hladině kapaliny se pomocí numerického řešení rovnic pokusíme alespoň vykreslit tvar bublin různých velikostí. Nejrozsáhlejší experimentální část se pak bude zabývat chováním proudu kapaliny. Pro konkrétní nekruhové výtokové otvory vybudíme oscilace povrchu proudu s charakteristickou úhlovou frekvencí, kterou změříme a srovnáme s teoreticky vypočtenou hodnotou.

Kapitola 2

Laplaceova-Youngova rovnice

Fyzikální veličina *povrchové napětí* σ je definována jako síla, která působí ve směru tečny k povrchu kapaliny kolmo na úsečku jednotkové délky myšleného řezu povrchem. Pro velikost síly dF působící kolmo na úsečku řezu povrchem délky dl potom platí vztah

$$dF = \sigma dl. \quad (2.1)$$

Povrchové napětí má ve všech místech povrchu kapaliny stejnou velikost.

V roce 1805 ukázal Thomas Young (a nezávisle na něm o něco později i Pierre Simon de Laplace), že mechanické vlastnosti povrchové vrstvy kapaliny jsou shodné s chováním tenké pružné blány. U této analogie je třeba dávat pozor především na to, že velikost povrchového napětí u blány závisí na její velikosti, zatímco u kapalin tomu tak není.

Pomocí této představy můžeme odvodit podmínku mechanické rovnováhy pro zakřivené rozhraní kapaliny a plynu. Na Obrázku 2.1 je znázorněn řez zakřiveným povrchem kapaliny (plyn je nad rozhraním, kapalina pod ním). Pro jednoduchost uvažujme nejdříve válcový povrch. Oba oblouky AB a CD mají poloměr křivosti r_1 , středový úhel $d\varphi$ a délku dl . Úsečky BC a AD mají shodnou délku ds .

Na plošku ABCD působí čtyři síly pocházející od povrchového napětí. Ze symetrie je jasné, že $\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{0}$. Součet zbývajících dvou sil \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 označíme jako \mathbf{F}_{1+2} . Působíště této síly můžeme umístit do středu S plošky ABCD, směr je zřejmý z obrázku. Pro její velikost platí

$$F_{1+2} = 2\sigma ds \sin \frac{d\varphi}{2}. \quad (2.2)$$

Pro malé úhly $d\varphi$ můžeme aproximovat $\sin \frac{d\varphi}{2} \doteq \frac{d\varphi}{2}$ a máme

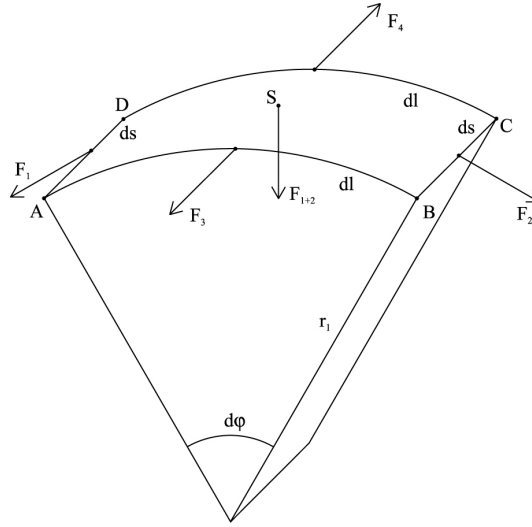
$$F_{1+2} = \sigma ds d\varphi. \quad (2.3)$$

Působí-li na rozhraní ze strany kapaliny tlak p_{in} a ze strany plynu tlak p_{out} , nastane rovnováha pouze v případě, že výsledná síla na rozhraní je nulová. Tedy

$$(p_{\text{in}} - p_{\text{out}}) dl ds = F_{1+2}. \quad (2.4)$$

Vyjádřením síly F_{1+2} z rovnice (2.3), využitím vztahu $dl = r_1 d\varphi$ a drobnou úpravou dostaneme

$$p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = \frac{\sigma}{r_1}. \quad (2.5)$$



Obrázek 2.1: Řez povrchem kapaliny

Tato rovnice je speciálním případem tzv. Laplaceovy-Youngovy rovnice. Její obecné vyjádření obdržíme analogickým postupem pro obecně zakřivený povrch. Ten v daném bodě charakterizují dva poloměry křivosti r_1 a r_2 , které měříme ve vzájemně kolmých směrech v rovině tečné k povrchu sestavené v tomto bodě. Obecné vyjádření Laplaceovy-Youngovy rovnice pak nabývá tvaru

$$p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.6)$$

Poslední rovnice nám říká, že tlak pod zakřiveným povrchem je vždy větší než tlak nad ním a rozdíl těchto tlaků je přímo úměrný povrchovému napětí kapaliny. Slovem „pod“ zde musíme rozumět stranu, ze které se povrch jeví jako vypouklý (konvexní), slovem „nad“ stranu, ze které je povrch dutý (konkávní). Toto tvrzení samozřejmě platí i pro obrácený případ, kdy je pod zakřiveným povrchem plyn, např. bublinka vzduchu ve vodě. Rovnice (2.5), popř. (2.6) budou výchozím bodem pro většinu z námi řešených problémů.

Poloměry křivosti můžeme vypočítat pomocí vzorců známých z analytické geometrie. V rovinném případě obvykle volíme soustavu souřadnic tak, že osa z je svislá (směr shodný se směrem tíhového zrychlení) a osa x vodorovná. Pak pro křivku popsanou funkcí $z(x)$ vypočteme první poloměr křivosti r_1 ze vztahu

$$r_1 = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''}, \quad (2.7)$$

kde čárka značí derivaci podle x -ové souřadnice. V případě, že je námi studovaný útvar symetrický vůči libovolné rotaci kolem osy z , můžeme využít převodu do válcových souřadnic. Pak hledáme křivku $z(r)$, kde r je vzdálenost od osy z . Pro poloměry křivosti lze použít vzorce

$$r_1 = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''}, \quad r_2 = \frac{r(1 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}{z'}, \quad (2.8)$$

kde tentokrát čárka značí derivaci podle souřadnice r .

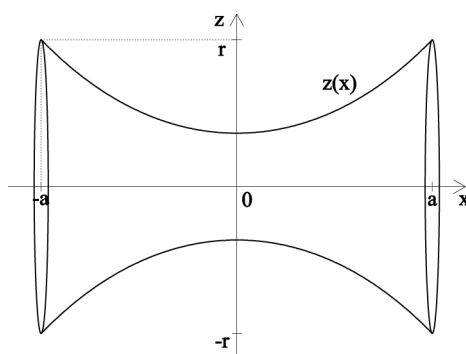
Kapitola 3

Vrstvička kapaliny mezi dvěma prstenci

Mějme dva shodné kruhové prstence o poloměru r . Umístíme je rovnoběžně vedle sebe ve vzdálenosti $2a$ tak, aby spojnice středů byla kolmá na roviny prstenců. Jaký tvar bude mít tenká vrstvička kapaliny natažená mezi prstenci?

3.1 Teoretické řešení

Zvolme soustavu souřadnic podle Obrázku 3.1. Osa x je shodná se spojnicí středů prstenců, počátek je ve středu této spojnice. Osa z je kolmá na osu x a má počátek v témže bodě. Povrchová energie kapaliny bude nejmenší, pokud povrch membrány bude nejmenší možný.



Obrázek 3.1: Vrstvička kapaliny mezi dvěma prstenci

Vzhledem k symetrii problému můžeme říct, že úloha spočívá v nalezení křivky $z(x)$, jejíž rotací kolem osy x dostaneme plochu s nejmenším povrchem. Povrch S je vyjádřen integrálem

$$S = 2\pi \int z\sqrt{1+z'^2} dx. \quad (3.1)$$

Hledání minima funkcionálu $S[z(x)]$ provedeme pomocí variačního počtu. Označme $F = z\sqrt{1 + z'^2}$. Funkce F musí splňovat Eulerovu rovnici

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0. \quad (3.2)$$

Protože funkce F nezávisí explicitně na souřadnici x , můžeme použít první integrál této rovnice

$$F - z'F_{z'} = C_1. \quad (3.3)$$

Po dosazení a zjednodušení dostáváme diferenciální rovnici

$$z = C_1\sqrt{1 + z'^2}. \quad (3.4)$$

Substitucí

$$z' = \frac{dz}{dx} = \sinh t \quad (3.5)$$

v rovnici (3.4) dostaneme parametrické vyjádření

$$z = C_1 \cosh t. \quad (3.6)$$

Diferenciací posledního výsledku, dosazením do rovnice (3.5) a následnou integrací dostaneme druhou parametrickou rovnici

$$x = C_1 t + C_2. \quad (3.7)$$

Po vyloučení parametru t obdržíme výsledek

$$z = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right). \quad (3.8)$$

Konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek. Pro námi zvolenou soustavu souřadnic musí konstanty splňovat rovnice

$$C_2 = 0, \quad C_1 \cosh \frac{a}{C_1} = r. \quad (3.9)$$

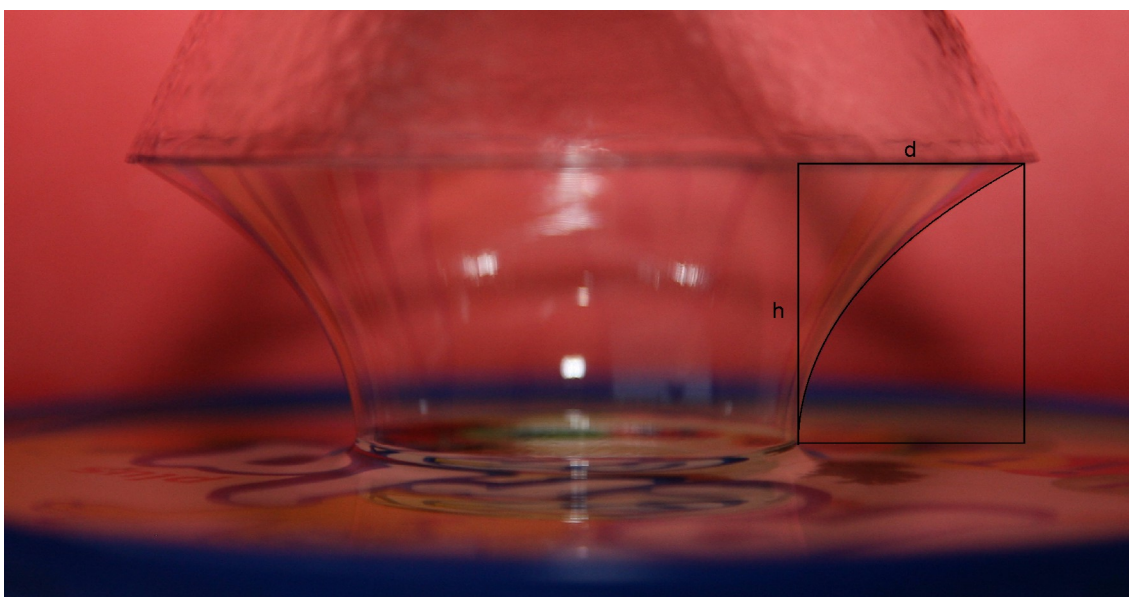
Křivka popsaná rovnicí (3.8) se nazývá řetězovka. Můžeme ji nalézt i v dalších fyzikálních situacích, např. při hledání tvaru řetězu prověšeného v tíhovém poli mezi dvěma body – právě díky tomuto problému získala své jméno.

3.2 Experiment

Při experimentálním ověření tvaru blány jsem zvolil následující postup. Pro výrobu prstence jsem použil PET láhev, z níž jsem ustříhl tvrdé hrdlo i s částí tenkého plastu pod ním tak, aby spodní okraj měl tvar kružnice. Do mělké nádoby jsem nalil kapalinu používanou v „bublifucích“ a ponořil do ní kruhový okraj plastu. Poté jsem jej začal pomalu vytahovat a mezi plastem a povrchem kapaliny se vytvořila rotačně symetrická

blána. Přitom bylo třeba, aby prstenec byl rovnoběžný s hladinou kapaliny v nádobce. Je zřejmé, že tak vznikla jen polovina blány zakreslené na Obrázku 3.1 (např. pro $x \geq 0$), nicméně vzhledem k symetrii situace to na její profil nemělo žádný vliv.

Fotografie vytvořené blány je na Obrázku 3.2. Profil je charakterizován rozdílem poloměrů d v nejužší a nejširší části a rozdílem výšek h mezi těmito dvěma místy. Pro vypočtení části řetězovky, jež by měla být shodná s profilem blány, je třeba znát poměr h/d . Pro naši fotografii vyšlo $h/d = 1,23$. Vypočtená křivka je spolu s pomocným rámečkem umožňujícím měření parametrů h a d přiložena k fotografii. Shoda profilu blány s křivkou je velmi dobrá.



Obrázek 3.2: Blána mezi prstencem a hladinou kapaliny

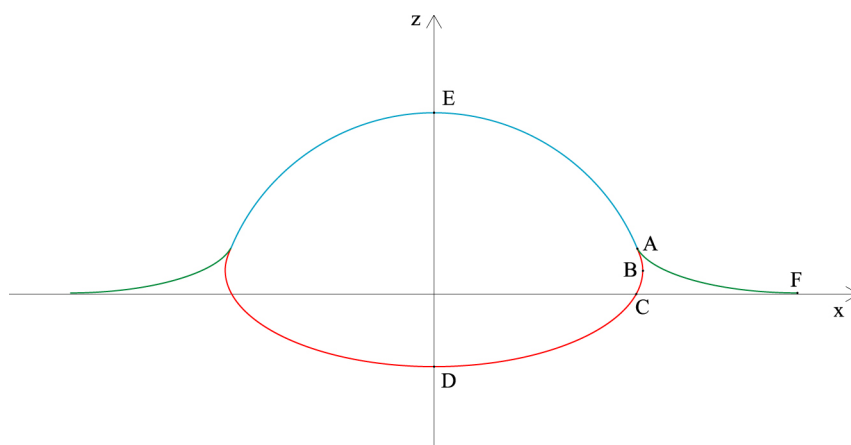
Kapitola 4

Bublina vzduchu na hladině kapaliny

Vezměme otevřenou nádobu naplněnou kapalinou. Pod úrovní hladiny se ve stěně nádoby nachází malý otvor, kterým můžeme do kapaliny vhnět vzduch. Vzniklá bublinka vzduchu vystoupá k hladině, kde po chvíli zaujme určitý rovnovážný tvar, jenž se bude pro různé velké bubliny lišit. Jaký tvar to bude?

4.1 Teoretické řešení

Bublina vzduchu a okolní hladina kapaliny zaujmou takový tvar, aby celková energie soustavy byla minimální. Ze symetrie úlohy je zřejmé, že tvar bubliny je invariantní vzhledem k rotaci kolem svislé osy procházející vrcholem bubliny. Tuto osu ztotožníme se souřadnicovou osou z . Rovina xy je na osu z kolmá a ve velké vzdálenosti od bubliny je shodná s vodorovnou hladinou kapaliny. Počátek soustavy souřadnic je jednoznačně definován průnikem všech tří souřadných os.

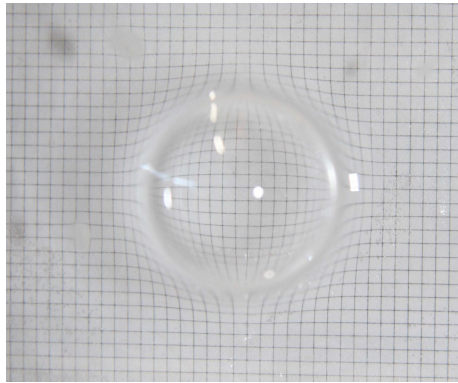


Obrázek 4.1: Řez bublinou vzduchu na hladině kapaliny

Na Obrázku 4.1 je náčrtek řezu bublinou a okolní kapalinou v rovině xz . Definujme pomocí něj několik bodů, které budou při popisu bubliny užitečné. Přitom stačí analyzovat pouze jednu stranu, neboť řez je osově symetrický podle osy z . Nejnižší položený bod

povrchu bubliny označíme D. Od něj směrem nahoru je povrch určen fázovým rozhraním mezi vzduchem a kapalinou. Bod C leží v rovině $z = 0$. Nad úrovní volné hladiny se povrch dále zakřivuje do bodu B, v němž má tečna ke křivce svislý směr. O něco výše nad bodem B leží bod A, v němž se stýká povrch bubliny doposud zakreslený červenou barvou s povrchem okolní kapaliny vyznačeným zeleně. Bod F leží na křivce popisující hladinu okolní kapaliny v takové vzdálenosti od bubliny, kde se hodnota jeho z -ové souřadnice blíží nule. Od bodu A směrem nahoru až na vrchol E odděluje vzduch v bublině od vzduchu v atmosféře tenká vrstvička kapaliny sevřená mezi dvěma povrchy (okolní kapaliny a bubliny). Při výpočtech budeme zanedbávat konečnou tloušťku této vrstvy a oba povrchy ztotožníme (modrá křivka).

Zakřivení hladiny kapaliny směrem nahoru v těsném okolí bubliny lze jednoduše prokázat pomocí Obrázku 4.2. Zde je bublina vyfotografována shora, přičemž pod nádobu s vodou jsem umístil čtverečkový papír. Zcela jednoznačně je vidět deformace obrazu čtvercové sítě způsobená zakřivením hladiny.



Obrázek 4.2: Zakřivení kapaliny v okolí bubliny

Pro první výpočty si situaci zjednodušíme modelem nekonečně dlouhé válcové bubliny, jejíž podélná osa je shodná s osou y . Pak můžeme Obrázek 4.1 použít jako náčrtek řezu válcovou bublinou. Místo toho, abychom hledali povrch rotačně symetrické bubliny určený dvourozměrnou plochou $z(x, y)$ v trojrozměrném prostoru, budeme hledat diferenciální rovnici popisující jednorozměrnou křivku $z(x)$ ležící v rovině. Při výpočtech tedy stačí uvažovat jen první poloměr křivosti r_1 .

Jestliže je bublina v rovnováze, je tlak v celém jejím objemu konstantní (zde zanedbáváme závislost tlaku vzduchu na výšce v tíhovém poli). Protože je povrch bubliny zakřivený, je tlak uvnitř p_{in} vyšší než atmosférický tlak p_{a} . Podle Laplaceovy-Youngovy rovnice (2.5) mezi nimi platí vztah

$$p_{\text{in}} = p_{\text{a}} + \frac{2\sigma}{r_0}, \quad (4.1)$$

kde r_0 je poloměr křivosti povrchu v oblasti nad bodem A. Protože p_{in} i p_{a} jsou konstantní, bude v této oblasti konstantní i poloměr r_0 . Jinak řečeno, tvar křivky mezi body A a E je částí kružnice. Faktor 2 v druhém členu na pravé straně vyjadřuje skutečnost, že vrstvička

kapaliny mezi body A a E má dva povrchy. Tlak v kapalině mezi těmito povrchy je roven $p_a + \frac{\sigma}{r_0}$.

Od bodu A směrem dolů je tlak v kapalině p_{out} dán součtem atmosférického a hydrostatického tlaku. V námi zvolené souřadné soustavě platí

$$p_{\text{out}} = p_a - \rho g z, \quad (4.2)$$

přičemž g je tíhové zrychlení a ρ hustota kapaliny.

Zvolme jedno konkrétní místo na křivce $z(x)$, v němž má poloměr křivosti hodnotu r_1 . Z vnitřní strany bubliny působí na rozhraní tlak p_{in} , ze strany kapaliny tlak p_{out} . Protože je soustava v rovnováze, musí platit Laplaceova-Youngova rovnice

$$p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = \frac{\sigma}{r_1}. \quad (4.3)$$

Vyjádřením tlaků podle předchozích rovnic a poloměru křivosti dle rovnice (2.7) dostaneme po drobné úpravě diferenciální rovnici

$$\rho g z - \sigma \frac{z''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sigma}{r_0} = 0. \quad (4.4)$$

Tuto rovnici lze ještě lehce upravit. Označíme-li

$$L = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \quad (4.5)$$

můžeme zavést substituci

$$x = LX, \quad z = LZ. \quad (4.6)$$

Odvodíme vztahy pro první a druhou derivaci (čárka značí derivaci podle příslušné x -ové souřadnice, tedy x nebo X)

$$z' = Z', \quad z'' = \frac{Z''}{L} \quad (4.7)$$

a označíme $R_0 = r_0/L$. Po aplikaci substituce v rovnici (4.4) dostaneme

$$Z - \frac{Z''}{(1+Z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{R_0} = 0. \quad (4.8)$$

Vyřešíme-li tuto diferenciální rovnici, získáme po návratu k původním proměnným předpis pro křivku $z(x)$ popisující tvar válcové bubliny pod bodem A.

Během úprav jsme zavedli veličinu L , jež se obvykle nazývá *kapilární délka*. Rozměrovou zkouškou se můžeme jednoduše přesvědčit o tom, že její jednotkou je metr. Fyzikální význam kapilární délky můžeme ilustrovat na následující situaci. Bublina vzduchu nacházející se v kapalině zaujme téměř tvar koule o poloměru r , jestliže tlak uvnitř bubliny bude o hodně větší než rozdíl hydrostatického tlaku v kapalině mezi dvěma místy, jejichž výška se liší o $2r$. Musí platit

$$\frac{2\sigma}{r} \gg 2r\rho g. \quad (4.9)$$

Faktor 2 na levé straně vyplývá z toho, že v případě kulové bubliny je třeba počítat s oběma poloměry křivosti, přitom oba mají stejnou hodnotu r . Zavedením L dostaneme

$$L^2 \gg r^2. \quad (4.10)$$

Kapilární délka L tedy vyjadřuje, jak malá musí bublina být, aby nebyla deformována vlivem tíhového pole. Obecněji řečeno, poměr velikosti studované soustavy vůči kapilární délce určuje, zda budou převažovat efekty způsobené povrchovým napětím nebo tíhovým polem. Pro vodu číselně vychází přibližně $L = 2,7$ mm.

Vraťme se nyní zpět k bublině na hladině. Ještě zbývá určit tvar povrchu okolní kapaliny. Jak bylo uvedeno výše, hladina poblíž bubliny bude zakřivena směrem vzhůru. Shora na ni působí atmosférický tlak p_a , zesponu ze strany kapaliny je tlak vlivem zakřivení o něco nižší než atmosférický. Abychom se díky nárůstu hydrostatického tlaku v kapalině dostali pod zakřiveným povrchem na úrovni $Z = 0$ na hodnotu atmosférického tlaku, musí být pro model válcové bubliny splněna rovnice

$$Z - \frac{Z''}{(1 + Z'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (4.11)$$

Na Obrázku 4.1 jsme jednotlivé části křivek označili barvami. K povrchu bubliny určenému diferenciální rovnicí (4.8) a znázorněnému červenou barvou se v bodě A těsně přimyká povrch okolní kapaliny určený rovnicí (4.11) a zakreslený zeleně. Nad bodem A pokračují oba povrchy odděleny jen velmi tenkou vrstvičkou kapaliny, proto jsme je v náčrtku nahradili modrou křivkou, která je částí kružnice. V bodě A tedy nutně dochází ke skokové změně poloměru křivosti. Aby byl bod A v rovnovážném případě v klidu, musí být příslušné jednostranné derivace všech tří křivek v tomto bodě shodné. Pokud by shodné nebyly, působila by na bod A nenulová výsledná síla pocházející od povrchového napětí.

Přejdeme k modelu rotačně symetrické bubliny. Vzhledem k symetrii úlohy je výhodné použít polární souřadnice. Na náčrtku řezu bublinou (viz Obrázek 4.1) stačí změnit označení kartézské osy x na polární osu r . Nad úrovní bodu A tvoří povrch bubliny část polokoule o poloměru r_0 , uvnitř bubliny má vzduch tlak

$$p_{\text{in}} = p_a + \frac{4\sigma}{r_0}. \quad (4.12)$$

Faktor 4 se v druhém členu na pravé straně objeví proto, že je třeba brát v úvahu oba poloměry křivosti, jenž jsou v případě polokoule shodné. Vyjádření tlaku v kapalině zůstává shodné s rovnicí (4.2). Pro oblast pod bodem A je třeba použít Laplaceovu-Youngovu rovnici ve tvaru

$$p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (4.13)$$

Vyjádřením jednotlivých členů a úpravou dostaneme pro křivku $z(r)$ popisující tvar bubliny diferenciální rovnici

$$\rho g z - \sigma \frac{z''}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \sigma \frac{z'}{r(1 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4\sigma}{r_0} = 0. \quad (4.14)$$

Zavedením substituce

$$r = LR, \quad z = LZ \quad (4.15)$$

zcela analogické substituci (4.6) dostaneme diferenciální rovnici (4.14) ve tvaru

$$Z - \frac{Z''}{(1 + Z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Z'}{R(1 + Z'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{R_0} = 0. \quad (4.16)$$

Analogickou úvahou jako u válcové bubliny dospějeme pro tvar povrchu kapaliny okolo rotačně symetrické bubliny k diferenciální rovnici

$$Z - \frac{Z''}{(1 + Z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Z'}{R(1 + Z'^2)^{\frac{1}{2}}} = 0. \quad (4.17)$$

4.2 Numerické řešení

Nalézt analytické řešení rovnic (4.8) a (4.11) pro model válcové bubliny nebo rovnic (4.16) a (4.17) pro rotačně symetrickou bublinu se mi nepodařilo. Pokusil jsem se tedy alespoň o numerické řešení tvaru válcové bubliny za pomoci programu GNU Octave.

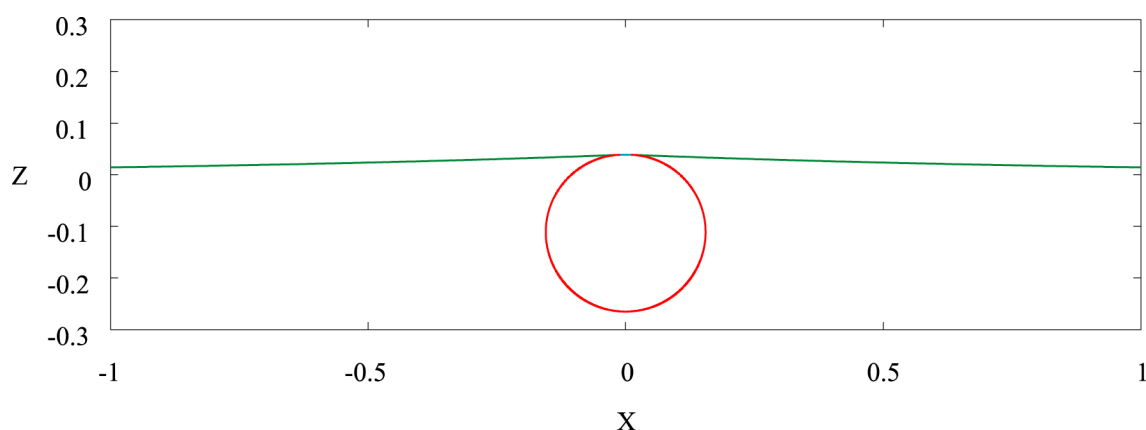
Využijeme předchozího rozdělení na tři křivky dle Obrázku 4.1. Začneme s řešením rovnice (4.8) pro spodní část povrchu bubliny. Pevně zvolíme hodnotu poloměru křivosti R_0 . Z -ovou souřadnici bodu D označíme Z_D a derivaci v tomto bodě Z'_D . Na začátku zvolíme hodnotu Z_D libovolně. Z teoretického rozboru vyplývá, že derivace Z'_D je rovna nule, nicméně pro numerické řešení je třeba zvolit velmi malou, avšak nenulovou hodnotu. Pro tyto počáteční podmínky program vygeneruje křivku mezi body D a B.

Pro výpočet křivky dále nad bod B je třeba u druhého členu na pravé straně v rovnici (4.8) změnit znaménko. Nové počáteční podmínky udává Z -ová souřadnice bodu B a derivace v tomto bodě. Vypočteme část křivky nad bod B, avšak zatím nevíme, kde přesně se nachází bod A. Dále vygenerujeme křivku popisující povrch okolní hladiny podle rovnice (4.11). Pevnými počátečními podmínkami jsou Z -ová souřadnice bodu F, která je rovna nule, a derivace v tomto bodě, která je opět velmi malá.

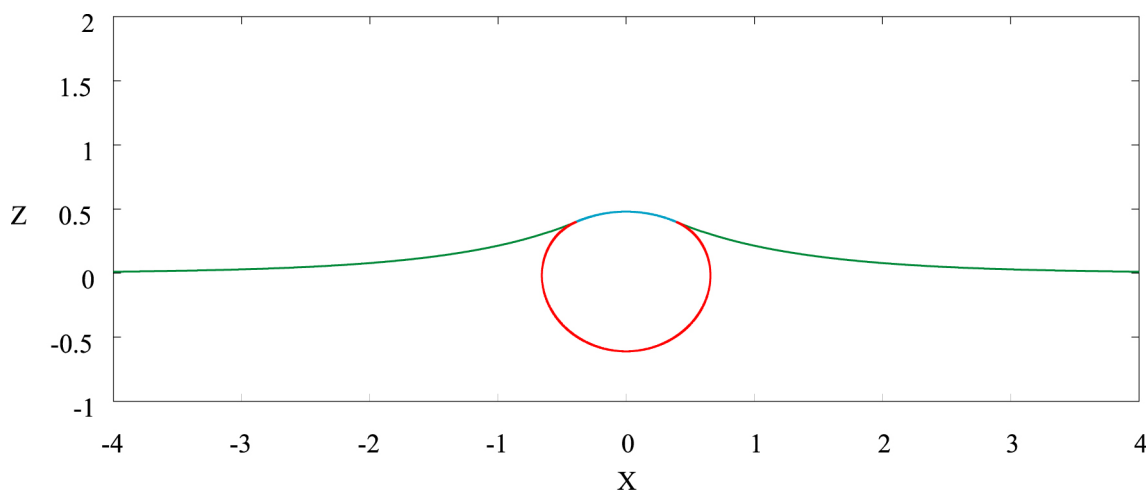
Pro předem zvolené ekvidistantní dělení osy X na diskrétní body je výstupem numerického řešení matice s hodnotami Z -ové souřadnice a derivace Z' v jednotlivých bodech dělení. Pro každý bod z červené křivky nalezneme odpovídající bod na zelené tak, aby rozdíl jejich Z -ových souřadnic byl minimální. Pro tento výběr dvojic určíme, která z nich má nejmenší rozdíl derivací. Jeden bod z takové dvojice pak definuje bod A (pro dostatečně jemné dělení je jedno, zda zvolíme bod ležící na červené nebo na zelené křivce). Ze známé hodnoty derivace v bodě A a poloměru R_0 můžeme z bodu A dokreslit část kružnice a nalézt bod E.

Dále do jednoho grafu vykreslíme všechny požadované části křivek tak, aby na sebe navazovaly v bodě A, přičemž X -ová souřadnice bodu D je nula. Pro daný poloměr R_0 pak existuje jediná správná hodnota počáteční souřadnice Z_D , pro kterou bude nulová také X -ová souřadnice bodu E. Tuto správnou hodnotu je třeba nalézt víceméně zkoušením a samozřejmě má smysl ji hledat jen do určité přesnosti. Lepší postup, který by po zadání jednoho parametru (např. souřadnice Z_D nebo Z_E) vygeneroval tvar celé bubliny, se mi nalézt nepovedlo.

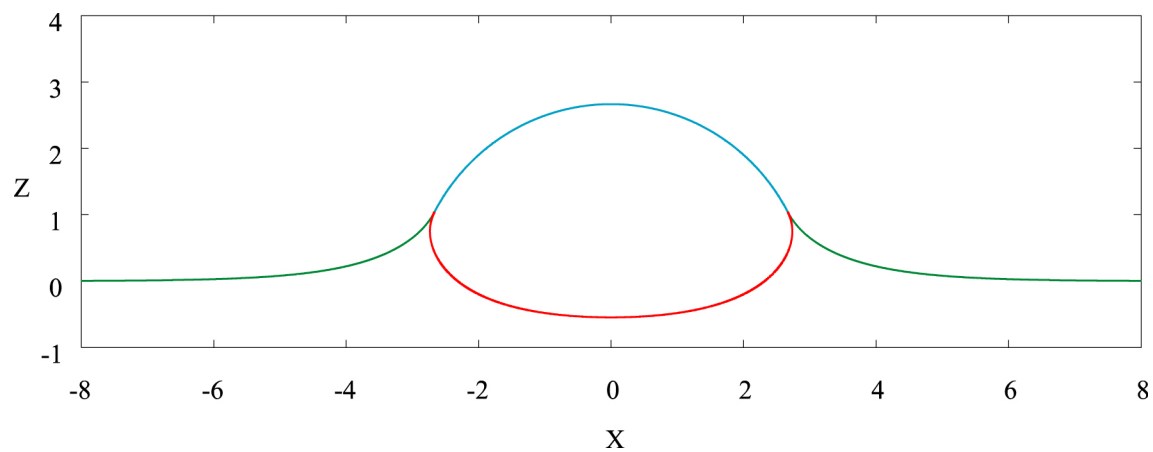
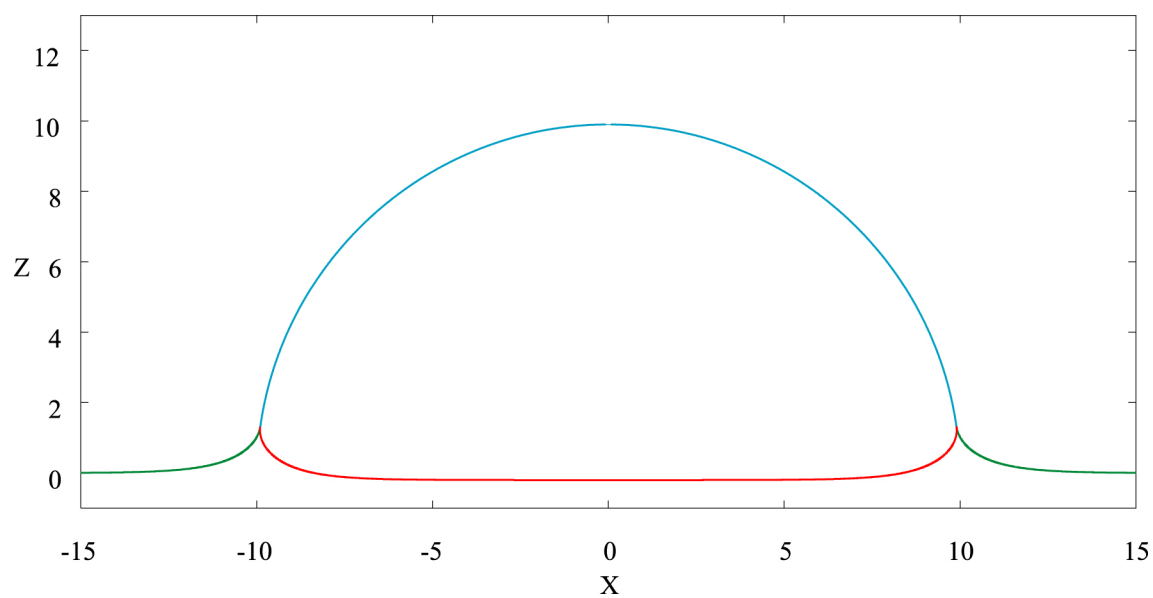
Na Obrázcích 4.3 až 4.6 jsou uvedeny čtyři grafy pro různé hodnoty poloměru R_0 , délka na osách je vynášena v jednotkách kapilární délky L . Bublina výrazně menší než kapilární délka (Obrázek 4.3 pro $R_0 = 0,3$) je téměř celá pod úrovní volné hladiny a tvar průřezu není příliš odlišný od kružnice. Naopak pro bublinu o hodně větší než kapilární délka (Obrázek 4.6 pro $R_0 = 10$) se největší část jejího objemu nachází nad úrovní volné hladiny a spodní část profilu je téměř rovinná. Části křivek byly obarveny analogicky s náčrtem, aby byly lépe patrné také změny tvaru jednotlivých částí profilu. Uvedené obrázky kvalitativně souhlasí s tím, co pozorujeme při pohledu na skutečné bubliny na povrchu kapaliny.



Obrázek 4.3: Tvar bubliny pro $R_0 = 0,3$ a $Z_D = -0,265$



Obrázek 4.4: Tvar bubliny pro $R_0 = 1$ a $Z_D = -0,61$

Obrázek 4.5: Tvar bubliny pro $R_0 = 3$ a $Z_D = -0,5461$ Obrázek 4.6: Tvar bubliny pro $R_0 = 10$ a $Z_D = -0,20$

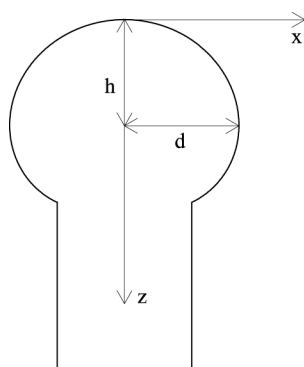
Kapitola 5

Kapka kapaliny na brčku

Veźmeme ohýbatelné brčko a jeho kratší konec upevníme ve svislé poloze. Druhý konec ohneme šikmo nahoru a do brčka napustíme vodu. Vhodným naklápěním dlouhého šikmého konce vytvoříme na svislém konci kapku kapaliny, která bude díky povrchovému napětí alespoň do určité velikosti stabilní. Jaký tvar bude kapka mít?

5.1 Teoretické řešení

Je-li kapka v rovnovážném stavu, hydrostatický tlak na vnitřní straně povrchu musí být roven tlaku způsobenému křivostí povrchu. Vnější tlak můžeme položit roven nule. Uvažujme zjednodušený model válcové kapky (podobně jako u bubliny). Problém se tím redukuje na hledání tvaru křivky ležící v rovině. Řez kapkou nad okrajem brčka je zakreslen na Obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Náčrtek kapky na brčku

Počátek soustavy souřadnic umístíme do vrcholu kapky, osa z směřuje svisle dolů, osa x vodorovně. Pak platí

$$\rho g z + \sigma k_0 = \sigma k, \quad (5.1)$$

kde křivost k je převrácená hodnota prvního poloměru křivosti r_1 . Pak k_0 je křivost na vrcholu kapky v bodě $z = x = 0$. Pro numerické řešení tvaru kapky bude výhodnější

parametrický popis křivky. Zvolme funkce $x = x(t)$, $z = z(t)$ určující tvar křivky, t je parametr. Jednotkový tečný vektor \mathbf{m} a jednotkový normálový vektor \mathbf{n} pro určitý bod křivky jsou definovány jako

$$\mathbf{m} = \frac{(\dot{x}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\dot{z}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}, \quad (5.2)$$

kde tečka značí derivaci podle parametru t . Mezi tečným a normálovým vektorem existuje vztah

$$k \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{m}}{dt}. \quad (5.3)$$

Analogickou substitucí jako u bubliny

$$x = LX, \quad z = LZ, \quad t = LT, \quad k = K/L. \quad (5.4)$$

převédeme rovnici (5.1) na jednoduchý tvar

$$Z + K_0 = K. \quad (5.5)$$

Zavedením této substituce i do vztahu (5.3) mezi normálovým a tečným vektorem dostaneme pro obě složky vektorů odlišné vyjádření křivosti K . Následným dosazením do rovnice (5.5) obdržíme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Z - \frac{\ddot{X}}{\dot{Z}} + K_0 &= 0, \\ Z + \frac{\ddot{Z}}{\dot{X}} + K_0 &= 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

kde tečka značí derivaci podle parametru T . Numerickým řešením této soustavy s příslušnými okrajovými podmínkami a křivostí K_0 dostaneme tvar hledané křivky v grafické podobě.

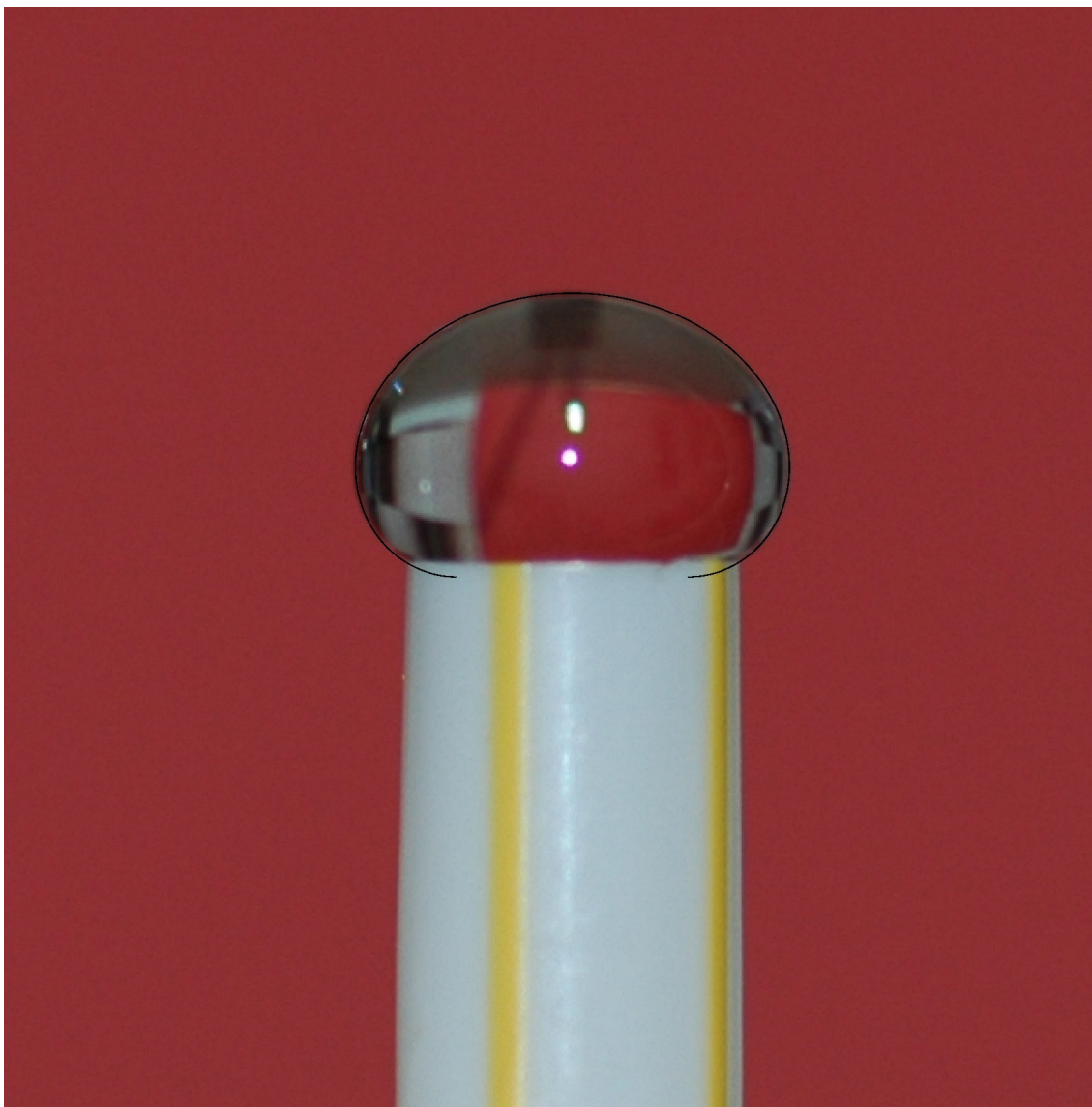
5.2 Numerické řešení a experiment

Podstata praktické realizace experimentu je popsána v úvodu této kapitoly. Průměr použitého brčka je přibližně 4,8 mm. Uvádět zde chybu měření není nutné, neboť tato hodnota slouží pouze k ilustraci skutečných rozměrů experimentu. Kapka je charakterizována svou maximální šířkou $2d$ a výškou h pod vrcholem, ve které této největší šířky nabývá. K vytvoření správné křivky numerickým řešením diferenciálních rovnic (5.6) stačí znát pouze poměr délek h/d . Hodnotu křivosti K_0 zpřesňujeme na vstupu programu tak dlouho, dokud poměr h/d vygenerované křivky nedosáhne námi požadované shody s experimentálně určeným poměrem. Fotografie kapky na brčku je na Obrázku 5.2. Poměr $h/d = 0,799$. Počítačem vygenerovaná křivka je na fotografii přiložena ke kapce.

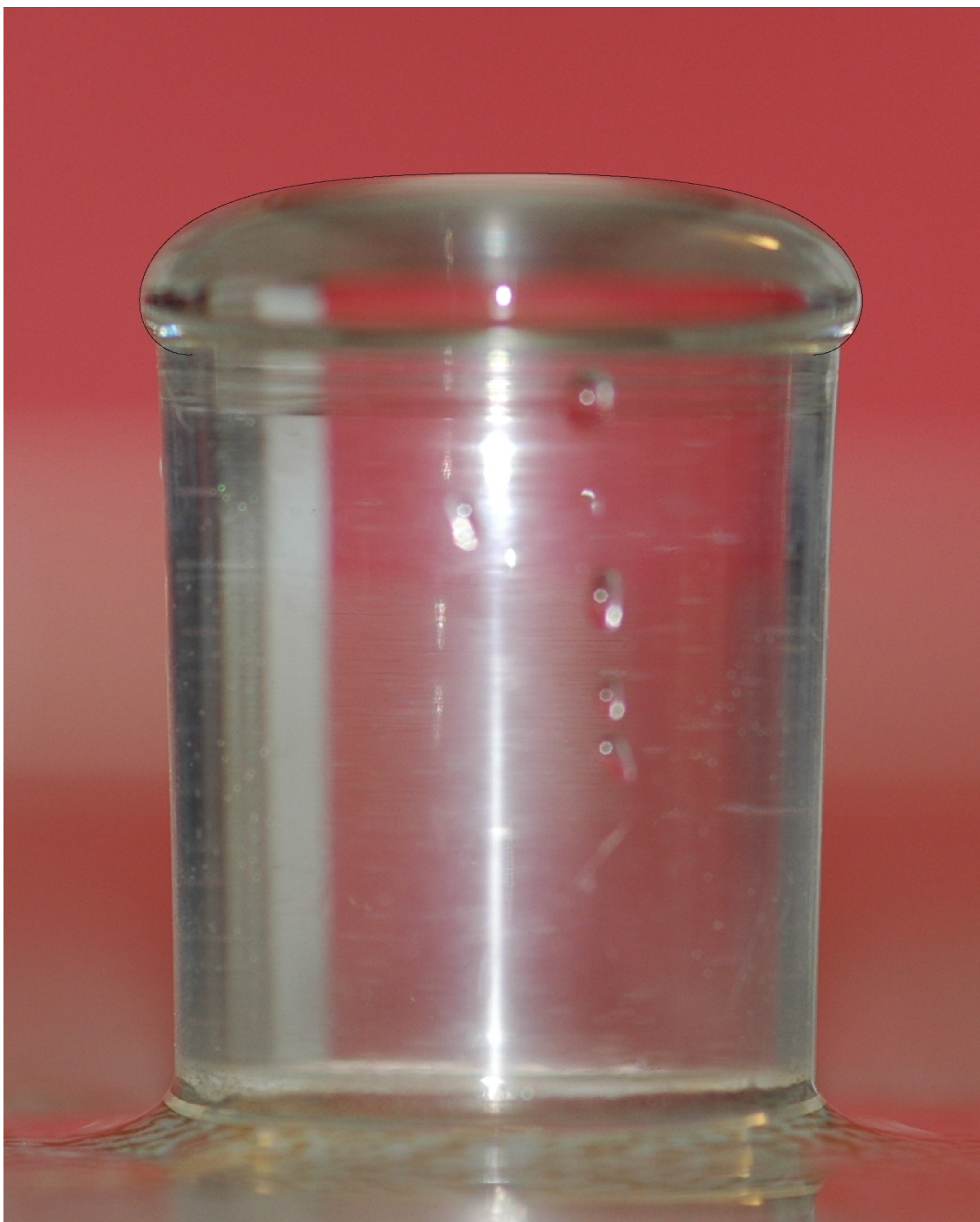
Kromě brčka jsem také použil malý plastový kelímek o průměru 24,4 mm. Zde už voda nad okrajem nádoby příliš kapku nepřipomíná, možná by byl vhodnější název „čepička“. Její rozměry lze měnit opatrným přidáváním vody pomocí injekční stříkačky. Hodnota

oměru $h/d = 0,352$ naznačuje, že křivost poblíž vrcholu bude poměrně malá. Fotografie s přiloženou křivkou je na Obrázku 5.3.

V obou případech numerické řešení poměrně dobře souhlasí s reálným tvarem, ačkoli jsme brali v úvahu pouze jeden poloměr křivosti. Oprava tvaru křivky při započtení druhého poloměru křivosti by v případě kelímku pravděpodobně byla zanedbatelná. U kapky na brčku však jsou velikosti obou poloměrů křivosti srovnatelné, oprava by proto zanedbatelná nebyla.



Obrázek 5.2: Kapka na brčku



Obrázek 5.3: Čepička kapaliny nad okrajem kelímku

Kapitola 6

Oscilující proud kapaliny

Představme si kruhový otvor, z něhož vytéká stálou rychlostí kapalina. Umístíme-li soustavu mimo tíhové pole a pokud zatím nebudeme uvažovat o rozpadu proudu na jednotlivé kapky, můžeme říct, že průřez proudu bude stále kruhový. Co se stane, když otvor nebude přesně kruhový?

6.1 Řešení pomocí komplexního potenciálu

Nejprve zvolme soustavu souřadnic. Podélnou osu válce kapaliny ztotožníme se souřadnicovou osou z , rovina xy je na osu z kolmá. Soustava souřadnic se jako celek pohybuje podél osy válce stejnou rychlostí, jakou vytéká kapalina z otvoru, označme ji v_z . Budeme předpokládat, že proudění je nevířivé, tj. válec se jako celek neotáčí kolem osy z . Situaci, kdy se proud jako celek otáčí, probereme v další kapitole.

V případě kruhového průřezu je poloměr křivosti ve všech bodech povrchu kapaliny stejný (druhý poloměr křivosti můžeme prohlásit za nekonečný), tedy i tlak uvnitř kapaliny je všude stejný. Jestliže otvor není kruhový, poloměr křivosti se obecně pro různé body povrchu liší a tlak v kapalině není konstantní. Tato nerovnováha způsobuje urychlování částic kapaliny uvnitř proudu, což se navenek projevuje jako kmitání povrchu válce (tzv. kapilární vlny).

Ve zvolené soustavě souřadnic budou částice kapaliny vykonávat pouze pohyb v rovině xy (obecně nenulové hodnoty složek rychlosti v_x, v_y). Proudnicemi označujeme myšlené křivky, k nimž jsou vektory rychlosti v daném časovém okamžiku tečné. V určitém místě nechť jsou složky elementárního oblouku proudnice dx, dy, dz a rychlost má složky v_x, v_y, v_z . Pak musí platit

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (6.1)$$

V našem případě budeme předpokládat shodnost proudnic a trajektorií částic.

Pro nevířivé proudění platí

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

Obecná vektorová identita $\nabla \times \nabla u = \mathbf{0}$, kde u je skalární pole, nám umožňuje zavést tzv.

skalární potenciál rychlosti ψ . Z předchozí úvahy vyplývá

$$\mathbf{v} = \nabla\psi \quad \text{neboli} \quad v_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}. \quad (6.3)$$

Protože pracujeme s modelem nestlačitelné kapaliny, platí rovnice kontinuity

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Vyjádríme-li rychlost pomocí potenciálu rychlosti, zjistíme, že rychlostní potenciál musí splňovat Laplaceovu rovnici (nepleťme si ji s Laplaceovou-Youngovou rovnicí)

$$\nabla \cdot \nabla\psi = \Delta\psi = 0 \quad (6.5)$$

Dále pro nezřídlové proudění kapaliny v určité oblasti Ω musí být tok Q

$$Q = \oint_{\gamma} (-v_y dx + v_x dy) \quad (6.6)$$

přes libovolnou uzavřenou křivku γ ležící v oblasti Ω roven nule. Hodnota integrálu nesmí záviset na integrační cestě, tedy výraz $-v_y dx + v_x dy$ musí být totálním diferenciálem jisté funkce $\xi(x, y)$, kterou nazveme proudovou funkcí. Soustava křivek s rovnicí

$$\xi(x, y) = C, \quad (6.7)$$

kde C je reálná konstanta, představuje soustavu proudnic. Diferenciací této rovnice a srovnáním s výrazem pro tok (6.6) dostáváme

$$v_x = \frac{\partial\xi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial\xi}{\partial x}. \quad (6.8)$$

Protože platí $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, můžeme psát

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\Delta\xi = 0. \quad (6.9)$$

Vidíme, že i proudová funkce ξ splňuje Laplaceovu rovnici. Dále můžeme do rovnice (6.8) dosadit rovnici (6.3) a dostáváme

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\xi}{\partial x}. \quad (6.10)$$

Tyto rovnice jsou vyjádřením Cauchyho-Riemannových podmínek pro obecnou analytickou funkci $f(c) = \psi(x, y) + i\xi(x, y)$ komplexního argumentu $c = x + iy$. Můžeme tedy zavést funkci

$$w = \psi + i\xi, \quad (6.11)$$

kteřou nazýváme komplexní potenciál. Je zřejmé, že pokud se nám podaří nalézt předpis pro tuto funkci, získáme i popis proudění v kapalinovém válci.

Nejjednodušší tvar komplexního potenciálu můžeme částečně uhodnout. Předpokládejme, že výtokový otvor má oválný tvar. Povrchové napětí se snaží vnutit válci kruhový průřez, avšak částice kapaliny mají určitou setrvačnost. Pokud tvar otvoru vybereme vhodně, z počátečního oválu přejde průřez proudu na kruh, následně na ovál shodný s původním, pouze otočený o 90° , dále opět na kruh a nakonec se vrátí zpět do původního oválu. Komplexní potenciál v daném bodě tedy bude periodickou funkcí času s úhlovou frekvencí ω .

Víme, že funkce ψ a ξ musí splňovat Laplaceovu rovnici, vzájemně jsou provázány Cauchy-Riemannovými podmínkami a dále musí vyhovovat jistým okrajovým podmínkám. Střed výtokového otvoru zvolme do počátku soustavy souřadnic v rovině xy . Delší poloosa oválu se nachází na ose x , kratší poloosa na ose y . Pro částice nacházející se na ose x musí být složka rychlosti kolmá na osu nulová, v tomto případě $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$. Analogicky pro částice na ose y platí $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Ve středu oválu pak $v_x = v_y = 0$. Pokud označíme $c = x + iy$, nejjednodušší tvar komplexního potenciálu splňující tyto podmínky je

$$w = A_2 c^2 e^{-i\omega_2 t} = A_2 [(x^2 - y^2) + 2ixy] e^{-i\omega_2 t}, \quad (6.12)$$

kde A_2 je reálná konstanta. Tento výsledek se dá samozřejmě matematicky odvodit. Pokud pro funkce ψ a ξ budeme řešit Laplaceovu rovnici separací proměnných a uplatníme okrajovou podmínku pro střed válce, dostaneme po rozvinutí exponenciál, sinů a cosinů do Taylorovy řady a vhodném zanedbání členů vyšších řádů výsledek shodný s rovnicí (6.12). Funkce ψ a ξ pro tento komplexní potenciál jsou

$$\psi = A_2 (x^2 - y^2) e^{-i\omega_2 t}, \quad \xi = 2A_2 xy e^{-i\omega_2 t}. \quad (6.13)$$

Následně můžeme jednoduše ověřit, že komplexní potenciál v obecném tvaru

$$w = A_n c^n e^{-i\omega_n t}, \quad (6.14)$$

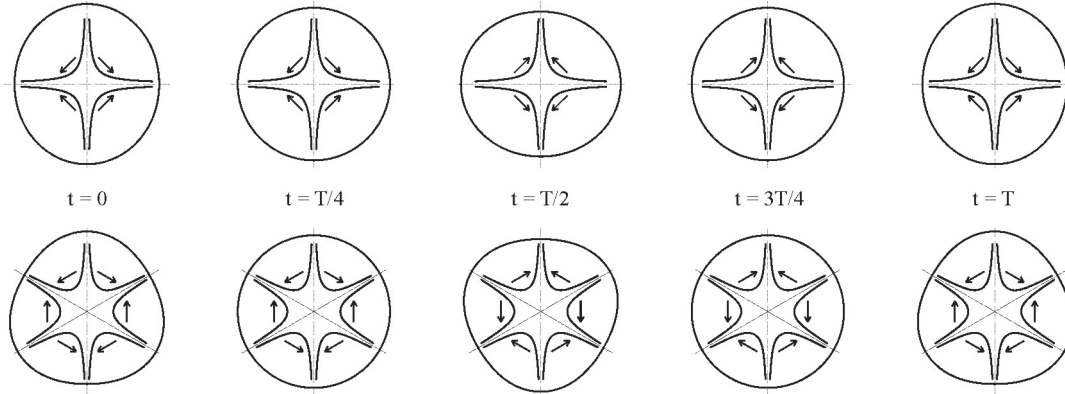
kde n je přirozené číslo, je také řešením Laplaceovy rovnice, které vyhovuje uvedeným okrajovým podmínkám. Rovnici proudnic dostaneme okamžitě bez dalšího výpočtu z rovnice (6.7). Jelikož při zvyšujícím se n jsou rovnice proudnic zadány implicitně, je třeba je řešit numericky. Z průběhu proudnic můžeme alespoň kvalitativně odhadnout tvar průřezu, který bude jednotlivým modům odpovídat. Pro $n = 2$ jsou proudnicemi hyperboly, tomu odpovídá oválný průřez. Pro $n = 3$ bychom měli dostat tvar podobný zaoblenému trojúhelníku, pro $n = 4$ zaoblenému čtverci atd. Schematicky je průběh jedné periody a tvar proudnic pro různá n zachycen na Obrázku 6.1.

Diferenciální rovnice popisující tvar kapalinového válce v závislosti na čase pro jednotlivá n můžeme odvodit z kinematického vztahu pro zrychlení konkrétní částice kapaliny

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (6.15)$$

Pro $n = 2$ dostáváme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -2\omega_2 x \sin \omega_2 t + 4x \cos^2 \omega_2 t, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= 2\omega_2 y \sin \omega_2 t + 4y \cos^2 \omega_2 t. \end{aligned} \quad (6.16)$$



Obrázek 6.1: Průřezy proudu pro módy $n = 2$ a $n = 3$ v průběhu jedné periody kmitů. Šipky značí směr pohybu částic v následující čtvrtině periody.

Pro $n = 3$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -3\omega_3(x^2 - y^2) \sin \omega_3 t + 18x(x^2 + y^2) \cos^2 \omega_3 t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 6\omega_3 xy \sin \omega_3 t + 18y(x^2 + y^2) \cos^2 \omega_3 t.\end{aligned}\quad (6.17)$$

Pro $n = 2$ jsou rovnice nezávislé, avšak pro $n \geq 3$ jsou vzájemně provázané. Jejich řešení by bylo nutné provést numerickou cestou. Zatím však neznáme úhlovou frekvenci ω_n .

6.2 Řešení pomocí variačního počtu

Popis kmitů vlivem povrchového napětí můžeme provést v analogii s postupem použitým v [2] pro výpočet frekvence kmitů kulové kapky.

Uvažujme kruhovou plošku, jejíž okraj se bude vlivem kmitání odchylovat od tvaru kružnice. Provedme nejdříve pomocný výpočet, jehož cílem je určení křivosti takové křivky $r(\varphi)$. Její obvod je v polárních souřadnicích dán rovnicí

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2} r d\phi. \quad (6.18)$$

Pro kružnici je poloměr konstantní, tj. $r = R$. Pro malé kmity můžeme psát $r(\varphi) = R + f(\varphi)$, kde $f(\varphi) \ll R$. Protože druhý člen pod odmocninou je malý vzhledem k jedničce, můžeme použít přibližného vyjádření odmocniny

$$S = \int_0^{2\pi} \left[r + \frac{1}{2r} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \right] d\phi. \quad (6.19)$$

Po dosazení za $r(\varphi)$ a variací získané rovnice dostaneme

$$\delta S = \int_0^{2\pi} \left[\delta f - \frac{1}{2(R+f)^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2 \delta f + \frac{1}{(R+f)} \frac{df}{d\phi} \frac{d\delta f}{d\phi} \right] d\phi. \quad (6.20)$$

Integrací posledního členu metodou per-partes

$$\delta S = \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{2(R+f)^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{(R+f)} \frac{d^2 f}{d\phi^2} \right] \delta f d\phi. \quad (6.21)$$

Pokud nyní zanedbáme druhý člen integrandu, v němž se vyskytuje druhá mocnina derivace f , můžeme rovnici přepsat

$$\delta S = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\phi^2} \right] \delta f dS. \quad (6.22)$$

Výraz

$$k = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\phi^2}, \quad (6.23)$$

představuje křivost k námi hledané křivky, která se jen o málo liší od kružnice.

V předchozí části jsme zjistili, že potenciál rychlosti ψ musí splňovat Laplaceovu rovnici (6.5). Přepíšeme ji v polárních souřadnicích

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6.24)$$

Řešení budeme předpokládat ve tvaru

$$\psi = h(r, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (6.25)$$

Separací proměnných $h(r, \varphi) = P(r) \cdot \Phi(\varphi)$ dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$\frac{r}{P} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = n^2, \quad (6.26)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -n^2, \quad (6.27)$$

kde n je zatím libovolné reálné číslo. Pokud $n \neq 0$, řešení těchto rovnic jsou

$$P = Cr^n + Dr^{-n}, \quad (6.28)$$

$$\Phi = Ae^{in\varphi} + Be^{-in\varphi}. \quad (6.29)$$

Jestliže $n = 0$, vyjde

$$P = C_0 \ln r + D_0, \quad (6.30)$$

$$\Phi = A_0 \varphi + B_0. \quad (6.31)$$

Vzhledem k požadavku jednoznačnosti řešení je třeba volit $A_0 = 0$ a n přirozené číslo. Funkce ψ se zredukuje na

$$\psi = (C_0 \ln r + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) (C_n r^n + D_n r^{-n}) e^{-i\omega_n t}. \quad (6.32)$$

Aby pro $r = 0$ nevznikaly fyzikálně nepřijatelné singularity, musí být $C_0 = D_n = 0$. Konstantu D_0 můžeme zvolit zcela libovolně, její hodnota nijak neovlivní pole rychlostí v kapalině. Pro jednoduchost položíme $D_0 = 0$. Tedy

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos(n\varphi) e^{-i\omega_n t}. \quad (6.33)$$

Srovnáme nyní pro konkrétní n rovnici (6.33) s předpisem pro potenciál rychlosti, jenž plyne z rovnice (6.14) odvozené pro komplexní potenciál v předchozí části. Konstanta A_n a fázový člen $e^{-i\omega_n t}$ jsou pro oba výrazy stejné. Pak by mělo platit

$$r^n \cos(n\varphi) \stackrel{?}{=} \operatorname{Re}(c^n), \quad (6.34)$$

kde člen na pravé straně vyjadřuje reálnou část komplexního čísla $c^n = (x + iy)^n$. Přejdem ke goniometrickému tvaru tohoto komplexního čísla a roznásobením (popř. využitím Moivroy věty) přímo dokážeme platnost rovnice (6.34). Oba zápisy potenciálu rychlosti ψ jsou tedy ekvivalentní.

Nyní je třeba k Laplaceově rovnici přidat ještě okrajovou podmínku pro povrch proudu kapaliny. Vyjděme z Eulerovy hydrodynamické rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (6.35)$$

kde \mathbf{G} je objemová síla působící na kapalinu vztažená na jednotku hmotnosti. Integrací této rovnice (postup viz [1]) můžeme pro nestlačitelnou kapalinu, jejíž proudění je popsáno rychlostním potenciálem ψ , přejít k časové Bernoulliho rovnici

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p}{\rho} = 0, \quad (6.36)$$

kde U je potenciál objemové síly $\mathbf{G} = -\nabla U$. V našem případě na kapalinu nepůsobí žádná objemová síla, tedy $U = 0$. Pohyb částic považujeme za tak pomalý, že můžeme zanedbat druhý člen na levé straně. Tlak p pod povrchem kapaliny nahradíme součinem povrchového napětí σ a křivosti k , vyjádřené v rovnici (6.23). Dostaneme

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \right) = 0. \quad (6.37)$$

Derivací této rovnice podle času t a využitím rovnosti $\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial t}$, nabývá okrajová podmínka pro rychlostní potenciál ψ pro $r = R$ tvar

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sigma}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6.38)$$

Dosazením rychlostního potenciálu (6.33), získaného řešením Laplaceovy rovnice, do okrajové podmínky (6.38) dostáváme pro konkrétní hodnotu n rovnici pro úhlovou frekvenci kmitů ω_n ve tvaru

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+1). \quad (6.39)$$

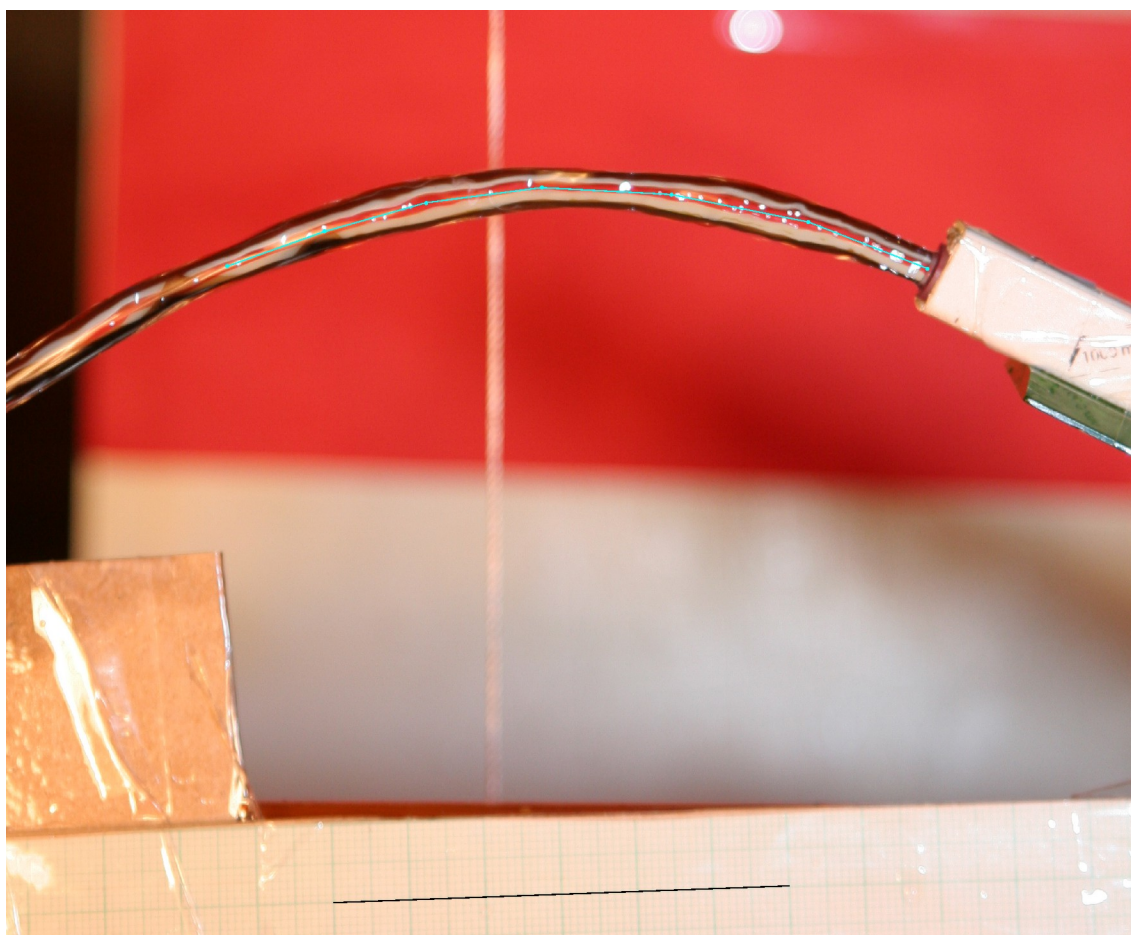
6.3 Experiment

V předchozí části jsme dospěli ke konkrétním vztahům pro výpočet úhlové frekvence jednotlivých módů. Známe analytický předpis pro vykreslení průřezu výtokového otvoru tak, abychom vybudili kmity o frekvenci odpovídající danému módu. Můžeme se tedy pokusit srovnat teoretické výsledky s experimentem. Pro jednodušší a přesnější vyhodnocení měření budeme proud kapaliny fotografovat digitálním fotoaparátem.

6.3.1 Mód 2 – vodorovný proud

Postup měření

Z velké nádoby naplněné kapalinou (v našem případě vodou) a umístěné na vysoký podstavec je vyvedena hadice kruhového průřezu o poloměru R . Konec hadice je upevněn o hodně níž než nádoba tak, aby z něj kapalina vytékala pod vhodným úhlem šikmo nahoru. Proud kapaliny se vlivem tíhové síly začne ohýbat směrem dolů. Vrchol parabolického oblouku nesmí být příliš vysoko nad výtokovým otvorem, aby mohla být zanedbána



Obrázek 6.2: Mód 2 – vodorovný proud

změna rychlosti (a tím i změna poloměru proudu vyplývající z rovnice kontinuity) vlivem tíhové síly. Pod výtokovým otvorem je přiloženo milimetrové měřítko. Relativně daleko za proudem kapaliny se nachází barevné stínítko, díky němuž na fotografiích dosáhneme lepšího kontrastu okraje proudu s pozadím.

Posledních zhruba 20 cm hadice je zdeformováno tak, aby průřez byl oválný a odpovídal v rámci možností co nejlépe předpisu $r = R + A_2 \cos(2\varphi)$. Aby byl hledaný jev vůbec prokazatelný, je nutné porušit počáteční předpoklad $A_2 \ll R$. Pokud kapalina vytéká rychlostí v_0 , při pozorování z boku bychom měli zaznamenat minima a maxima tloušťky ekvidistantně rozložená podél proudu. Vzdálenost dvou nejbližších minim označme λ . Velikost úhlové frekvence $\omega_{2\lambda}$ dopočteme podle jednoduchého vztahu

$$\omega_{2\lambda} = \frac{2\pi v_0}{\lambda}. \quad (6.40)$$

Zpracování měření

Poloměr kruhového průřezu použité hadice je $R = 3$ mm. K určení výtokové rychlosti v_0 jsem změřil dobu τ , za kterou otvorem proteče objem $V = (0,5 \pm 0,005)$ l, $\delta_V = 1,0\%$. Hodnoty τ jsou uvedeny v Tabulce 6.1. Průměrná hodnota $\tau = (18,30 \pm 0,04)$ s, $\delta_\tau = 0,2\%$. Dopočtená velikost výtokové rychlosti je $v_0 = (0,97 \pm 0,01)$ ms⁻¹, $\delta_{v_0} = 1,0\%$.

měření	τ (s)
1	18,09
2	18,16
3	18,44
4	18,36
5	18,22
6	18,48
7	18,34
8	18,19
9	18,27
10	18,41

Tabulka 6.1: Čas výtoku objemu V

Hadici jsem umístil tak, aby v části oblouku paraboly, kde můžeme zanedbat vliv tíže, proběhly dvě periody kmitů. Při pozorování z boku se u výtokového otvoru hadice nacházelo první minimum tloušťky proudu. Na fotografiích jsem tedy měřil délku oblouku od výtokového otvoru po třetí minimum tloušťky proudu. Oblouk jsem v grafickém programu v počítači aproximoval lomenou čarou – sedmi malými tečkami jsem jej rozdělil na šest zhruba stejně dlouhých úseček. Největší pozornost samozřejmě musela být věnována určení polohy třetího minima. Všechny fotografie byly v počítači zvětšeny tak, aby reálná délka $l = 60$ mm odpovídala délce $l_p = 500$ mm, koeficient přepočtu $q = \frac{l}{l_p} = 0,12$.

Vyhodnotil jsem šest nejlepších fotografií, jedna z nich je přiložena jako Obrázek 6.2. Součet délek úseček $2\lambda_p$ je pro zvětšené fotografie uveden v Tabulce 6.2. Průměrná hodnota

vychází $2\lambda_p = (389 \pm 3)$ mm, $\delta_{2\lambda_p} = 0,8\%$. Tomu odpovídá skutečná velikost $\lambda = (46,7 \pm 0,4)$ mm, $\delta_\lambda = 0,8\%$.

Experimentálně určená hodnota úhlové frekvence je $\omega_{2\lambda} = (130 \pm 2)$ s⁻¹, $\delta_{\omega_{2e}} = 1,3\%$. Všechny vypočtené chyby jsou uvedeny na 68% hladinu spolehlivosti. Pro poloměr otvoru $R = 3$ mm a tabulkové hodnoty hustoty $\rho = 998$ kg m⁻³ a povrchového napětí vody $\sigma = 0,0727$ Nm⁻¹ vychází ze vztahu (6.39) teoreticky určená hodnota úhlové frekvence $\omega_{2t} = 127,2$ s⁻¹. Je vidět, že obě hodnoty spolu velmi pěkně souhlasí, podrobnější diskusi výsledků provedeme níže.

fotka	$2\lambda_p$ (mm)
1	396
2	393
3	383
4	398
5	384
6	383

Tabulka 6.2: Mód 2 – vodorovný proud

6.3.2 Mód 2 – svislý proud

Postup měření

Uspořádání experimentu je podobné jako u předchozí metody, avšak hadice je umístěna tak, aby z ní voda vytékala svisle dolů. Vlivem tíhové síly se kapalina urychluje směrem dolů. Tím dochází k zužování proudu a tedy i ke změně úhlové frekvence kmitů. Vyhodnocení můžeme provést třemi způsoby.

Úhlovou frekvenci $\omega_{2\lambda}$ určíme pomocí času $T/2$, který voda potřebuje k uražení vzdálenosti $\lambda/2$, na níž proběhne polovina periody kmitů. Abychom se vyhnuli případnému ovlivnění proudu přítomností výtokového otvoru, budeme měřit vzdálenost $\lambda/2$ mezi prvním minimem a druhým maximem tloušťky proudu za předpokladu, že pro směr pozorování nastává první maximum u výtokového otvoru. Rychlost kapaliny v'_0 v místě prvního minima je $v'_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, kde h je výška prvního minima pod výtokovým otvorem a v_0 rychlost u otvoru. Čas $T/2$ je řešením kvadratické rovnice

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{v'_0 T}{2} + \frac{g}{2} \left(\frac{T}{2}\right)^2 \quad (6.41)$$

a vztah pro výpočet úhlové frekvence je $\omega_{2\lambda} = 2\pi/T$.

Druhou možností je změřit poloměr proudu R_m v místě prvního minima a poloměr R_v v místě druhého maxima a určit tak úhlovou frekvenci ω_{2R_s} . Do vzorce (6.39) dosadíme tabulkové hodnoty povrchového napětí a hustoty a střední hodnotu poloměru $R_s = \frac{R_m + R_v}{2}$.

Třetí možný přístup vychází z výpočtu poloměrů R_h a $R_{h+\lambda/2}$ v místech prvního minima a druhého maxima ze vztahu vyplývajícího z rovnice kontinuity. Pro poloměry platí

$$R_h = R \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}}, \quad R_{h+\lambda/2} = R \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h + \frac{\lambda}{2})}}}, \quad (6.42)$$

kde R je poloměr hadice. Do rovnice (6.39) dosazujeme tabulkové hodnoty povrchového napětí a hustoty a aritmetický průměr $R_z = (R_h + R_{h+\lambda/2})/2$, dostaneme tak úhlovou frekvenci ω_{2R_z} .

Zpracování měření

Poloměr hadice r a délky l skutečného a l_p zvětšeného měřítka jsou stejné jako u předchozího měření. Naměřené hodnoty doby τ průtoku objemu $V = (0,5 \pm 0,005) \text{ l}$, $\delta_V = 1,0\%$ jsou uvedeny v Tabulce 6.3. Průměrná hodnota $\tau = (26,3 \pm 0,1) \text{ s}$, $\delta_\tau = 0,4\%$. Výtoková rychlost $v_0 = (0,671 \pm 0,007) \text{ ms}^{-1}$, $\delta_{v_0} = 1,1\%$.

měření	τ (s)
1	26,55
2	26,16
3	26,44
4	26,43
5	26,20
6	26,32
7	26,34
8	26,29
9	26,28
10	26,47

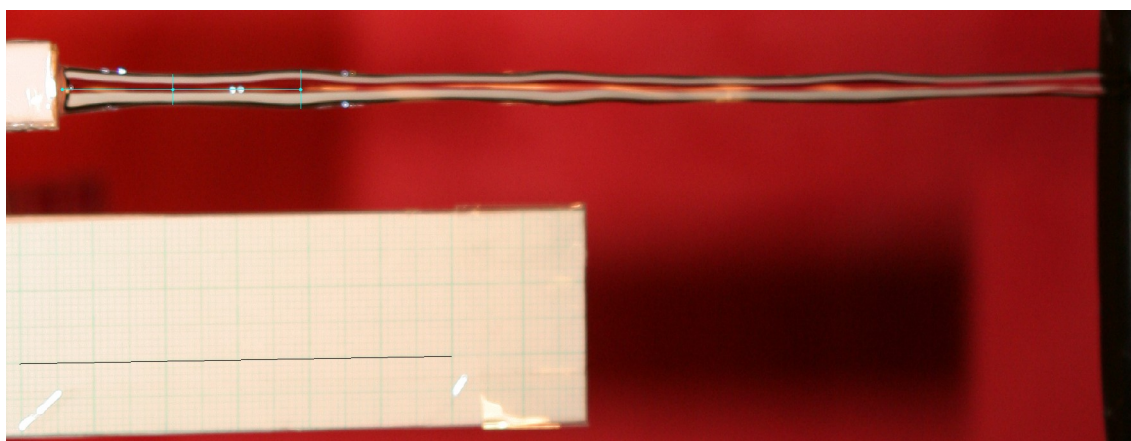
Tabulka 6.3: Čas výtoku objemu V

Konec hadice jsem natočil tak, aby se při fotografování z určitého směru v místě výtokového otvoru nacházelo první maximum tloušťky proudu. V grafickém programu jsem proměřil šest nejlepších fotografií, na Obrázku 6.3 je jedna z nich.

Číselné hodnoty získané z fotografií jsou shrnuty v Tabulce 6.4. Délkové veličiny získané měřením v počítači jsou označeny dolním indexem p , skutečné délky vznikly vynásobením indexované veličiny koeficientem q . V tabulce jsou uvedeny i dopočtené hodnoty, především samotné úhlové frekvence příslušné jednotlivým výpočetním postupům.

Protože předpokládám, že podmínky experimentu byly při pořizování všech fotografií stejné, můžeme pro jednotlivé typy frekvencí určit průměrnou hodnotu a její chybu.

$$\begin{aligned} \omega_{2\lambda} &= (172 \pm 2) \text{ s}^{-1}, & \delta_{\omega_{2\lambda}} &= 1,0\%, \\ \omega_{2R_s} &= (180 \pm 1) \text{ s}^{-1}, & \delta_{\omega_{2R_s}} &= 0,8\%, \\ \omega_{2R_z} &= (164,4 \pm 0,3) \text{ s}^{-1}, & \delta_{\omega_{2R_z}} &= 0,1\%. \end{aligned}$$



Obrázek 6.3: Mód 2 – svislý proud (fotografie je otočena o 90°)

Všechny tři hodnoty úhlových frekvencí jsou si poměrně blízké, diskuse výsledků bude provedena níže.

fotka		1	2	3	4	5	6
$2R_{vp}$	(mm)	43,3	45,1	43,8	43,6	44,1	44,3
$2R_{mp}$	(mm)	34,4	35,3	35,4	35,6	35,4	35,3
$\lambda_p/2$	(mm)	146	148	139	147	146	144
h_p	(mm)	128	128	128	120	121	122
R_v	(mm)	2,60	2,70	2,63	2,61	2,65	2,66
R_m	(mm)	2,06	2,12	2,12	2,14	2,13	2,12
R_s	(mm)	2,33	2,41	2,38	2,37	2,39	2,39
λ	(mm)	35	36	33	35	35	35
h	(mm)	15	15	15	14	14	15
ω_{2R_s}	(s ⁻¹)	186	177	180	181	179	179
$\omega_{2\lambda}$	(s ⁻¹)	172	169	179	169	170	172
R_h	(mm)	2,64	2,64	2,64	2,66	2,65	2,65
$R_{h+\lambda/2}$	(mm)	2,40	2,40	2,41	2,41	2,41	2,41
R_z	(mm)	2,52	2,52	2,53	2,53	2,53	2,53
ω_{2R_z}	(s ⁻¹)	165	165	165	164	164	164

Tabulka 6.4: Mód 2 – svislý proud

6.3.3 Mód 3 – vodorovný proud

Postup měření

Pro tento mód se mi nepodařilo vytvořit dostatečně dobrou deformaci hadice tak, aby na fotografiích byl očekávaný jev prokazatelný. Proto byl pokus realizován jiným postupem. Rozřezáním a slepením několika PET lahví jsem vyrobil válec, u jehož dna jsem

do svislé stěny nůžkami vystříhl malý otvor, odpovídající co nejlépe požadovanému tvaru zaobleného trojúhelníku. Pod otvor jsem umístil milimetrové měřítko a dozadu barevné stínítko.

Opět chceme zanedbat vliv gravitace v oblasti poblíž otvoru, výška válce (a tedy i výtoková rychlost) musí být dostatečná. Po naplnění válce vodou a uvolnění otvoru musíme v okamžiku, kdy mačkáme spoušť fotoaparátu, zaznamenávat také momentální polohu hladiny kapaliny. Výtokovou rychlost pak určíme z velikosti výšky hladiny nad výtokovým otvorem.

Při vhodné orientaci výtokového otvoru vzhledem ke směru pozorování se u tohoto módu nevyskytují minima a maxima tloušťky proudu, průměr je stále stejný. Při pozorování shora se bude proud „vlnit“ zleva doprava. Analogicky při pozorování z boku se bude proud „vlnit“ nahoru a dolů, identifikace tohoto efektu je však ztížena celkovým parabolickým zakřivením proudu.

U tohoto uspořádání experimentu nebude mít proud stejný průměr jako výtokový otvor (tuto hodnotu bychom mohli určit např. posuvným měřidlem). Částice kapaliny se totiž k výtokovému otvoru „sbíhají“ ze všech stran, nepohybují se pouze ve směru kolmém na rovinu otvoru, dochází tím k zúžení proudu. Proto musíme průměr zjistit experimentálně. Díky tomuto efektu je také vhodné hledat první místo největšího „vychýlení“ proudu směrem dolů až kousek od otvoru.

Zpracování měření

Hodnoty naměřených a dopočtených veličin pro čtyři fotografie jsou uvedeny v Tabulce 6.5. Veličina h_1 popisuje výšku hladiny kapaliny nad dnem válce, h_2 je výška středu výtokového otvoru nad dnem válce (pro všechna měření je stálá), s_h je chyba měření těchto výšek.

V oblasti, kde můžeme zanedbat vliv gravitace, proběhlo 1,5 periody kmitů. Příslušnou délku oblouku na fotografii v počítači charakterizuje veličina $1,5\lambda_p$, chybu jejího určení $s_{1,5\lambda_p}$. Oblouk jsem opět nahradil lomenou čarou, tentokrát sestávající ze tří úseček. Průměr proudu jsem změřil na šesti zhruba ekvidistantně rozložených místech oblouku přiložením krátkých úseček kolmo na směr proudu a následným určením jejich délky. V tabulce je uvedena střední hodnota průměru $2R_p$, příslušná chyba je s_{2R_p} . Dále jsou zde i skutečné délky odpovídající jedné periodě kmitů λ a poloměru R . Jedna z pořízených fotografií je na Obrázku 6.4.

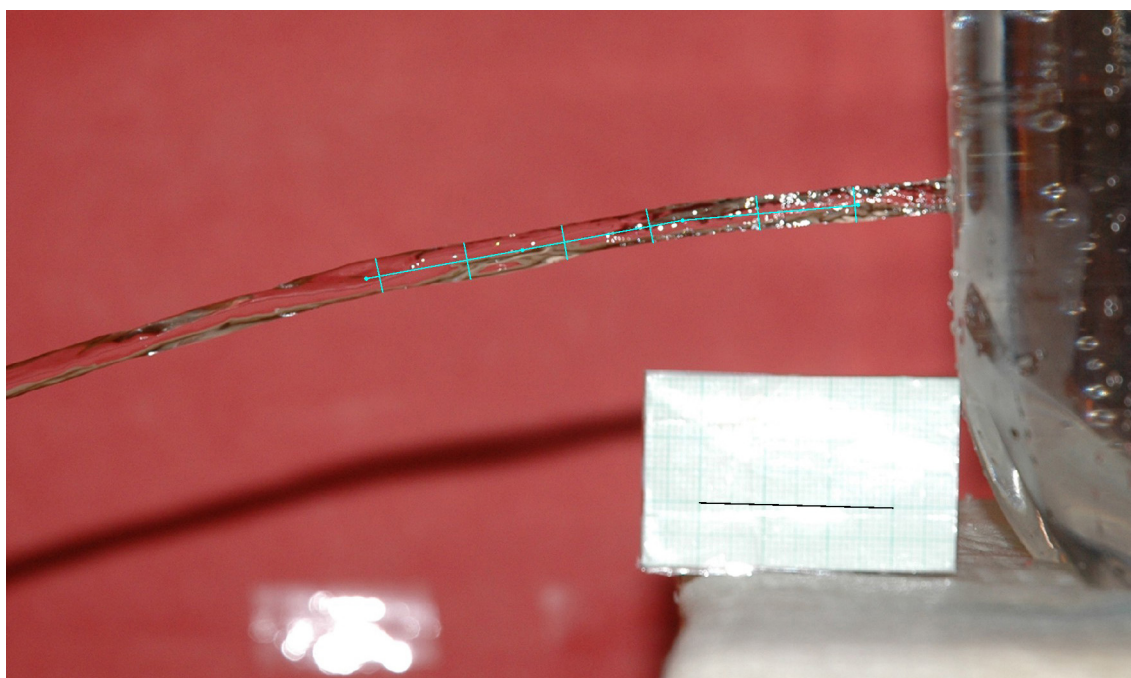
Všechny fotografie byly v počítači zvětšeny tak, aby reálná délka $l = 30$ mm odpovídala délce $l_p = 150$ mm. Koeficient přepočtu $q = 0,2$. Protože pro každou fotografii byl rozdíl $h_1 - h_2$ jiný, je nutné počítat chyby pro každou fotografii zvlášť.

Úhlovou frekvenci $\omega_{3\lambda}$ počítanou pomocí délky λ určíme podle vztahu (6.40), v němž $v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. Úhlová frekvence ω_{3R} je spočtena pro tabulkové hodnoty hustoty vody a povrchového napětí podle rovnice (6.39) s použitím experimentálně určeného poloměru proudu R . Hodnoty obou úhlových frekvencí jsou opět v tabulce.

Je vidět, že obě číselné hodnoty jsou v dobrém souhlasu. Relativní chyba měření je poměrně nízká, pro snižující se výšku hladiny lehce narůstá. Podrobnější diskuse bude provedena v pozdější části textu.

fotka		1	2	3	4
h_1	(mm)	335	317	299	280
h_2	(mm)	48	48	48	48
s_h	(mm)	2	2	2	2
$1,5\lambda_p$	(mm)	257	251	226	221
$s_{1,5\lambda_p}$	(mm)	10	10	10	10
$2R_p$	(mm)	27,1	27,1	26,8	26,9
s_{2R_p}	(mm)	0,4	0,6	0,6	0,9
λ	(mm)	51	50	45	44
s_λ	(mm)	2	2	2	2
R	(mm)	2,71	2,71	2,68	2,69
s_R	(mm)	0,04	0,06	0,06	0,09
$\omega_{3\lambda}$	(s ⁻¹)	290	287	309	303
$s_{\omega_{3\lambda}}$	(s ⁻¹)	11	12	14	14
$\delta_{\omega_{3\lambda}}$	(%)	3,9	4,0	4,5	4,6
ω_{3R}	(s ⁻¹)	296	297	300	299
$s_{\omega_{3R}}$	(s ⁻¹)	6	9	10	16
$\delta_{\omega_{3R}}$	(%)	2,0	3,1	3,4	5,2

Tabulka 6.5: Múd 3 – vodorovný proud



Obrázek 6.4: Múd 3 – vodorovný proud

6.3.4 Vliv povrchově aktivní látky

Přidáme-li do kapaliny povrchově aktivní látku, částice této látky se budou samovolně koncentrovat na povrchu kapaliny a sníží tak (někdy i velmi výrazně) její povrchové napětí. Měřením změny úhlové frekvence kmitání proudu kapaliny můžeme jednak prokázat přítomnost povrchově aktivní látky a také se pokusit odhadnout čas, během kterého se částice zkoncentrují na povrchu kapaliny.

Postup měření

Použijeme stejné experimentální uspořádání jako při měření třetího módu, trojúhelníkový otvor nahradíme oválným. Částice povrchově aktivní látky se budou na povrch dostávat postupně a budou tak spojitě snižovat hodnotu povrchového napětí kapaliny. Dále od výtokového otvoru by tedy délka $\lambda/2$, na níž proběhne polovina periody kmitů, měla být delší než hned u něj. Aby byl očekávaný efekt lépe prokazatelný, pro stejnou výtokovou rychlost srovnáme fotografie pořízené při použití vody čisté a vody s povrchově aktivní látkou.

Zpracování měření

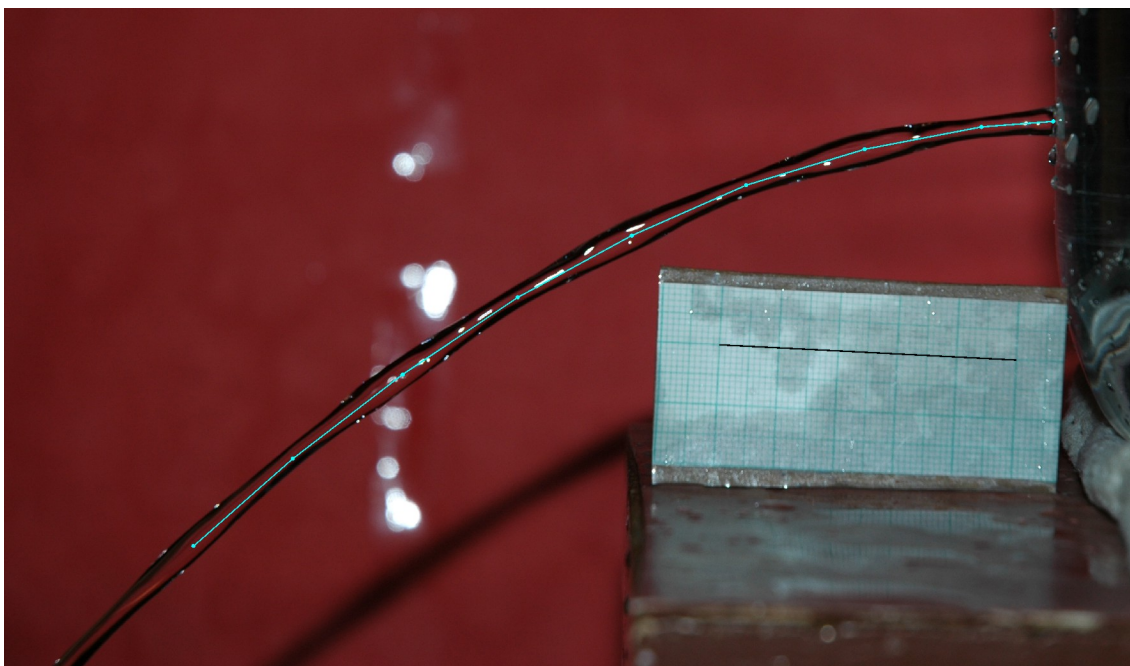
Jako povrchově aktivní látku jsem použil Jar na umývání nádobí. Při fotografování proudu obou kapalin (čistě i s jarem) byla výška hladiny na dnem válce $h_1 = (131 \pm 2)$ mm, $\delta_{h_1} = 1,5\%$, výška výtokového otvoru $h_2 = (41 \pm 2)$ mm, $\delta_{h_2} = 4,9\%$. Výtoková rychlost $v_0 = (1,33 \pm 0,02)$ ms⁻¹, $\delta_{v_0} = 1,6\%$. Fotografie jsou uvedeny jako Obrázky 6.5 a 6.6.

n	$\lambda/2_{jp}$ (mm)	$\lambda/2_{vp}$ (mm)
0	47	49
1	85	80
2	92	83
3	95	84
4	109	87
5	109	93
6	117	93
7		89

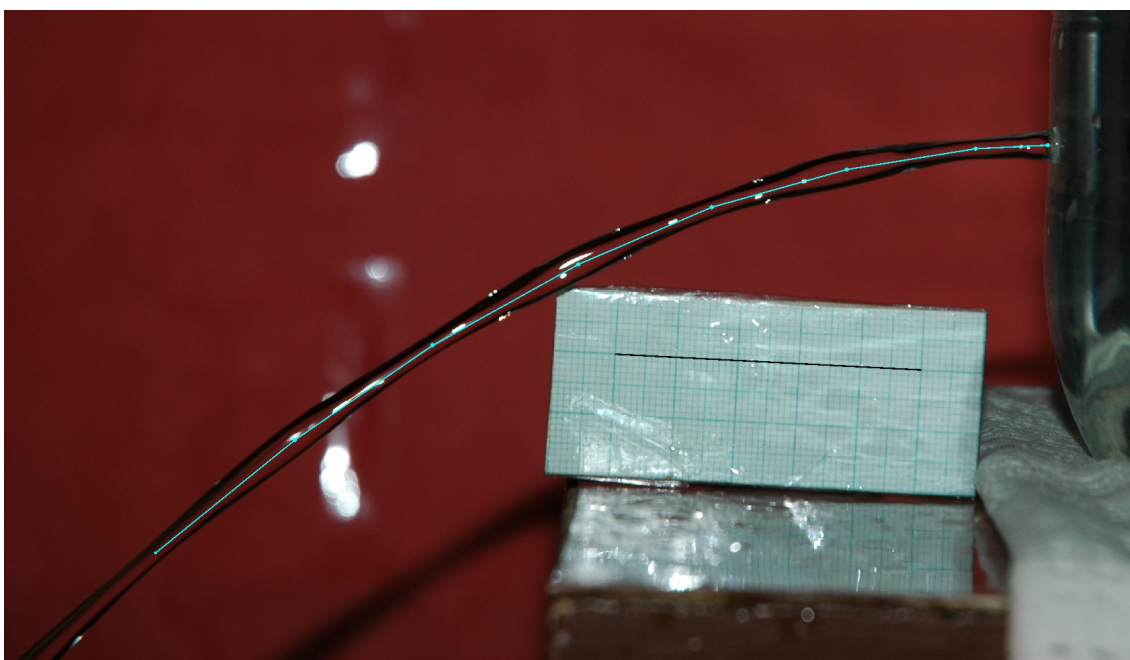
Tabulka 6.6: Vliv povrchově aktivní látky

Tentokrát bylo v grafickém programu třeba pečlivě určit polohu každého minima a maxima tloušťky proudu. Délky odpovídající jednotlivým půlperiodám (počítáno ve směru od výtokového otvoru) jsou v Tabulce 6.6 očíslovány indexem n , nula označuje délku mezi výtokovým otvorem a prvním maximem. Čistou vodu charakterizuje veličina $\lambda/2_{vp}$, vodu s jarem $\lambda/2_{jp}$. Všechny fotografie byly v počítači zvětšeny tak, aby reálná délka $l = 50$ mm odpovídala délce $l_p = 200$ mm. Koeficient přepočtu $q = 0,25$.

Z tabulky je velmi dobře patrné, že $\lambda/2_{vp}$ pro čistou vodu jeví jen malý nárůst, zatímco $\lambda/2_{jp}$ pro vodu s jarem je nárůst délky o hodně větší. Na proudu čisté vody proběhlo na



Obrázek 6.5: Čistá voda



Obrázek 6.6: Voda s jarem

reálné délce 165 mm sedm půlperiod kmitů, na vodě s jarem na délce 164 mm pouze šest půlperiod. Rozdíl je zcela evidentní. Tuto vzdálenost kapalina urazila přibližně za 0,12 s. To je zároveň hrubý odhad doby, za kterou se povrchově aktivní látka zkoncentrovala na povrchu proudu.

6.3.5 Srovnání metod a závěr měření

K experimentování s proudem kapaliny jsem použil tři různé metody, každá vyžadovala odlišný způsob vyhodnocení.

Jako nejpřesnější se jeví metoda vodorovného proudu vytékajícího z hadice použitá při měření módu 2. Úhlovou frekvenci vypočtenou z experimentálně určené výtokové rychlosti a délky, na níž proběhly dvě periody kmitů, můžeme srovnat s frekvencí vypočtenou ze znalosti poloměru hadice. Vůbec nebylo nutné měřit průměr proudu. Největším problémem byla výroba deformace hadice tak, aby co nejlépe odpovídala požadovanému oválnému tvaru. Poměrně nízké chyby také zaručuje fakt, že při proměřování v grafickém programu jsem musel pečlivě určit pouze polohu třetího minima (první minimum bylo definováno polohou výtokového otvoru).

Metoda svislého proudu se naopak ukázala být nejméně přesnou a vhodnou. Urychlování kapaliny v tíhovém poli je zde natolik patrné, že bylo třeba jej vzít do úvahy při výpočtu úhlových frekvencí. Oproti ostatním metodám jsem si tak musel vystačit s proměřováním délky, na níž proběhla pouze jediná půl perioda kmitů. Chyby uvedené u úhlových frekvencí v odstavci 6.3.2 jsou vypočteny jako střední kvadratická odchylka ze šesti hodnot, spočítal jsem proto také chybu jednotlivých úhlových frekvencí ze zákona šíření chyb pro každou fotografii zvlášť. Relativní chyba frekvence $\omega_{2\lambda}$ se pohybuje okolo 4,5%, frekvence ω_{2R_s} dokonce 9,6%, u frekvence ω_{2z} je to cca 2,3%, což jsou hodnoty poměrně vysoké.

Měření třetího módu pomocí plastového válce se nakonec ukázalo také jako poměrně přesné. Jde již o efekt podstatně jemnější než u módu 2, velmi pěkně pozorovatelný byl spíše pro nižší výtokové rychlosti. Pro ně už však hraje příliš velkou roli urychlování kapaliny v tíhovém poli, proto byly k vyhodnocení použity fotografie pořízené pro vyšší rychlosti. Velmi důležité bylo nechat kapalinu ve válci dostatečně uklidnit, jinak bylo proudění velmi nestabilní. Díky zúžení proudu bylo nutné určit jeho průměr experimentálně. Zdrojem systematické chyby může být předpoklad nulové viskozity kapaliny, skutečná výtoková rychlost je lehce nižší než hodnota určená z výšky hladiny nad výtokovým otvorem.

Při experimentu s povrchově aktivní látkou šlo především o kvalitativní potvrzení očekávaného jevu. Předpokládaný efekt se podařilo zcela jednoznačně prokázat. Odhad doby, za kterou se povrchově aktivní látka zkoncentrovala na povrchu proudu, byl poměrně hrubý, nicméně pro základní představu je dostatečný.

Kapitola 7

Rotující proud kapaliny

V předešlých úvahách o proudu kapaliny kmitajícího pod vlivem povrchového napětí jsme proudění považovali za nevířivé. Naskytá se otázka, jak se proud bude chovat, pokud se místo pulsací bude jako celek otáčet.

7.1 Teoretické řešení

Vyjděme ze základní rovnice rovnováhy tekutin

$$-\nabla p + \mathbf{F} = 0, \quad (7.1)$$

kteřá dává do souvislosti rozložení tlaku p v kapalině nacházející se v klidu s vnější objemovou silou \mathbf{F} působící na kapalinu. Je výhodné problém řešit v neinerciální soustavě souřadnic, která se otáčí spolu s válcem úhlovou rychlostí ω . Objemovou silou \mathbf{F} pak je síla odstředivá (opět neuvažujeme tíhové pole). Vzhledem k symetrii problému použijeme vyjádření gradientu a odstředivé síly v polárních souřadnicích

$$-\frac{dp}{dr} + \rho\omega^2 r = 0. \quad (7.2)$$

Integrací dostáváme rozložení tlaku v kapalině v závislosti na vzdálenosti od středu proudu

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2. \quad (7.3)$$

Úhlovou rychlost ω_n chceme zvolit tak, aby průřez proudu byl popsán předpisem $r(\varphi) = R + f(\varphi) = R + A_n \cos(n\varphi)$ a zároveň byly všechny částice kapaliny v klidu ($v_x = v_y = 0$). V tomto případě můžeme opět použít Laplaceovu-Youngovu rovnici. Tlak pod zakřiveným povrchem kapaliny je dán rovnicí (7.3), vnější tlak můžeme položit roven nule. Křivost v polárních souřadnicích jsme spočítali výše, viz rovnice (6.23), tedy

$$\sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{r''}{r^2} \right) - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = 0. \quad (7.4)$$

Funkce $\frac{1}{r}$ a r^2 rozvineme do Taylorovy řady a zanedbáme členy vyšších řádů. Po dosazení dostaneme

$$\sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{f}{R^2} - \frac{f''}{R^2} \right) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (R^2 + 2Rf) = 0. \quad (7.5)$$

Derivací rovnice (7.5) podle úhlu φ a dosazením předpokladu $f = A_n \cos(n\varphi)$ dostáváme předpis pro úhlovou frekvenci ω_n jednotlivých módů

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} (n^2 - 1). \quad (7.6)$$

Srovnajme nyní tento výsledek s předpisem (6.39) vypočteným v předchozí kapitole pro kmitající proud. Vidíme, že úhlové frekvence pro konkrétní n nejsou stejné, nelze proto zaměňovat rotaci a kmitání proudu. Obecné proudění je tedy superpozicí kmitání a rotace.

Kapitola 8

Závěr

V této práci jsme podrobně prozkoumali několik fyzikálních systémů, v nichž povrchové napětí hraje zásadní roli. Východiskem řešení pro nás většinou byla tzv. Laplaceova-Youngova rovnice, popisující rozdíl tlaků nad a pod zakřiveným povrchem. Díky ní dokážeme popsat také mnoho dalších jevů, kterými jsme se zde nezabývali, např. kapilární elevace a deprese, tvar mýdlových bublin.

Charakteristická tenká vrstvička kapaliny ohraničená pevným rámečkem může sloužit k měření povrchového napětí a je také velmi dobrou pomůckou při demonstraci jevů spojených s povrchovým napětím. Pro zadané okrajové podmínky jsme našli tvar, který membrána zaujme, a tento výsledek jsme srovnali s experimentem.

Hledání tvaru vzduchové bubliny nacházející se na hladině kapaliny bylo založeno na platnosti Laplaceovy-Youngovy rovnice. Pro válcový a kruhově symetrický model bubliny jsme našli diferenciální rovnice popisující jednotlivé části tvaru bubliny. Na základě numerického řešení rovnic platných pro válcový model se podařilo vykreslit tvar několika různě velkých bublin. Srovnáním extrémních případů se potvrdil význam škálování vůči kapilární délce – pro bublinu o hodně menší než je kapilární délka převažuje vliv povrchového napětí, zatímco pro bublinu o hodně větší převažuje vliv tíhového pole.

Velmi podobným postupem jako u bubliny jsme našli diferenciální rovnici popisující tvar kapaliny nacházející se nad okrajem nádoby. V experimentálním uspořádání jsme využili brčko a malý plastový kelímek, přičemž byl opět dobře patrný rozdíl tvaru daný rozměry nádobek. Numerické řešení tvaru jsme tentokrát mohli přímo porovnat s fotografií. Jejich shoda byla velmi dobrá, i když jsme použili jen válcový model kapky, tj. zanedbali jsme druhý poloměr křivosti.

V posledních dvou kapitolách jsme studovali chování proudu kapaliny vytékajícího z nekruhového otvoru. Ukázali jsme, že nelze zaměňovat oscilace a rotaci tvaru proudu, protože pro konkrétní mód vycházejí pro oba případy různé úhlové frekvence. Několika odlišnými metodami se podařilo experimentálně realizovat druhý a třetí mód oscilací a pořízené fotografie vyhodnotit. Dále jsme pomocí druhém módu oscilací kvalitativně prokázali vliv povrchově aktivní látky na povrchové napětí kapaliny a alespoň orientačně odhadli čas, za který se tato látka zkoncentrovala na povrchu proudu kapaliny.

Literatura

- [1] Brdička, M. - Samek, L. - Sopko, B.: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2005, ISBN 80-200-1344-X.
- [2] Landau, L.D. - Lifshitz, E.M.: *Fluid mechanics - 2nd Edition*, Butterworth-Heineman, Oxford, 1987, ISBN 0-08-033932-8.
- [3] Lavrentjev, M.A. - Ljusternik, L.A.: *Kurs variačního počtu*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.
- [4] Škrášek, J. - Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II*, SNTL, Praha, 1986.
- [5] Kvasnica, J.: *Matematický aparát fyziky*, Academia, Praha, 1997, ISBN 80-200-0603-6.
- [6] Moore, W.J.: *Fyzikální chemie*, SNTL, Praha, 1979.
- [7] Ščukin, E.D. - Percov, A.V. - Amelinová E.A.: *Koloidní chemie*, Academia, Praha, 1990, ISBN 80-200-0259-6.
- [8] Riley, K.F. - Hobson, M.P. - Bence S.J.: *Mathematical methods for physics and engineering*, Cambridge, 1990, ISBN 0-521-89067-5.
- [9] Mechlová, E.: *Molekulová fyzika 1 - Molekulové jevy v kapalinách*, Ostrava, 2004, ISBN 80-7042-989-5.
- [10] Tyc, T.: *Fyzika v každodenním životě*, <http://www.otvarena-veda.cz/ov/users/Image/default/C2Seminare/MultiObSem/102.pdf>