

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
Fyzika sférického kyvadla

Lenka Herzánová

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Tomáš Tyc, PhD.

2009

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu bakalářské práce doc. Mgr. Tomáši Tycovi, PhD. za poskytnuté rady a podnětné návrhy.
Děkuji rovněž Mgr. Jiřímu Bartošovi, PhD. za neocenitelnou pomoc při tvorbě experimentu.
V neposlední řadě děkuji Martinu Bělohoubkovi za podporu a pomoc s grafickým řešením obrázků.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Brně dne 25.5.2009

Lenka Herzánová

Abstrakt:

Pojem kyvadlo je všeobecně velmi dobře znám v důsledku nepřeborného množství jeho praktických aplikací. Ve fyzice můžeme kyvadlo využít pro měření mnoha veličin (čas, tíhové zrychlení, úhlová rychlost rotace Země). V této práci se zabýváme sférickým kyvadlem, jehož pohybové rovnice nemají analyticky vyjádřitelné řešení. V aproximaci malých kmitů je lze považovat za dvourozměrný harmonický oscilátor. Pro větší výchylky je pohyb kyvadla anharmonický, dochází ke stáčení bodu, v němž kyvadlo dosahuje maximální výšky. Práce obsahuje teoreticky odvozenou velikost tohoto stáčení včetně srovnání výsledků s experimentem. Dále studuje stočení roviny kyvu Foucaultova kyvadla v důsledku rotace Země a určuje, zda v tomto případě nemůže být výsledek ovlivněn i stočením vlivem anharmoničnosti sférického kyvadla.

Klíčová slova: sférické kyvadlo, eliptické integrály, neinerciální vztažná soustava, Foucaultovo kyvadlo

Abstract:

Pendulum is a well-known system with plenty of practical applications. In Physics, pendulum is used in measurements of time, gravitational acceleration, angular velocity of the Earth's rotation, etc. In this thesis we study the spherical pendulum, whose equations of motion cannot be solved analytically. In the approximation of small oscillations spherical pendulum can be considered as a two-dimensional harmonic oscillator. The motion of pendulum becomes anharmonic for larger amplitudes. The point in which the pendulum reaches its maximum height is caused to veer. This thesis comprises theoretical derivation of the quantity of this veering as well as its comparison with experiments. The problem of Foucault pendulum is also analysed.

Keywords: spherical pendulum, elliptic integrals, noninertial frame of reference, Foucault pendulum

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 5 |
| 2 | Sférické kyvadlo | 7 |
| 2.1 | Popis ve sférických souřadnicích | 7 |
| 2.2 | Aproximace – malé kmity | 9 |
| 2.3 | Rozbor pohybu sférického kyvadla | 10 |
| 2.4 | Eliptické integrály | 14 |
| 3 | Foucaultovo kyvadlo | 17 |
| 3.1 | Coriolisovo zrychlení | 17 |
| 3.2 | Stáčení Foucaultova kyvadla | 19 |
| 4 | Měření stočení sférického kyvadla | 21 |
| 4.1 | Popis měření | 21 |
| 4.2 | Určení délky kyvadla | 23 |
| 4.3 | Vlastní měření | 24 |
| 5 | Měření stočení Foucaultova kyvadla | 28 |
| 5.1 | Cíl měření | 28 |
| 5.2 | Postup a zpracování měření | 31 |
| 5.3 | Vlastní měření | 33 |
| 6 | Závěr | 34 |
| | Literatura | 35 |

Kapitola 1

Úvod

Pojem kyvadlo je všeobecně velmi dobře znám, obvykle se jím rozumí hmotné těleso zavěšené na lanku a vystavené působení gravitačního pole. Snad každý se v životě setkal s nějakým praktickým využitím kyvadla. Už jako novorozenci jsme byli fascinováni předměty zavěšenými nad postýlkou, aniž jsme tušili, jaké množství zajímavých fyzikálních zákonů se za jejich pohybem skrývá. A tím naše poznání kyvadel zdaleka neskončilo.

Z nepřeborných možností použití kyvadla tu jmenujme alespoň některé. V mnoha kulturách se kyvadlo objevuje při náboženských obřadech (např. kadidelnice). Věštěním pomocí pohybu sférického kyvadla se zabývají zastánci spiritismu.

Ve fyzice můžeme kyvadlo využít pro měření mnoha veličin. Měření času pomocí kyvadla navrhl už Galileo Galilei. První kyvadlové hodiny zkonstruoval roku 1656 holandský fyzik Christiaan Huygens. Jako nejpřesnější měřič času se používaly až do 30. let 20. století, kdy byly vynalezeny hodiny řízené krystalem křemene.

Roku 1851 Léon Foucault demonstroval na stáčení roviny kyvu sférického kyvadla rotaci Země. K určení tíhového zrychlení v daném místě na povrchu Země je možné využít reverzního kyvadla, hybnost projektilů se dříve měřila balistickým kyvadlem atd. Pro snadnou konstrukci a názornost jsou kyvadla vděčným nástrojem demonstračních experimentů.

V této práci se budeme zabývat tzv. sférickým kyvadlem, jehož koncový bod se pohybuje po sféře. Všechny předchozí příklady jsou typem tohoto kyvadla. Na první pohled by se nám mohlo zdát, že se jedná o velmi jednoduché zařízení. Při bližším zkoumání zjistíme pravý opak. Pohybové rovnice sférického kyvadla nemají analyticky vyjádřitelné řešení. Jak ukážeme dále,

v aproximaci malých výchylek ze stabilní polohy lze kyvadlo považovat za dvourozměrný harmonický oscilátor. Pro větší výchylky přechází pohyb kyvadla v anharmonický, což mimo jiné způsobuje stáčení bodu, ve kterém kyvadlo dosahuje maximální výšky.

Cílem této práce je podat teoretický popis různých aspektů sférického kyvadla a srovnat jej s experimentálními výsledky. Půjde především o teoretické odvození úhlové rychlosti stáčení bodu maximální výšky. Dále se práce zabývá ověřením stočení roviny kyvu Foucaultova kyvadla v důsledku rotace Země a určením, zda v tomto případě nemůže být výsledek ovlivněn i stočením vlivem anharmoničnosti sférického kyvadla.

Kapitola 2

Sférické kyvadlo

2.1 Popis ve sférických souřadnicích

Sférickým kyvadlem rozumíme částici v tíhovém poli, jejíž pohyb je vázaný na kulovou plochu.

Mějme částici (hmotný bod) o hmotnosti m zavěšenou na nehmotném a nepružném lanku délky l . Lanko nechť je uchyceno pevně. Při řešení pohybu částice zanedbejme odpor prostředí. Zvolme počátek kartézské soustavy souřadnic v bodě uchycení lanka – ve středu kulové plochy, na kterou je pohyb částice vázán.

Pohyb hmotného bodu je v trojrozměrném prostoru omezen jednou vazební podmínkou, systém má proto dva stupně volnosti. Vzhledem k symetrii problému je vhodné přejít ke sférickým souřadnicím (r, ϑ, φ) , ve kterých je vazební podmínka dána rovnicí

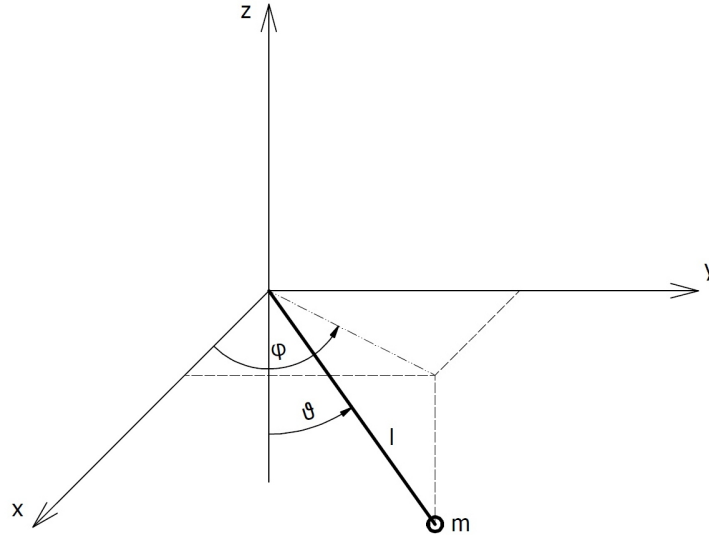
$$r = l. \tag{2.1}$$

Přechod mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi (obr. 2.1) je dán relacemi

$$\begin{aligned} x &= l \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= l \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= -l \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nulovou hladinu potenciální energie zvolme v rovině procházející bodem závěsu. Potenciální energie částice je potom rovna

$$U = mgz = -mgl \cos \vartheta, \tag{2.3}$$



Obr. 2.1: Přechod mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi

kinetická energii částice je dána vztahem

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2). \quad (2.4)$$

Pro Lagrangeovu funkci dostáváme z předchozích dvou rovnic výraz

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta. \quad (2.5)$$

Z (2.5) je patrné, že $L = L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$. Zobecněná souřadnice φ je cyklickou souřadnicí a jí příslušející zobecněná hybnost p_φ je integrálem pohybu:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = K = \text{konst.} \quad (2.6)$$

Lagrangián nezávisí explicitně na čase, proto je i zobecněná energie integrálem pohybu:

$$E = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \vartheta. \quad (2.7)$$

Vyloučením $\dot{\varphi}$ z (2.6) a (2.7) získáváme

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g \cos \vartheta}{l} - \frac{K^2}{m^2 l^4 \sin^2 \vartheta}. \quad (2.8)$$

Separací proměnných a následnou integrací se dostáváme k rovnici

$$t - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{l^2 \sin \vartheta \, d\vartheta}{\pm \sqrt{2l^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{E}{m} + gl \cos \vartheta \right) - \frac{K^2}{m^2}}}. \quad (2.9)$$

Tento integrál je eliptický, nelze jej vyjádřit elementárními funkcemi. Zkusme nejprve řešit zjednodušenou situaci – pohyb pod malým úhlem ϑ .

2.2 Aproximace – malé kmity

Vraťme se nyní zpět ke kartézským souřadnicím. Přepišme do nich vazebnou podmínku (2.1)

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2, \quad (2.10)$$

proto

$$z = \pm \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}, \quad \dot{z}^2 = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - (x^2 + y^2)}. \quad (2.11)$$

Bude nás zajímat situace v blízkosti stabilní polohy, z proto budeme brát se znaménkem plus. Do lagrangianu

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (2.12)$$

dosadíme (2.11), získáváme výraz

$$L = \frac{m}{2} \frac{\dot{x}^2(l^2 - y^2) + \dot{y}^2(l^2 - x^2) + 2xy\dot{x}\dot{y}}{l^2 - (x^2 + y^2)} + mg\sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}. \quad (2.13)$$

Uvažme nyní „malé“ kmity, kdy $x, y \ll l$ a $\dot{x}, \dot{y} \ll \sqrt{gl}$, pak

$$\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{x^2 + y^2}{l^2}, \quad \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2}. \quad (2.14)$$

Uvědomíme-li si, že

$$\sin^2 \vartheta = \frac{x^2 + y^2}{l^2}, \quad (2.15)$$

pak jsou tyto aproximace analogické situaci $\vartheta^2 \ll 1$, kdy $\sin \vartheta \approx \vartheta$, a proto ϑ je menší než pět stupňů (známý postup pro malé výchylky u matematického kyvadla). Vraťme se k lagrangiánu a aproximací (2.14) ho rozvíňme do druhého řádu

$$L \approx \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgl \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} \right). \quad (2.16)$$

Vidíme, že souřadnice x a y nejsou v L provázané a L má tvar lagrangiánu pro dvourozměrný harmonický oscilátor. Snadno získáme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x, \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y, \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde $\omega = \sqrt{g/l}$ je vlastní frekvence oscilátoru.

Složení pohybu těchto dvou oscilátorů se stejnou frekvencí vzniká pohyb po elipse. Pohyb částice je periodický s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.18)$$

za kterou se úhel φ (polární souřadnice) zvětší (resp. zmenší) o 2π . Kyvadlo je v čase $t + T$ přesně v tom stejném stavu, v jakém bylo v čase t . Jak uvidíme dále, bez aproximace (2.14) je situace značně odlišná.

2.3 Rozbor pohybu sférického kyvadla

Vraťme se k obecnému řešení pohybu sférického kyvadla (kapitola 2.1) a pokusme se pohyb kyvadla více popsat¹.

Ve speciálním případě, kdy $K = 0$, je podle (2.6) úhlová rychlost $\dot{\varphi}$ rovna nule. Kyvadlo se pohybuje v rovině popsané úhlem $\varphi = \text{konst}$ daným počátečními podmínkami.

Pro další diskusi pohybu sférického kyvadla předpokládejme $K \neq 0$.

¹Budeme sledovat postup uvedený na str. 302-308 v [1], mírná odlišnost výrazů je dána opačnou orientací osy z .

Označme

$$\varepsilon = \frac{E}{m}, \quad k = \frac{K}{m} \quad (2.19)$$

a rovnici (2.8) převedme zpětnou substitucí $\vartheta = \arccos(-z/l)$ do proměnné z :

$$\dot{z}^2 = \frac{2(\varepsilon - gz)(l^2 - z^2) - k^2}{l^2}. \quad (2.20)$$

Nejvýznačnějšími body trajektorie kyvadla jsou body vratu – maxima a minima funkce $z(t)$ (resp. $\vartheta(t)$). V těchto bodech je $\dot{z} = 0$. Hledejme proto kořeny polynomu třetího řádu

$$P(z) = 2(\varepsilon - gz)(l^2 - z^2) - k^2 \quad (2.21)$$

vystupujícího v čitateli na pravé straně rovnice (2.20). Nejdříve si povšimněme funkčních hodnot $P(z)$ v bodech $z = \pm l$ a $z = \pm\infty$:

$$P(\pm l) = -k^2, \quad P(\pm\infty) = \pm\infty. \quad (2.22)$$

Na první pohled je zřejmé, že v intervalu (l, ∞) existuje reálný kořen polynomu $P(z)$, označme jej z_3 .

Rozložme nyní $P(z)$ na součin kořenových činitelů

$$P(z) = 2g(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3). \quad (2.23)$$

Porovnáním koeficientů polynomu $P(z)$ ve vyjádřeních (2.21) a (2.23) získáváme:

$$\varepsilon = g(z_1 + z_2 + z_3), \quad (2.24)$$

$$-l^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, \quad (2.25)$$

$$2\varepsilon l^2 - k^2 = -2g z_1 z_2 z_3. \quad (2.26)$$

Z (2.25) získáváme vyjádření pro z_3 :

$$z_3 = -\frac{l^2 + z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \quad (2.27)$$

Dosazení do (2.24), (2.26) a vyloučení ε nám dává výraz pro k :

$$k = \pm\sqrt{2g} \sqrt{\frac{(l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2)}{-z_1 - z_2}}. \quad (2.28)$$

S přihlédnutím k (2.22) mohou pro z_1 a z_2 nastat pouze situace, kdy jsou kořeny z_1 a z_2 oba:

- i) imaginární,
- ii) reálné a ležící v intervalu $(-\infty, -l)$,
- iii) reálné a ležící v intervalu $(-l, l)$.

Z fyzikálního hlediska nás ovšem zajímá pouze třetí možnost. Zvolme $z_1 \leq z_2$. Pro kořeny polynomu $P(z)$ pak platí:

$$-l < z_1 \leq z_2 < l < z_3. \quad (2.29)$$

Zaměříme se nejprve na situaci, kdy $z_1 = z_2$. Pak $P(z) \geq 0$ pouze pro $z = z_1$, částice se pohybuje po kružnici o poloměru $\varrho = \sqrt{l^2 - z^2}$ obvodovou rychlostí (viz. 2.6)

$$v = \varrho \dot{\varphi} = \frac{k}{\varrho} = \text{konst.} \quad (2.30)$$

Částice se tedy pohybuje rovnoměrně po kružnici. Její trajektorie je symetrická vzhledem k ose z a pro nás nezajímavá, neboť všechny body trajektorie jsou rovnocenné, pohyb je periodický.

Nyní zkoumejme druhý případ, kdy $z_1 < z_2$. Polynom $P(z)$ nabývá nezáporných hodnot pro všechna $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$. Částice se na kouli může pohybovat mezi dvěma rovnoběžkami – průniky sféry s rovinami $z = z_1$ a $z = z_2$. Jestliže částice stoupá od rovnoběžky $z = z_1$ k rovnoběžce $z = z_2$, pak $\dot{z} > 0$, jestliže klesá, je $\dot{z} < 0$.

Pro úhlovou rychlost $\dot{\varphi}$ dostáváme z (2.6) zpětnou substitucí za z vztah

$$\dot{\varphi} = \frac{k}{l^2 - z^2}. \quad (2.31)$$

Pro $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$ je $l^2 > z^2$, $\dot{\varphi}$ nemění své znaménko a úhel φ neustále narůstá resp. klesá v závislosti na znaménku momentu hybnosti $K = mk$. Částice tak obíhá kolem osy z , přitom pohyb v souřadnici z je periodický a ohraničený krajními polohami z_1 a z_2 .

Bude nás zajímat, jak se s časem mění souřadnice φ bodu maximálního vychýlení kyvadla ($z = z_2$). Hledejme proto φ jako funkci z . Z rovnic (2.20) a (2.31) dostáváme

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{\pm k l}{(l^2 - z^2) \sqrt{P(z)}} \quad (2.32)$$

a následná integrace dává

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{z_0}^z \frac{\pm kl dz'}{(l^2 - z'^2)\sqrt{P(z')}}. \quad (2.33)$$

Zajímejme se nyní o změnu úhlu φ při pohybu částice mezi krajními rovnoběžkami $z = z_1$ a $z = z_2$. Pohybuje-li se částice od z_2 k z_1 , pak $\dot{z} < 0$ a ve vzorci (2.33) volíme znaménko mínus:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{z_2}^{z_1} \frac{-kl dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{P(z)}}. \quad (2.34)$$

Pohybuje-li se částice od z_1 k z_2 volíme naopak znaménko plus:

$$\varphi'_2 - \varphi_1 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{+kl dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{P(z)}}. \quad (2.35)$$

Přejde-li částice z krajní polohy na rovnoběžce $z = z_2$ přes krajní polohu na rovnoběžce $z = z_1$ zpět do krajní polohy na rovnoběžce $z = z_2$, pak se úhel φ změní o hodnotu

$$\Phi = \varphi'_2 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi'_2 - \varphi_1) \quad (2.36)$$

a dosazením z (2.34) a (2.35) se dostáváme k výrazu

$$\Phi = 2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{kl dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{P(z)}}. \quad (2.37)$$

Periodou pohybu nazvěme čtyřnásobek doby nutné k uražení dráhy mezi dvěma po sobě následujícími dotykovými body s různými hraničními rovnoběžkami. Za jednu periodu se úhel φ změní o 2Φ . V aproximaci malých kmitů (viz. kapitola 2.2) se úhel φ za jednu periodu změnil o 2π . Jestliže $\Phi \neq \pi$, pozorujeme jisté stáčení trajektorie částice. Měření tohoto stáčení a srovnání vypočtených hodnot s experimentálně zjištěnými je jedním z cílů této práce. Zajímá nás proto rozdíl úhlových poloh sférického kyvadla a dvourozměrného harmonického oscilátoru po jedné periodě. Označme tento rozdíl $\Delta\Phi$. Z rovnice (2.37) vyplývá:

$$\Delta\Phi = 2\Phi - 2\pi = 4 \int_{z_1}^{z_2} \frac{kl dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{P(z)}} - 2\pi = 4I - 2\pi. \quad (2.38)$$

Integrál I v předchozí rovnici lze úpravou na parciální zlomky

$$\frac{l}{l^2 - z^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z+l} - \frac{1}{z-l} \right] \quad (2.39)$$

převést na rozdíl dvou eliptických integrálů třetího druhu

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \frac{k dz}{(z+l)\sqrt{P(z)}} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{k dz}{(z-l)\sqrt{P(z)}} \right\}. \quad (2.40)$$

Analogicky lze z rovnice (2.9) zpětnou substitucí za z získat vzorec pro výpočet periody kyvadla

$$T = \int_{z_1}^{z_2} \frac{4l dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad (2.41)$$

ve kterém figuruje eliptický integrál prvního druhu.

Teorii eliptických integrálů se budeme zabývat v následující části.

2.4 Eliptické integrály

Eliptickým integrálem rozumíme integrál typu

$$\mathcal{I} = \int R(t, \sqrt{P(t)}) dt, \quad (2.42)$$

kde

$$P(t) = a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \quad (2.43)$$

je polynom třetího nebo čtvrtého stupně ($a_0 \neq 0 \vee a_1 \neq 0$) a $R(t, \sqrt{P(t)})$ je racionální lomená funkce. Eliptické integrály nelze vyjádřit elementárními funkcemi. Lze je však pomocí vhodné substituce převést na kombinaci kanonických tvarů – eliptických integrálů prvního, druhého a třetího druhu. Tyto pak řešíme numericky.

Uvedme nyní definice těchto tří kanonických integrálů v Jacobiho tvaru a pomocí Jacobiho eliptických funkcí.

Eliptickými integrály prvního, druhého a třetího druhu nazýváme po řadě integrály typu:

$$F(\varphi|\kappa) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa t^2)}} = \int_0^{u_1} du = u_1, \quad (2.44)$$

$$E(\varphi|\kappa) = \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1-\kappa t^2} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{u_1} \operatorname{dn}^2 u du, \quad (2.45)$$

$$\Pi(\alpha^2, \varphi|\kappa) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1-\alpha^2 t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa t^2)}} = \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u}, \quad (2.46)$$

kde $y = \sin \varphi$ a $\varphi = \operatorname{am} u_1$. Funkce $\operatorname{sn} u$ a $\operatorname{dn} u$ jsou Jacobiho eliptické funkce². V případě, že $\varphi = \pi/2$, nazýváme integrály úplnými.

Uvažme nyní integrál tvaru

$$J = \int_c^x \frac{dt}{(p-t)\sqrt{Q(t)}}, \quad (2.47)$$

kde $p \in \mathbb{R}$, $Q(t)$ je polynom třetího stupně s reálnými a navzájem různými kořeny $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > b > c$, jehož rozklad na kořenové činitele je dán výrazem

$$Q(t) = (t-a)(t-b)(t-c). \quad (2.48)$$

Nechť pro x a p z (2.47) platí: $b \geq x > c \wedge p \neq c$. Pak integrál J převedeme substitucí³

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u &= \frac{t-c}{b-c} & \kappa &= \frac{b-c}{a-c} & \gamma &= \frac{2}{\sqrt{a-c}} \\ \varphi = \operatorname{am} u_1 &= \arcsin \sqrt{\frac{x-c}{b-c}} & \operatorname{sn} u_1 &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.49)$$

na eliptický integrál třetího druhu

$$J = \frac{\gamma}{p-c} \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\gamma}{p-c} \Pi(\alpha^2, \varphi|\kappa), \quad (2.50)$$

kde $\alpha^2 = (b-c)/(p-c)$. Ve speciálním případě, kdy $x = b$, je $\varphi = \pi/2$ a J je úplným eliptickým integrálem třetího druhu.

Vraťme se nyní zpět k integrálu I z (2.40). Vidíme, že se jedná o součet dvou úplných eliptických integrálů třetího druhu, pro které můžeme použít předchozí substituci. Použitím (2.49) a (2.50) získáváme

$$I = \frac{kl}{\sqrt{2g(z_3 - z_1)}} \left(\frac{1}{l+z_1} \Pi_1 + \frac{1}{l-z_1} \Pi_2 \right), \quad (2.51)$$

²Více o eliptických funkcích a integrálech lze najít v [2] a [3].

³Viz. str. 72 v [2].

kde

$$\Pi_1 = \Pi \left[\frac{z_2 - z_1}{-l - z_1} \mid \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right], \quad (2.52)$$

$$\Pi_2 = \Pi \left[\frac{z_2 - z_1}{l - z_1} \mid \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right]. \quad (2.53)$$

Vzhledem k (2.27) a (2.28) je $z_3 = z_3(l, z_1, z_2)$ a $k = k(l, z_1, z_2)$. Známe-li délku kyvadla l , maximum z_2 i minimum z_1 souřadnice z (resp. jim odpovídající úhly ϑ_{max} a ϑ_{min}), můžeme tyto integrály řešit numericky např. pomocí programu Mathematica a z rovnic (2.38), (2.51-2.53) získat stočení trajektorie částice po jedné periodě.

Stejnou substitucí můžeme převést i integrál ve výrazu pro periodu (2.41) na kanonický tvar

$$T = \frac{8l}{\sqrt{2g(z_3 - z_1)}} F \left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right). \quad (2.54)$$

Kapitola 3

Foucaultovo kyvadlo

3.1 Coriolisovo zrychlení

Soustava spojená se Zemí je neinerciální vztažnou soustavou. Proto (pokud nemáme důvod je zanedbat) musíme vzít v úvahu i fiktivní síly. Podívejme se nyní, jak se rotace Země a její oběh kolem Slunce projeví na pohybu matematického kyvadla.

Nechť soustava S' je pevně spojena se Zemí a její počátek O' leží na povrchu Země. Vektor spojující střed Země s počátkem O' označme \mathbf{R} . Sledovaná částice o hmotnosti m se v soustavě S' nachází v místě s polohovým vektorem $\mathbf{r}'(t)$ (obr. 3.1), má rychlost $\mathbf{v}'(t)$ a zrychlení $\mathbf{a}'(t)$.

Mějme inerciální vztažnou soustavu S . Polohový vektor středu Země v této soustavě označme \mathbf{r}_z . Počátek O této soustavy přitom zvolme tak, aby $|\mathbf{r}_z| \gg |\mathbf{R}|$.

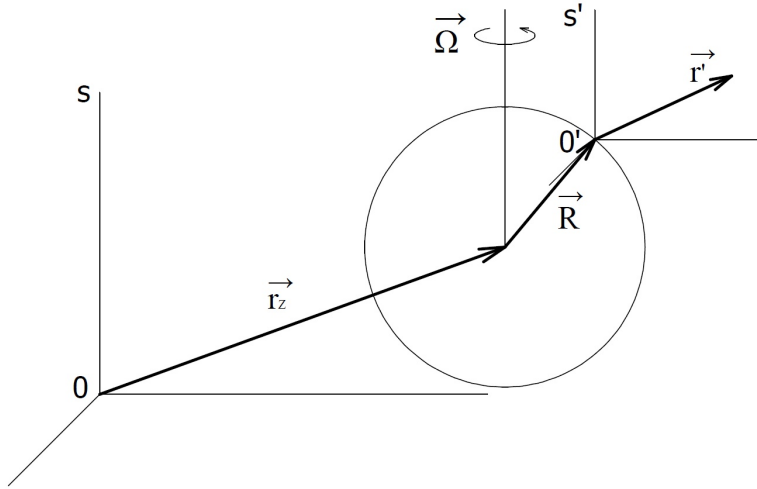
Vzhledem k soustavě S se Země (a s ní i soustava S') otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\Omega}$. Převodní vztah mezi zrychleními částice v soustavách S a S' je dán rovnicí

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right) \times \mathbf{r}', \quad (3.1)$$

kde \mathbf{A} označuje zrychlení počátku O' v soustavě S :

$$\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{r}}_z + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}). \quad (3.2)$$

Časovou závislost úhlové rychlosti rotace Země lze zanedbat. Vzhledem k předpokládané délce trvání experimentů prokazujících rotaci Země (řádově hodiny) můžeme zrychlení $\ddot{\mathbf{r}}_z$ považovat za nulové. Dále zanedbejme rozměry



Obr. 3.1: Neinerciální vztažná soustava spojená se Zemí

experimentu vzhledem k poloměru Země $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{R}|$. Pak z (3.1) s použitím (3.2) získáváme

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{R})). \quad (3.3)$$

Nechť v soustavě S je silové působení na sledovanou částici dáno pouze gravitačním působením Země – \mathbf{F}_{GZ} (gravitační účinky ostatních objektů Sluneční soustavy neuvažujme). Pak

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{GZ}. \quad (3.4)$$

Dosazením do (3.3) dostáváme pro zrychlení v soustavě S'

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{m}\mathbf{F}_{GZ} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}') - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (3.5)$$

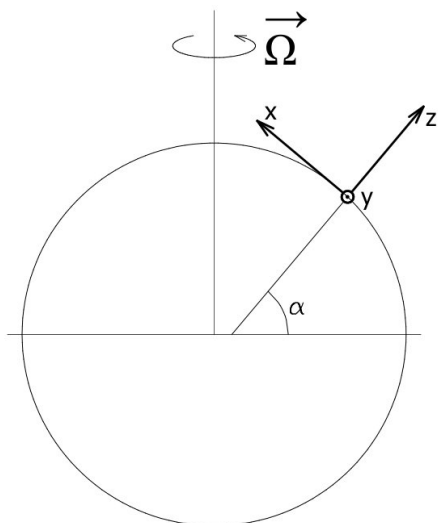
a se zavedením tíhového zrychlení

$$\mathbf{g} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_{GZ} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (3.6)$$

získáváme

$$\mathbf{a}' = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'). \quad (3.7)$$

Člen $2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}')$ nazýváme Coriolisovým zrychlením.



Obr. 3.2: Kartézská soustava souřadnic pro popis stáčení Foucaultova kyvadla

3.2 Stáčení Foucaultova kyvadla

Uvažme nyní aproximaci malých kmitů (viz. kapitola 2.2) pro sférické kyvadlo v neinerciální vztažné soustavě spojené se Zemí – Foucaultovo kyvadlo¹. Do pohybových rovnic (2.17) musíme podle (3.7) přidat Coriolisovo zrychlení.

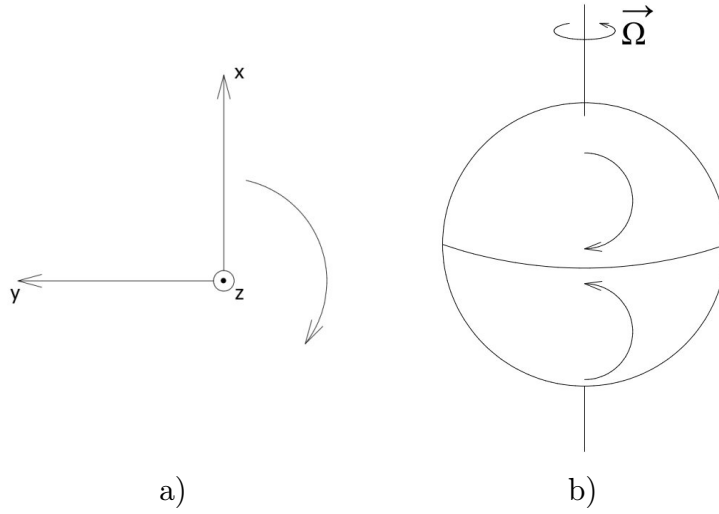
Předpokládejme, že se nacházíme na severní polokouli, na rovnoběžce dané úhlem α . Zvolme kartézskou soustavu souřadnic podle obr. 3.2. Pak pohybové rovnice přejdou do tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= -\omega^2 x' + 2\dot{y}'\Omega \sin \alpha, \\ \ddot{y}' &= -\omega^2 y' - 2\dot{x}'\Omega \sin \alpha,\end{aligned}\tag{3.8}$$

kde $\omega = \sqrt{g/l}$. Pohybové rovnice (3.8) tvoří soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu, které jsou vzájemně provázané. Přejdem do komplexní roviny²

¹Pojmenované po francouzském fyzikovi Léonu Foucaultovi, který roku 1851 na stáčení roviny kyvu sférického kyvadla demonstroval rotaci Země

²Postup převzatý z [4]



Obr. 3.3: Směr stočení Foucaultova kyvadla a) na severní polokouli b) na severní a jižní polokouli

$$u' = x' + iy' \quad (3.9)$$

získáváme jedinou lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$\ddot{u}' = -\omega^2 u' - 2i\dot{u}'\Omega \sin \alpha. \quad (3.10)$$

Můžeme předpokládat, že $\Omega \ll \omega$, pak předchozí rovnice dává v rozvoji do 1. řádu výsledek

$$u' = e^{-i\Omega t \sin \alpha} (c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t}). \quad (3.11)$$

Vidíme, že se trajektorie kyvadla stáčí úhlovou rychlostí $\Omega_C = \Omega \sin \alpha$ ve směru naznačeném na obr. 3.3 a).

Stáčení je nejvýraznější na pólech ($\sin \frac{\pi}{2} = 1$), na rovníku k němu nedochází vůbec ($\sin 0 = 0$). Na jižní polokouli se kyvadlo stáčí v opačném směru (obr. 3.3 b)).

Kapitola 4

Měření stočení sférického kyvadla

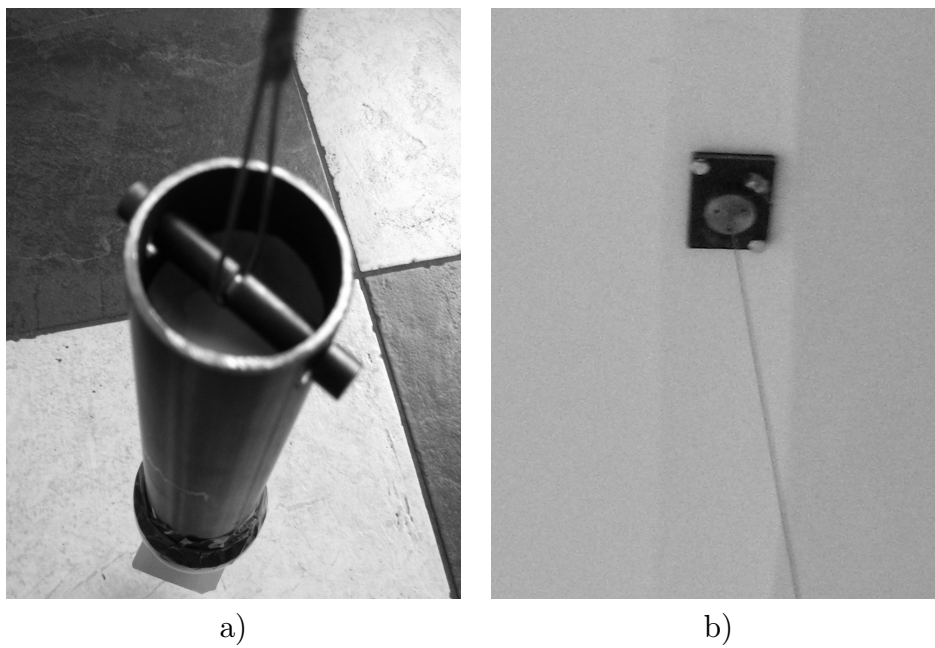
4.1 Popis měření

K měření bylo použito kyvadlo ve tvaru válce o průměru 5,08 cm, výšce 27 cm a hmotnosti 3,56 kg. Bylo zavěšeno na ocelovém lanku o průměru 1,5 mm a délce přibližně 3,69 m (viz. kapitola 4.2). Zavěšení kyvadla je zobrazeno na obr. 4.1.

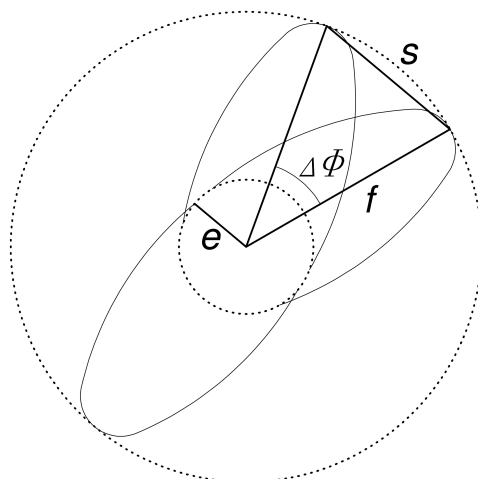
Pro měření stáčení bodu, v němž kyvadlo dosahuje maximální výšky, bylo vhodné, aby byla zaznamenávána trajektorie kyvadla. Proto byla na kyvadlo připevněna část plastové lahve s malým otvorem v uzávěru, kterým se na podlahu pod kyvadlem sypala mouka. Při konstrukci byl brán ohled na to, že kyvadlo musí zůstat rotačně symetrické.

Během pohybu ztrácí kyvadlo energii vlivem odporových sil a hmotnost v důsledku odsypávání mouky. Proto bylo vždy měřeno stočení kyvadla pouze po jedné periodě.

Počáteční podmínky pohybu kyvadla byly ovlivněny omezeným prostorem a schopností určení bodu maximální výchylky a velikosti stočení z obrazce vytvořeného odsypanou moukou. Proto jsme byli schopni proměřit stočení pouze v malém intervalu poměrů maximální a minimální výchylky. Částičky mouky se od sebe před dopadem na zem i po dopadu, v důsledku odrazů od podlahy, mírně rozptylovaly. Pro zmírnění rozptylu vlivem odrazu a pro lepší viditelnost částiček mouky byla pod kyvadlem rozprostřena tmavá látka. Během měření bylo pozorováno, že vnější okraj stopy mouky s velkou přesností odpovídá průsečíku roviny podlahy s přímkou určenou



Obr. 4.1: Fotografie a) uchycení kyvadla k lanku b) závěsu kyvadla



Obr. 4.2: Měření z obrazce vytvořeného odsypanou moukou

lankem, na kterém je kyvadlo zavěšeno (toto by jistě nebylo možné pro větší výchylky kyvadla).

Z obrazce jsme měřením získali vzdálenosti e , f a s (viz. obr. 4.2). Z nich určíme úhly ϑ_{max} , ϑ_{min} a $\Delta\Phi$:

$$\vartheta_{max} = \arctan \frac{f}{h}, \quad \vartheta_{min} = \arctan \frac{e}{h}, \quad \Delta\Phi = 2 \arcsin \frac{s}{2f}, \quad (4.1)$$

kde $h = 4,05$ m je vzdálenost bodu závěsu kyvadla od podlahy. K určení předpokládané velikosti stočení ze znalosti úhlů ϑ_{max} a ϑ_{min} ještě potřebujeme znát délku kyvadla.

4.2 Určení délky kyvadla

Všechny vztahy pro sférické kyvadlo byly odvozeny pro kyvadlo tvořené hmotným bodem na nehmotném závěsu (matematické kyvadlo). Ve skutečnosti používáme kyvadlo fyzické, musíme tedy určit jeho redukovanou délku (délku matematického kyvadla, které by se kývalo se stejnou frekvencí). Namísto složitého výpočtu momentu setrvačnosti určíme redukovanou délku z periody kyvadla.

Kyvadlo vychýlíme ze stabilní polohy o úhel menší než pět stupňů, kdy pro periodu pohybu matematického kyvadla s vysokou přesností platí:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.2)$$

Stopkami měříme dobu několika kmitů, měření několikrát opakujeme.

V tabulce 4.1 je naměřená doba dvaceti kmitů kyvadla. Měření bylo provedeno desetkrát. Ve výpočtu byla použita tabelovaná hodnota tíhového zrychlení pro Brno $g = 9,809980$ ms⁻².

| plná lahev | | | prázdná lahev | | |
|-------------------------------------|-----------|---------|-------------------------------------|-----------|---------|
| $20T$ [min:s] | $20T$ [s] | l [m] | $20T$ [min:s] | $20T$ [s] | l [m] |
| 01 : 17, 12 | 77, 12 | 3, 695 | 01 : 17, 09 | 77, 09 | 3, 692 |
| 01 : 17, 33 | 77, 33 | 3, 715 | 01 : 17, 03 | 77, 03 | 3, 686 |
| 01 : 17, 09 | 77, 09 | 3, 692 | 01 : 16, 91 | 76, 91 | 3, 675 |
| 01 : 16, 93 | 76, 93 | 3, 677 | 01 : 16, 97 | 76, 97 | 3, 680 |
| 01 : 16, 98 | 76, 98 | 3, 681 | 01 : 16, 84 | 76, 84 | 3, 668 |
| 01 : 17, 38 | 77, 38 | 3, 720 | 01 : 17, 18 | 77, 18 | 3, 700 |
| 01 : 16, 94 | 76, 94 | 3, 678 | 01 : 17, 24 | 77, 24 | 3, 706 |
| 01 : 17, 13 | 77, 13 | 3, 696 | 01 : 17, 06 | 77, 06 | 3, 689 |
| 01 : 17, 14 | 77, 14 | 3, 697 | 01 : 17, 25 | 77, 25 | 3, 707 |
| 01 : 17, 03 | 77, 03 | 3, 686 | 01 : 16, 95 | 76, 95 | 3, 678 |
| $l = (3, 694 \pm 0, 005) \text{ m}$ | | | $l = (3, 688 \pm 0, 004) \text{ m}$ | | |
| $l = (3, 691 \pm 0, 005) \text{ m}$ | | | | | |

Tab. 4.1: Redukovaná délka kyvadla

4.3 Vlastní měření

Při odvození vztahů pro stáčení sférického kyvadla jsme uvažovali pohyb v inerciální vztažné soustavě. Předpokládáme, že v daném (pro naše měření vhodném) rozsahu počátečních podmínek bude stočení kyvadla za jednu periodu jeho pohybu vlivem rotace Země zanedbatelné vůči stočení vlivem anharmoničnosti sférického kyvadla. Tento předpoklad ověříme porovnáním úhlových rychlostí obou stáčení. Navíc rotace Země způsobuje stáčení kyvadla ve stále stejném směru, zatímco k stáčení vlivem anharmoničnosti dochází ve směru daném znaménkem momentu hybnosti kyvadla. Proto provedeme měření při pohybu kyvadla v kladném i záporném smyslu.

Relativní chyba při použití měřicího pásma byla odhadnuta na 0,1% při měření vzdáleností e a f . Při měření vzdálenosti s bylo nejméně přesné samotné určení bodu maxima, proto byla relativní chyba odhadnuta na 10%. Z těchto hodnot vychází odchylka pro experimentálně určenou velikost stočení trajektorie kyvadla $\Delta\Phi$.

Při výpočtu $\Delta\Phi$ pomocí eliptických integrálů je třeba zohlednit i chybu dalších veličin vyskytujících se ve výsledném vzorci. Těmito veličinami jsou délka kyvadla l , vzdálenost závěsu kyvadla od roviny podlahy h , nesmíme zapomenout ani na ztotožnění vnějšího okraje stopy mouky s prodloužením

| číslo měření | e [cm] | f [cm] | s [cm] | $\Delta\Phi$ [°] experiment | $\bar{\vartheta}_{max}$ [°] | $\bar{\vartheta}_{min}$ [°] | $\Delta\Phi$ [°] výpočet |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1 | 47,0 | 138,0 | 12,7 | $(-5,3 \pm 0,5)$ | 18,8 | 6,62 | $(-5,2 \pm 0,1)$ |
| 2 | 37,5 | 121,5 | 7,6 | $(-3,6 \pm 0,4)$ | 16,7 | 5,29 | $(-3,68 \pm 0,07)$ |
| 3 | 35,0 | 141,5 | 10 | $(-4,1 \pm 0,4)$ | 19,3 | 4,94 | $(-3,97 \pm 0,08)$ |
| 4 | 26,5 | 151,0 | 9,5 | $(-3,6 \pm 0,4)$ | 20,5 | 3,75 | $(-3,20 \pm 0,06)$ |
| 5 | 29,1 | 123,0 | 3,6 | $(-1,7 \pm 0,2)$ | 16,9 | 4,11 | $(-2,89 \pm 0,06)$ |
| 6 | 23,2 | 124,2 | 2,7 | $(-1,2 \pm 0,1)$ | 17,1 | 3,28 | $(-2,33 \pm 0,05)$ |
| 7 | 37,3 | 126,0 | 8,9 | $(-4,0 \pm 0,4)$ | 17,3 | 5,27 | $(-3,79 \pm 0,07)$ |
| 8 | 44,5 | 128,0 | 7,75 | $(-3,5 \pm 0,3)$ | 17,6 | 6,27 | $(-4,58 \pm 0,09)$ |
| 9 | 20,6 | 111,5 | 5,15 | $(-2,6 \pm 0,3)$ | 15,4 | 2,91 | $(-1,86 \pm 0,04)$ |
| 10 | 33,4 | 108,4 | 6,45 | $(-3,4 \pm 0,3)$ | 15,0 | 4,72 | $(-2,93 \pm 0,06)$ |
| 11 | 34,0 | 110,4 | 5,2 | $(-2,7 \pm 0,3)$ | 15,3 | 4,80 | $(-3,04 \pm 0,06)$ |
| 12 | 34,8 | 112,0 | 5,45 | $(-2,8 \pm 0,3)$ | 15,5 | 4,91 | $(-3,16 \pm 0,06)$ |
| 13 | 26,6 | 108,7 | 4,97 | $(-2,6 \pm 0,3)$ | 15,0 | 3,76 | $(-2,34 \pm 0,05)$ |
| 14 | 29,2 | 121,6 | 7,95 | $(-3,7 \pm 0,4)$ | 16,7 | 4,13 | $(-2,87 \pm 0,06)$ |

Tab. 4.2: Měření při pohybu kyvadla v záporném smyslu

kyvadla. Výpočet stočení trajektorie kyvadla v programu Mathematica v závislosti na l a h v rámci jejich chyby ukázal, že ovlivnění výsledku těmito odchylkami je zcela zanedbatelné. Relativní chyba ve ztotožnění vnějšího okraje stopy s prodloužením kyvadla byla odhadnuta na 1%. Z této hodnoty vychází odchylka pro velikost stočení trajektorie kyvadla určenou výpočtem.

V tabulce 4.2 jsou zaznamenány měřené i vypočtené údaje při pohybu kyvadla v záporném smyslu. Intervaly spolehlivosti experimentálně zjištěného a předpokládaného stočení $\Delta\Phi$ se ve více než polovině případů překrývají. Úhlová rychlost stáčení vyšla řádově 10^{-2} rads $^{-1}$ a při otáčení v tomto smyslu je záporná.

V tabulce 4.3 jsou zapsány hodnoty pro pohyb kyvadla v kladném smyslu. Intervaly spolehlivosti se i tentokrát v nadpoloviční většině případů překrývají. Úhlová rychlost stáčení je kladná a její velikost vyšla řádově také 10^{-2} rads $^{-1}$.

V žádném z případů nedomnuje určitý směr v odchylkách měřené a vypočtené hodnoty. Úhlová rychlost stáčení kyvadla v důsledku Coriolisovy síly je pro $49^\circ 12' 17''$ a úhlovou rychlost rotace Země $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ rads $^{-1}$ rovna $5,52 \cdot 10^{-5}$ rads $^{-1}$, tedy o tři řády nižší než vypočtená úhlová rychlost.

| číslo měření | e [cm] | f [cm] | s [cm] | $\Delta\Phi$ [°] experiment | $\bar{\vartheta}_{max}$ [°] | $\bar{\vartheta}_{min}$ [°] | $\Delta\Phi$ [°] výpočet |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 15 | 16,6 | 129,8 | 3,8 | (1,7 ± 0,2) | 17,8 | 2,35 | (1,74 ± 0,03) |
| 16 | 30,2 | 115,4 | 6,22 | (3,1 ± 0,3) | 15,9 | 4,27 | (2,82 ± 0,06) |
| 17 | 33,2 | 128,8 | 7,65 | (3,4 ± 0,3) | 17,7 | 4,69 | (3,44 ± 0,07) |
| 18 | 25,6 | 124,5 | 5,25 | (2,4 ± 0,2) | 17,1 | 3,62 | (2,57 ± 0,05) |
| 19 | 23,4 | 119,7 | 5,45 | (2,6 ± 0,3) | 16,5 | 3,31 | (2,26 ± 0,04) |
| 20 | 36,7 | 114,4 | 7,55 | (3,8 ± 0,4) | 15,8 | 5,18 | (3,40 ± 0,07) |
| 21 | 26,2 | 124,5 | 6,55 | (3,0 ± 0,3) | 17,1 | 3,70 | (2,63 ± 0,05) |
| 22 | 25,3 | 116,7 | 5,85 | (2,9 ± 0,3) | 16,1 | 3,58 | (2,39 ± 0,05) |
| 23 | 35,3 | 113,5 | 5,9 | (3,0 ± 0,3) | 15,7 | 4,99 | (3,24 ± 0,06) |
| 24 | 19,8 | 120,2 | 3,7 | (1,8 ± 0,2) | 16,5 | 2,80 | (1,92 ± 0,04) |
| 25 | 46,9 | 98,5 | 3,8 | (2,2 ± 0,2) | 13,7 | 6,61 | (3,75 ± 0,07) |
| 26 | 16,2 | 114,3 | 2,75 | (1,4 ± 0,1) | 15,8 | 2,29 | (1,50 ± 0,03) |
| 27 | 23,9 | 110,9 | 5,8 | (3,0 ± 0,3) | 15,3 | 3,38 | (2,15 ± 0,04) |
| 28 | 47,6 | 123,1 | 13,8 | (6,4 ± 0,6) | 16,9 | 6,71 | (4,72 ± 0,09) |

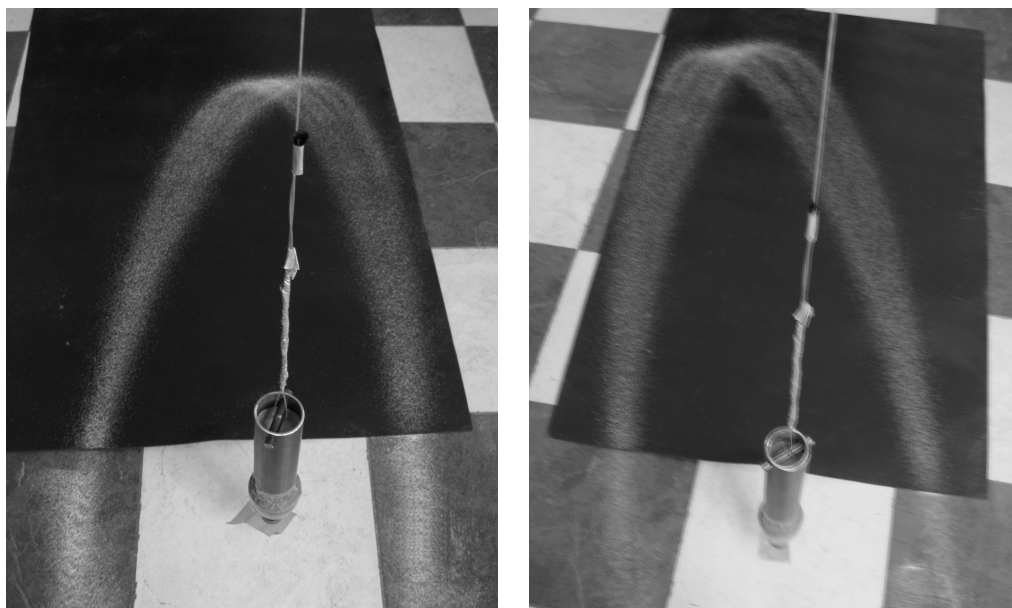
Tab. 4.3: Měření při pohybu kyvadla v kladném smyslu

Zanedbání vlivu rotace Země je proto v tomto případě oprávněné.

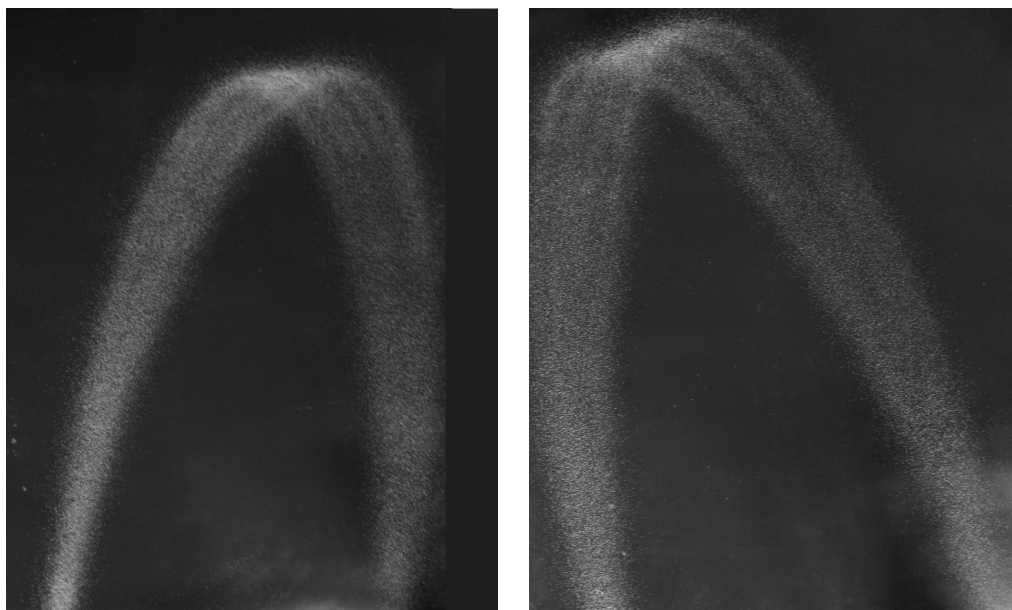
Výsledky jsou uvedeny pouze v tabulkách, vzhledem k závislosti na dvou parametrech by bylo možné je zaznamenat do trojrozměrného grafu, ten by ovšem měl vypovídací hodnotu pouze pro mnohem větší počet měření.

Pro ilustraci jsou přiloženy fotografie zachycující dvě měření v celkovém pohledu s kyvadlem na obr. 4.3 a v přiblížení na obr. 4.4.

Přesnějšího měření bychom mohli dosáhnout lepším vyznačováním trajektorie kyvadla např. pomocí laseru a zaznamenáváním jeho stopy kamerou. Samotné upevnění laseru na kyvadlo tak, aby paprsek směřoval v prodloužení lanka, není jednoduchou záležitostí. Vyhodnocování stopy laseru by pak překročilo rámeček bakalářské práce.



Obr. 4.3: Ukázka obrazců vytvořených odsypanou moukou



Obr. 4.4: Ukázka obrazců vytvořených odsypanou moukou – bližší pohled

Kapitola 5

Měření stočení Foucaultova kyvadla

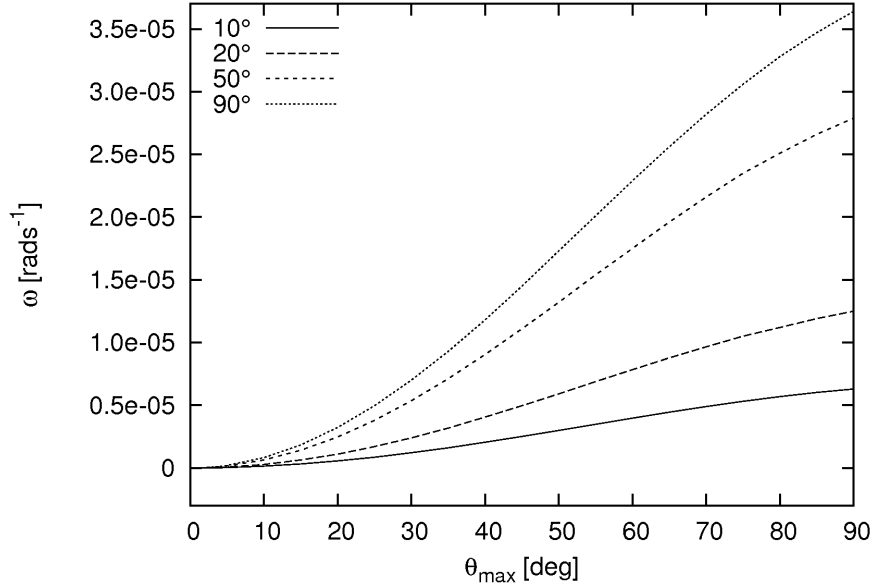
5.1 Cíl měření

Naším cílem je změřit stočení Foucaultova kyvadla v místě s danou zeměpisnou šířkou a srovnat výsledek s teoreticky odvozenou hodnotou. V kapitole 3.2 byl odvozen vztah spojující zeměpisnou šířku se stočením kyvadla pro „malé“ kmity. To pro nás není příliš vhodné, neboť kyvadlo se postupně utlumuje a pro větší přesnost měření potřebujeme, aby experiment probíhal co nejdéle.

Vraťme se ke sférickému kyvadlu (v inerciální vztažné soustavě). V kapitole 2.3 jsme ukázali, že pro nulový moment hybnosti $K = 0$ se kyvadlo pohybuje v rovině určené úhlem $\varphi = \text{konst}$ daným počátečními podmínkami. Přitom nebyl použit žádný předpoklad omezující velikost úhlu ϑ . A proto spustíme-li kyvadlo tak, aby mělo nulový moment hybnosti vzhledem k ose z , nebude docházet ke stáčení jeho trajektorie. Vychýlíme-li kyvadlo ze stabilní polohy, necháme-li ho dostatečně dlouho ustálit a následně ho spustíme tak, abychom ho nevychýlili v nežádoucím směru (např. přepálení provázku, který kyvadlo držel ve vychýlené poloze), pak bude jeho moment hybnosti vzhledem k ose z nulový.

Pokud budeme takto postupovat v neinerciální vztažné soustavě spojené se Zemí, bude mít kyvadlo vzhledem k ose z velikost momentu hybnosti (na jednotku hmotnosti)

$$k = \varrho^2 \Omega_C = (l^2 \sin^2 \vartheta_{max}) \Omega \sin \alpha, \quad (5.1)$$



Obr. 5.1: Graf úhlové rychlosti stočení vlivem nenulového momentu hybnosti daného rotací Země pro severní zeměpisné šířky 10° , 20° , 50° a 90° v závislosti na úhlu maximálního vychýlení ϑ_{max} pro průměrné tíhové zrychlení $g = 9,81\text{ms}^{-2}$

kde $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$ je úhlová rychlost rotace Země (vzhledem k hvězdnému pozadí), α udává rovnoběžku, na které se kyvadlo nachází, a ϑ_{max} je úhel, o který jsme kyvadlo na počátku odchýlili od stabilní polohy. Směr momentu hybnosti závisí na umístění na zeměkouli. S ohledem na diskusi v kapitole 2.3 se bude kyvadlo v důsledku nenulového momentu hybnosti daným rotací Země na severní polokouli stáčet v kladném smyslu, na jižní v záporném smyslu (vzhledem k ose z) – opačně než v důsledku Coriolisovy síly.

Podívejme se nyní na velikost tohoto stočení. Ze znalosti k a hraniční souřadnice $z_2 = -l \cos \vartheta_{max}$ můžeme pomocí (2.28) získat z_1 a stočení $\Delta\Phi$ za jednu periodu vypočítat z (2.38). Ze vzorce (2.41) můžeme určit periodu tohoto stáčení. Celkově tedy známe jeho úhlovou rychlost

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\Phi}{T}. \quad (5.2)$$

| ϑ_{max} | ϑ_{min} | $\Delta\Phi$ | $\bar{\omega}/\Omega_C$ |
|-------------------|-------------------|---------------|---------------------------------------|
| 1° | 0,12'' | 0,005'' | $1,1 \cdot 10^{-4}$ |
| 2° | 0,24'' | 0,020'' | $4,6 \cdot 10^{-4}$ |
| 3° | 0,36'' | 0,045'' | $1,0 \cdot 10^{-3}$ |
| 4° | 0,49'' | 0,080'' | $1,8 \cdot 10^{-3}$ |
| 5° | 0,61'' | 0,12'' | $2,9 \cdot 10^{-3}$ |
| 10° | 1,20'' | 0,50'' | $1,1 \cdot 10^{-2}$ |
| 15° | 1,79'' | 1,11'' | $2,5 \cdot 10^{-2}$ |
| 20° | 2,34'' | 1,96'' | $4,4 \cdot 10^{-2}$ |
| 25° | 2,87'' | 3,02'' | $6,8 \cdot 10^{-2}$ |
| 30° | 3,36'' | 4,28'' | 0,10 |
| 35° | 3,81'' | 5,73'' | 0,13 |
| 40° | 4,20'' | 7,33'' | 0,16 |
| 45° | 4,55'' | 9,06'' | 0,20 |
| 50° | 4,83'' | 10,9'' | 0,24 |
| 55° | 5,06'' | 12,8'' | 0,28 |
| 60° | 5,22'' | 14,8'' | 0,31 |
| 65° | 5,32'' | 16,7'' | 0,35 |
| 70° | 5,36'' | 18,7'' | 0,39 |
| 75° | 5,33'' | 20,6'' | 0,42 |
| 80° | 5,25'' | 22,5'' | 0,45 |
| 85° | 5,11'' | 24,2'' | 0,48 |
| 90° | 4,92'' | 25,8'' | 0,50 |

Tab. 5.1: Poměr úhlové rychlosti stočení vlivem nenulového momentu hybnosti daného rotací Země a úhlové rychlosti stočení Foucaultova kyvadla pro $49^\circ 12' 17''$ s.z.š. a tíhové zrychlení $g = 9,809980 \text{ ms}^{-2}$, úhly ϑ_{min} a $\Delta\Phi$ jsou vypočteny pro délku kyvadla $l = 3,688 \text{ m}$

V tabulce 5.1 je zaznamenán poměr velikostí úhlové rychlosti stáčení kyvadla v důsledku nenulového počátečního momentu hybnosti $\bar{\omega}$ a úhlové rychlosti stáčení Foucaultova kyvadla Ω_C v závislosti na úhlu maximální výchylky ϑ_{max} . Pro názornost je velikost úhlové rychlosti $\bar{\omega}$ pro několik zeměpisných šířek vynesena do grafu (obr. 5.1). Bylo zjištěno, že $\bar{\omega}$ nezávisí na délce kyvadla. Povšimněme si, že při výchylce o 90° je úhlová rychlost $\bar{\omega}$ daná nenulovým momentem hybnosti rovna polovině rychlosti stáčení Foucaultova kyvadla Ω_C .

Vidíme, že při vychýlení do 10° je úhlová rychlost stáčení kyvadla vlivem nenulového momentu hybnosti o dva řády nižší než úhlová rychlost stáčení Foucaultova kyvadla. To nás opravňuje tento efekt zanedbat. Můžeme proto předpokládat, že i při spuštění kyvadla způsobem popsáným výše s vychýlením do 10° je jeho moment hybnosti vzhledem k ose z roven nule. V neinerciální vztažné soustavě (spojené se Zemí a s aproximacemi použitými v kapitole 3.1) tak bude docházet ke stáčení trajektorie kyvadla pouze vlivem Coriolisovy síly.

Myšlenkovou úvahou lze ukázat, že pro $K = 0$ je úhlová rychlost stáčení kyvadla vlivem Coriolisovy síly nezávislá na úhlu maximální výchylky ϑ_{max} . Proto můžeme kyvadlo spustit pod větším úhlem, než jaký by vyhovoval podmínce pro „malé“ kmity (ale menším než deset stupňů). Prodloužíme tak dobu, po kterou lze měření provádět, a zároveň neovlivníme vlastnosti, které chceme měřit.

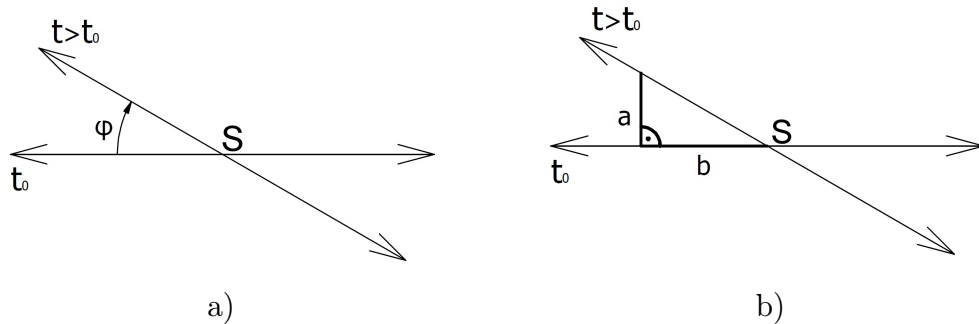
Úhlová rychlost stáčení kyvadla je pak $\Omega_C = \Omega \sin \alpha$ (viz. 3.11). Jestliže v čase $t_0 = 0$ s je rovina kyvadla určena úhlem $\varphi_0 = 0$, pak za čas t se kyvadlo stočí o úhel

$$\varphi = \Omega t \sin \alpha. \quad (5.3)$$

5.2 Postup a zpracování měření

K experimentu s Foucaultovým kyvadlem použijeme stejné kyvadlo jako pro měření stáčení bodu maximální výchylky sférického kyvadla (viz. kapitola 4.1). Na podlahu pod kyvadlo pevně přichytíme papír, na který budeme moci zaznamenávat polohu kyvadla. Nejdříve necháme kyvadlo volně viset, ustálit se ve stabilní poloze a zaznamenáme polohu jeho průmětu do roviny podlahy (označme tento bod S).

Na kyvadlo v blízkosti těžiště upevníme šňůrku. Pomocí ní kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy, šňůrku přivážeme k nehybnému (mnohem



Obr. 5.2: Stočení trajektorie kyvadla vlivem Coriolisovy síly – měření a) úhlu b) vzdáleností

hmotnějšímu) předmětu, počkáme, až se ustaví rovnováha, a následně šňůrku přepálíme, či opatrně odstříhneme. Vyhneme se tak precesnímu pohybu kyvadla a máme jistotu, že moment hybnosti vzhledem k ose z bude nenulový pouze v důsledku rotace Země.

Nazvěme *počáteční rovinou* rovinu určenou bodem závěsu, průmětem stabilní polohy S a místem uchycení šňůrky. Pak k určení stočení trajektorie Foucaultova kyvadla potřebujeme změřit úhel φ , o který se rovina kyvu za danou dobu t odchýlí od počáteční roviny (obr. 5.2 a)).

Kyvadlo spustíme a spolu s tím zapneme stopky. Necháme kyvadlo kývat co nejdéle dobu, nesmí se však příliš utlumit, aby bylo měřitelné, pod jakým úhlem φ se po dané době pohybuje (při našem experimentu trvalo měření vždy kolem 50 min). Zaznameníme čas a průmět roviny kyvu kyvadla do roviny podlahy.

Výsledky experimentu budou přesnější, nebudeme-li měřit přímo úhel φ , ale vzdálenosti a , b (viz. obr. 5.2 b)). Pak

$$\varphi = \arctan \frac{a}{b}. \quad (5.4)$$

Pro každý experiment změříme a a b několikrát a určíme střední hodnotu $\bar{\varphi}$. Chybu měření odhadneme jako chybu zaznamenání roviny kyvu.

| 1. | | | 2. | | |
|---------------------------------------|----------|---------------------|---------------------------------------|----------|---------------------|
| $\Delta t_1 = 49 : 35$ [min:s] | | | $\Delta t_2 = 50 : 36$ [min:s] | | |
| b [cm] | a [cm] | $\Delta\varphi$ [°] | b [cm] | a [cm] | $\Delta\varphi$ [°] |
| 60,0 | 9,80 | 9,276 | 58,1 | 9,90 | 9,670 |
| 58,0 | 9,40 | 9,206 | 71,5 | 12,10 | 9,605 |
| 64,0 | 10,50 | 9,317 | 69,1 | 11,70 | 9,610 |
| 68,0 | 11,20 | 9,353 | 61,7 | 10,50 | 9,658 |
| $\Delta\bar{\varphi}_1 = 9,288^\circ$ | | | $\Delta\bar{\varphi}_2 = 9,642^\circ$ | | |

Tab. 5.2: Stočení Foucaultova kyvadla

| číslo měření | Δt [min] | $\Delta\bar{\varphi}$ [°] | |
|-----------------|---------------------|---------------------------|---------|
| | | experiment | výpočet |
| 1 | 49,58 | $(9,3 \pm 0,1)$ | 9,4 |
| 2 | 50,60 | $(9,6 \pm 0,1)$ | 9,6 |

Tab. 5.3: Výsledky – stočení Foucaultova kyvadla

5.3 Vlastní měření

Naměřené hodnoty pro dvě měření jsou zaznamenány v tabulce 5.2. U ostatních měření se nepodařilo spustit kyvadlo s minimálním momentem hybnosti (daným pouze rotací Země), rotace kyvadla kolem osy z byla na první pohled zřejmá, výsledky těchto měření tu proto nejsou uvedeny.

V tabulce 5.3 je uveden naměřený i předpokládaný úhel stočení roviny kyvu pro zeměpisnou šířku přírodovědecké fakulty $49^\circ 12'' 17'$ s.z.š. Kyvadlo bylo v obou případech na počátku vychýleno přibližně o deset stupňů, postupně se utlumovalo a na konci měření byla jeho maximální výchylka do jednoho stupně. Chyba měřené hodnoty byla určena jako chyba zaznamenání roviny kyvu kyvadla, která byla odhadnuta na $0,1^\circ$. Vidíme, že předpokládaná velikost stočení leží v obou případech v intervalu spolehlivosti naměřené hodnoty.

Kapitola 6

Závěr

V této práci jsme se zabývali popisem pohybu sférického kyvadla. Nejdříve jsme pohyb kyvadla analyzovali v inerciální vztažné soustavě. Ukázali jsme, že v aproximaci malých kmitů (výchylka od stabilní polohy je do pěti stupňů) se kyvadlo chová jako dvourozměrný harmonický oscilátor.

Pro větší výchylky nelze získat analytické řešení pohybových rovnic. Zjistili jsme, že pohyb kyvadla je obecně neperiodický – dochází ke stáčení jeho trajektorie. Byl odvozen vzorec pro úhel, o který se trajektorie kyvadla stočí za jednu „periodu“. Provedli jsme sérii experimentů, ve kterých jsme ukázali, že pro použitý rozsah počátečních podmínek je ovlivnění výsledků neiner-ciálností vztažné soustavy (způsobené rotací Země) zanedbatelné. Výsledky experimentu – měření úhlu stočení trajektorie kyvadla po jedné periodě – se ve většině případů shodovali s hodnotami vypočtenými numericky z teoreticky odvozeného vzorce.

Dále byl analyzován pohyb Foucaultova kyvadla. Znovu jsme použili aproximaci malých kmitů. Ukázali jsme, že se trajektorie kyvadla stáčí v důsledku působení Coriolisovy síly a odvodili jsme velikost úhlové rychlosti tohoto stáčení. Dále jsme ukázali, že spouštění kyvadla z vychýlené polohy může pro větší výchylky znamenat ovlivnění výsledku stáčením vlivem anharmoničnosti sférického kyvadla. Nicméně jsme vypočítali, že je možné kyvadlo spustit z výchylky deseti stupňů, aniž bychom toto ovlivnění museli brát v úvahu. Měření potvrdilo předpoklady o velikosti úhlové rychlosti stáčení Foucaultova kyvadla.

Literatura

- [1] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*, Academia, Praha, 1987.
- [2] Byrd P. F., Friedman M. D.: *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer-Verlag, Berlín, 1954.
- [3] Cayley A.: *An elementary treatise of elliptic functions*, George Bell & Sons, London, 1895.
- [4] Wikipedia, the free encyclopedia: *Foucault pendulum*, 2009. Dostupné na http://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum